






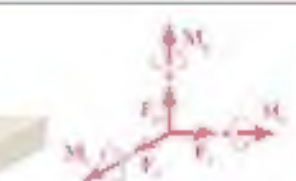

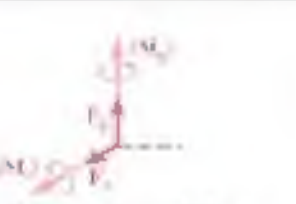

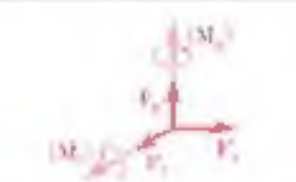


MECÁNICA VECTORIAL PARA INGENIEROS **ESTÁTICA**

BEER | JOHNSTON | MAZUREK | EISENBERG
NOVENA EDICIÓN



Reacciones en los soportes y conexiones para una estructura tridimensional

 <p> Roller Superficie sin fricción </p>	 <p> Cable Fuerza con línea de acción conocida (una incógnita) </p>
 <p> Roller sobre superficie rugosa Barra sobre rod </p>	 <p> Dos componentes de fuerza </p>
 <p> Superficie rugosa Barra (rod) sobre superficie </p>	 <p> Tres componentes de fuerza </p>
 <p> Jointo o articulo universal Tres componentes de fuerza y un par </p>	 <p> Apoyo fijo Tres componentes de fuerza y tres pares </p>
 <p> Enlaza y soporte que soportan sólo carga radial </p>	 <p> Dos componentes de fuerza (y dos pares véase la página 192) </p>
 <p> Pinador y rótula Enlaza y soporte que soportan carga axial y carga radial </p>	 <p> Dos componentes de fuerza (y dos pares véase la página 192) </p>

**MECÁNICA VECTORIAL
PARA INGENIEROS**
Estática

REVISIÓN TÉCNICA

ARGENTINA

Ricardo Bocca

Universidad Tecnológica Nacional, Buenos Aires

COLOMBIA

Carlos Eduardo Muñoz Rodríguez
Jaime Guillermo Guerrero Cusdiego
Rubén Darío Arbolada Vélez
Wilson Rodríguez Calderón

Pontificia Universidad Javeriana, Bogotá
Universidad Nacional de Colombia
Universidad Pontificia Bolivariana, Medellín
Universidad de la Salle, Bogotá

MÉXICO

Antonio Rubén Benítez Casas
Carlos Meléndez Osorio

Universidad Veracruzana
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey,
campus La Marlin

Constantino Anaya Hill
Dania Hernández Suárez

Instituto Tecnológico de Culiacán
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey,
campus Ciudad Obregón

Eduardo Soberanes Lago
Francisco Terán Arévalo
Gerardo Caydán Guerra
Gladys Karina Ruiz Vargas
Ignacio Ramírez Vargas
José Antonio Corona López
José Luis Carranza Santana

Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, campus Sinaloa
Instituto Tecnológico Regional de Chihuahua
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, campus Toluca
Universidad Autónoma, campus Norte
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, campus Hidalgo
Instituto Tecnológico de Veracruz

Juan Abagaher Francis

Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica,
Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica,
Instituto Politécnico Nacional

Juan Osorio Castellano
Klara Ortiz Hernández
Luis Adolfo Torres González
Martín Durio Castillo Sánchez

Universidad Nacional Autónoma de México
Universidad Autónoma de Sinaloa
Universidad Iberoamericana, campus León
Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica,
Instituto Politécnico Nacional

Raúl Escalante Rosas
Raúl Soto López
Roberto Carlos Tinoco Goosans

Universidad Nacional Autónoma de México
Universidad de Occidente, campus Culiacán
Universidad Iberoamericana, campus Ciudad de México

Novena edición
**MECÁNICA VECTORIAL
PARA INGENIEROS**

Estática

FERDINAND P. BEER (finito)

Late of Lehigh University

E. RUSSELL JOHNSTON, JR.

University of Connecticut

DAVID F. MAZUREK

U.S. Coast Guard Academy

ELLIOT R. EISENBERG

The Pennsylvania State University

Revisión técnica

Javier León Cárdenas

Universidad La Salle, campus Ciudad de México

Felipe de Jesús Hidalgo Cavazos

*Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey
campus Monterrey*



MÉXICO • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA
MADRID • NUEVA YORK • SAN JUAN • SANTIAGO • SÃO PAULO
AUCKLAND • LONDRES • MILÁN • MONTREAL • NUEVA DELHI
SAN FRANCISCO • SINGAPUR • SAN LUIS • SIDNEY • TORONTO

www.geocienciasvirtual.blogspot.com.co

Director Higher Education: Miguel Ángel Toledo Castellanos
Editor sponsor: Pablo Eduardo Ruiz Vázquez
Coordinadora editorial: Marcela I. Rocha M.
Editor de desarrollo: Edmundo Carlos Zúñiga Gutiérrez
Supervisor de producción: Zeferino García García

Traducción: Jesús Elmer Murrieta Murrieta

MECÁNICA VECTORIAL PARA INGENIEROS ESTÁTICA

Novena edición

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra,
por cualquier medio, sin la autorización escrita del editor.



Educación

**DERECHOS RESERVADOS © 2010, respecto a la novena edición en español por
McGraw-Hill/INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V.**

A Subsidiary of The McGraw-Hill Companies, Inc.

Corporativo Punta Santa Fe
Prolongación Paseo de la Reforma 1015, Torre A
Piso 17, Colonia Desarrollo Santa Fe
Delegación Álvaro Obregón
C.P. 01376, México, D.F.

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana, Reg. Núm. 736

La sección de créditos de este libro comienza en la página 603 y es considerada como una extensión de la página legal.

ISBN-13: 978-607-15-0277-3

(ISBN: 970-10-6103-9 edición anterior)

Traducción de la novena edición de Vector mechanics for engineers, Statics, ninth edition.

Copyright © 2010 by The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

ISBN: 0-07-352923-0

1234567890

109876543210

Impreso en México

Printed in Mexico

Acerca de los autores

Los autores de esta obra con frecuencia son cuestionados acerca de cómo fue que, estando uno en Lehigh y otro en la University of Connecticut, empezaron a escribir sus libros juntos y cómo logran seguir colaborando en las revisiones subsecuentes.

La respuesta a estas preguntas es sencilla. Russ Johnston inició su carrera académica en el departamento de ingeniería civil y mecánica de Lehigh University y allí conoció a Ferd Beer, quien había comenzado a trabajar en ese departamento dos años antes y estaba a cargo de los cursos de mecánica.

Ferd se sintió muy complacido al descubrir que el joven contratado para impartir cursos de ingeniería estructural a nivel de posgrado no sólo estaba dispuesto, sino también ansioso por ayudarlo a reorganizar los cursos de mecánica. Ambos creían que dichos cursos deberían impartirse a partir de unos cuantos principios básicos, y que los distintos conceptos involucrados serían mejor comprendidos y recordados por los estudiantes si se les presentaban en forma gráfica. Juntos escribieron apuntes para las clases de estática y dinámica, a los cuales posteriormente agregaron problemas que supusieran resultados interesantes para los futuros ingenieros, y poco después produjeron el manuscrito de la primera edición de *Mecánica para ingenieros*.

Al publicarse la segunda edición de *Mecánica para ingenieros* y la primera de *Mecánica vectorial para ingenieros*, Russ Johnston estaba en el Worcester Polytechnic Institute y para las ediciones subsecuentes en la University of Connecticut. Mientras tanto, Ferd y Russ habían asumido funciones administrativas en sus respectivos departamentos y se dedicaban a la investigación, la consultoría, y a asesorar estudiantes de posgrado —Ferd en el área de procesos estocásticos y vibraciones aleatorias y Russ en la de estabilidad elástica y en diseño y análisis estructurales—. Sin embargo, su interés por mejorar la enseñanza de los cursos básicos de mecánica no había disminuido y continuaron impartiendo los cursos mientras revisaban sus libros y comenzaban a escribir el manuscrito de la primera edición de *Mecánica de materiales*.

La colaboración entre estos dos autores ha abarcado muchos años y muchas revisiones exitosas de todos sus libros, y las contribuciones de Ferd y Russ a la educación en ingeniería los han hecho acreedores de numerosas distinciones y reconocimientos. Recibieron el Western Electric Fund Award por parte de sus respectivas secciones regionales de la American Society for Engineering Education por su excelencia en la instrucción de estudiantes de ingeniería y, además, el Distinguished Educator Award de la división de mecánica de esa misma asociación. A partir de 2001, el reconocimiento denominado New Mechanics Educator Award de la división de mecánica ha sido nombrado Beer and Johnston en honor a estos autores.

Ferdinand P. Beur. Nacido en Francia y educado en Francia y Suiza, obtuvo una maestría en La Sorbona y un doctorado en ciencias en el área de mecánica teórica en la Universidad de Ginebra. Emigró a Estados Unidos después de servir en el ejército francés durante la primera parte de la Segunda Guerra Mundial, e impartió clases por cuatro años en el Williams College en el programa conjunto de ingeniería y artes Williams-MIT. Después de su servicio en el Williams College, Ferd ingresó al profesorado de Lehigh University donde enseñó durante 37 años. Ocupó varios puestos, incluyendo el de profesor distinguido de la universidad y director del departamento de mecánica e ingeniería mecánica. En 1995 recibió un grado honorario de Doctor en Ingeniería por la Lehigh University.

E. Russell Johnston, Jr. Nacido en Filadelfia, Russ posee un título de ingeniero civil de la University of Delaware y un doctorado en ciencias en el área de ingeniería estructural del Massachusetts Institute of Technology. Impartió clases en Lehigh University y en Worcester Polytechnic Institute antes de ingresar al profesorado de la University of Connecticut, donde ocupó el puesto de director del departamento de ingeniería civil y enseñó durante 26 años. En 1991 recibió el Outstanding Civil Engineer Award, sección Connecticut, que otorga la American Society of Civil Engineers.

David F. Muzurek. Posee una licenciatura en ingeniería mecánica y una maestría en ingeniería civil del Florida Institute of Technology, además de un doctorado en ingeniería civil de la University of Connecticut. Fue empleado por la Electric Boat Division of General Dynamics Corporation e impartió clases en Lafayette College antes de pertenecer a la U. S. Coast Guard Academy, en donde ha estado desde 1990. Ha prestado sus servicios en American Railway Engineering y Maintenance of Way Association's Committee 15—Steel Structures durante los últimos 14 años. Su interés profesional incluye la ingeniería de puentes, torres esbeltas, ciencia forense estructural y diseño resistente a explosiones.

Elliot A. Eisenberg. Posee una licenciatura y una maestría en ingeniería, ambas de la Cornell University. Elliot ha enfocado sus actividades en el servicio profesional y la enseñanza; en 1992 su trabajo fue reconocido por la American Society of Mechanical Engineers al distinguirlo con la medalla Ben C. Sparks por sus contribuciones a la ingeniería mecánica y a la educación en tecnología de la ingeniería mecánica, así como por sus servicios en la American Society for Engineering Education. Elliot impartió clases durante 32 años, incluyendo 29 en Penn State donde se le han otorgado premios por enseñanza y asesoría.

Contenido

Prefacio	xiv
Lista de símbolos	xxv

1 INTRODUCCIÓN 1

1.1	¿Que es la mecánica	2
1.2	Conceptos y principios fundamentales	2
1.3	Sistemas de unidades	5
1.4	Conversión de un sistema de unidades a otro	10
1.5	Método para la solución de problemas	11
1.6	Exactitud numérica	13

2 ESTÁTICA DE PARTICULAS 15

2.1	Introducción	15
	Fuerzas en un plano	15
2.2	Fuerza sobre una partícula, Resultante de dos fuerzas	16
2.3	Vectores	17
2.4	Adición o suma de vectores	18
2.5	Resultante de varias fuerzas concurrentes	20
2.6	Descomposición de una fuerza en sus componentes	21
2.7	Componentes rectangulares de una fuerza, Vectores unitarios	27
2.8	Adición de fuerzas sumando sus componentes x y y	30
2.9	Equilibrio de una partícula	35
2.10	Primera ley del movimiento de Newton	38
2.11	Problemas relacionados con el equilibrio de una partícula	
	Diagramas de cuerpo libre	36
	Fuerzas en el espacio	45
2.12	Componentes rectangulares de una fuerza en el espacio	45
2.13	Fuerza definida en términos de su magnitud y dos puntos sobre su línea de acción	48

2.14	Adición de fuerzas concurrentes en el espacio	49
2.15	Equilibrio de una partícula en el espacio	57
Repaso y resumen del capítulo 2		64
Problemas de repaso		67
Problemas de computadora		70

3

CUERPOS RÍGIDOS: SISTEMAS EQUIVALENTES DE FUERZA

73

3.1	Introducción	74
3.2	Fuerzas externas e internas	74
3.3	Principio de transmisibilidad. Fuerzas equivalentes	75
3.4	Producto vectorial de dos vectores	77
3.5	Productos vectoriales expresados en términos de componentes rectangulares	79
3.6	Momento de una fuerza con respecto a un punto	81
3.7	Teorema de Varignon	83
3.8	Componentes rectangulares del momento de una fuerza	83
3.9	Producto escalar de dos vectores	83
3.10	Producto triple mixto de tres vectores	95
3.11	Momento de una fuerza con respecto a un eje dado	97
3.12	Momento de un par	107
3.13	Pares equivalentes	108
3.14	Adición o suma de pares	110
3.15	Los pares pueden representarse por medio de vectores	110
3.16	Descomposición de una fuerza dada en una fuerza en O y un par	111
3.17	Reducción de un sistema de fuerzas a una fuerza y un par	122
3.18	Sistemas equivalentes de fuerzas	123
3.19	Sistemas equipolentos de vectores	124
3.20	Otras reducciones de un sistema de fuerzas	124
3.21	Reducción de un sistema de fuerzas a una línea de torsión o torsor	127
Repaso y resumen del capítulo 3		146
Problemas de repaso		151
Problemas de computadora		154

4

EQUILIBRIO DE CUERPOS RÍGIDOS

157

4.1	Introducción	158
4.2	Diagrama de cuerpo libre	159
Equilibrio en dos dimensiones		160
4.3	Reacciones en los puntos de apoyo y conexiones de una estructura bidimensional	160
4.4	Equilibrio de un cuerpo rígido en dos dimensiones	162
4.5	Reacciones estáticamente indeterminadas. Restricciones parciales	163
4.6	Equilibrio de un cuerpo sujeto a dos fuerzas	162
4.7	Equilibrio de un cuerpo sujeto a tres fuerzas	163
Equilibrio en tres dimensiones		190
4.8	Equilibrio de un cuerpo rígido en tres dimensiones	190

4.9	Reacciones en puntos de apoyo y conexiones para una estructura tridimensional	190
-----	---	-----

Repaso y resumen del capítulo 4	21
Problemas de repaso	213
Problemas de computadora	216

5

FUERZAS DISTRIBUIDAS, CENTROIDES Y CENTROS DE GRAVEDAD

219

5	Introducción	220	
	Áreas y líneas	220	
5.2	Centro de gravedad de un cuerpo bidimensional	220	
5.3	Centroides de áreas y líneas	222	
5.4	Primeros momentos de áreas y líneas	223	
5.5	Placas y alambres compuestos	226	
5.6	Determinación de centroides por integración	236	
5.7	Teoremas de Pappus-Guldinus	238	
5.8	Cargas distribuidas en vigas	248	
5.9	Fuerzas sobre superficies sumergidas	249	
	Volumenes	259	
5.10	Centro de gravedad de un cuerpo tridimensional		
	Centroides de un volumen	259	
5.11	Cuerpos compuestos	262	
5.12	Determinación de centroides de volúmenes por integración	262	
	Repaso y resumen del capítulo 5	274	
	Problemas de repaso	278	
	Problemas de computadora	281	

6

ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS

285

6	Introducción	286	
	Armaduras	287	
6.2	Definición de una armadura	287	
6.3	Armaduras simples	289	
6.4	Análisis de armaduras mediante el método de los nodos	290	290
6.5	Nodos bajo condiciones especiales de carga	292	
6.6	Armaduras en el espacio o espaciales	294	
6.7	Análisis de armaduras por el método de secciones	304	
6.8	Armaduras formadas por varias armaduras simples	305	
	Amazonas y máquinas	316	
6.9	Estructuras que contienen elementos sujetos a fuerzas múltiples	316	
6.10	Análisis de un amazon	316	
6.11	Amazonas que dejan de ser rígidos cuando se separan de sus soportes	317	
6.12	Máquinas	332	
	Repaso y resumen del capítulo 6	345	
	Problemas de repaso	348	
	Problemas de computadora	350	

7 FUERZAS EN VIGAS Y CABLES

*7.1	Introducción	354
*7.2	Fuerzas internas en elementos	354
	Vigas	352
*7.3	Diferentes tipos de cargas y apoyos	362
7.4	Fuerza cortante y momento flector en una viga	363
*7.5	Diagramas de fuerza cortante y de momento flector	365
*7.6	Relaciones entre carga, fuerza cortante y momento flector	373
	Cables	383
7.7	Cables con cargas concentradas	383
8	Cables con cargas distribuidas	384
7.9	Cable parabólico	385
7.10	Catenaria	395
	Repasa y resumen del capítulo 7	403
	Problemas de repaso	406
	Problemas de computadora	408

8 FRICCIÓN

8.1	Introducción	412
8.2	Leyes de la fricción seca. Coeficientes de fricción	412
8.3	Ángulos de fricción	415
8.4	Problemas que involucran fricción seca	416
8.5	Cuñas	431
8.6	Tornillos de rosca cuadrada	43
*8.7	Grampas. Fricción en ejes	440
*8.8	Cojinetes de empuje. Fricción en discos	442
*8.9	Fricción en ruedas. Resistencia a la rodadura o rodamiento	443
8.10	Fricción en bandas	450
	Repasa y resumen del capítulo 8	461
	Problemas de repaso	464
	Problemas de computadora	467

9 FUERZAS DISTRIBUIDAS. MOMENTOS DE INERCIA

9.1	Introducción	472
	Momentos de inercia de áreas	473
9.2	Segundo momento, o momento de inercia, de un área	473
9.3	Determinación del momento de inercia de un área por integración	474
9.4	Momento polar de inercia	475
9.5	Radio de giro de un área	475
9.6	Teorema de los ejes paralelos o teorema de Steiner	483
9.7	Momentos de inercia de áreas compuestas	484
*9.8	Producto de inercia	497
*9.9	Ejes principales y momentos principales de inercia	498
*9.10	Círculo de Mohr para momentos y productos de inercia	506

	Momentos de inercia de masas	512
9.1	Momento de inercia de una masa	512
9.2	Teorema de los ejes paralelos	514
9.3	Momentos de inercia de placas delgadas	515
9.4	Determinación del momento de inercia de un cuerpo tridimensional por integración	516
9.5	Momentos de inercia de cuerpos compuestos	518
9.10	Momento de inercia de un cuerpo con respecto a un eje arbitrario que pasa por el punto O. Productos de Inercia de masa	531
9.17	Ejes de inercia. Ejes principales de inercia	532
9.18	Determinación de los ejes y los momentos principales de inercia de un cuerpo de forma arbitraria	534
	Repaso y resumen del capítulo 9	545
	Problemas de repaso	551
	Problemas de computadora	554

10

METODO DEL TRABAJO VIRTUAL

557

10.1	Introducción	558
10.2	Trabajo de una fuerza	558
10.3	Principio del trabajo virtual	561
10.4	Aplicaciones del principio del trabajo virtual	562
10.5	Máquinas reales. Eficiencia mecánica	564
10.6	Trabajo de una fuerza durante un desplazamiento finito	578
10.7	Energía potencial	580
10.8	Energía potencial y equilibrio	581
10.9	Estabilidad del equilibrio	582
	Repaso y resumen del capítulo 10	592
	Problemas de repaso	595
	Problemas de computadora	598

Apéndice

FUNDAMENTOS PARA LA CERTIFICACION EN INGENIERIA EN ESTADOS UNIDOS

601

	Créditos de las fotografías	603
	Índice analítico	605
	Respuestas a problemas	615

Prefacio

OBJETIVOS

El objetivo principal de un primer curso de mecánica debe ser desarrollar en el estudiante de ingeniería la capacidad de analizar cualquier problema en forma lógica y sencilla, y la de aplicar para su solución una variedad de principios físicos perfectamente comprendidos. Se espera que este texto, diseñado para un primer curso de estática, así como el libro complementario *Mecánica dinámica para ingenieros Diábolos* permitan que el profesor alcance este objetivo.

ENFOQUE GENERAL

En la parte inicial de este texto se introduce el análisis vectorial, el cual se utiliza en la presentación y exposición de los principios fundamentales de la mecánica. Los métodos vectoriales se usan también para resolver diversos problemas, especialmente en tres dimensiones, donde estas técnicas permiten obtener la solución de un modo más sencillo y simple. Su dominio en el análisis de este libro se fundamenta en el correcto aprendizaje de los principios de la mecánica y en que con ellos se resuelvan problemas de ingeniería por lo que el análisis vectorial se presenta como el primer capítulo de una mecánica para ingeniería.

Se introducen aplicaciones prácticas desde una etapa inicial. Una de las características notables de esta mecánica es que la mecánica de partículas se equipara a la forma clásica de la mecánica de cuerpos rígidos. Este enfoque hace posible considerar aplicaciones prácticas simples en una etapa inicial y posponer la introducción de los conceptos más avanzados. Por ejemplo:

- En *estática*, la estática de partículas se estudia primero (capítulo 2) de qué modo puede presentarse a los estudiantes la suma y resta de vectores, y el principio de equilibrio de una partícula se aplica inmediatamente a situaciones prácticas que involucren solo fuerzas concurrentes. La estática de cuerpos rígidos se considera en los capítulos 3 y 4. En el capítulo 3 se introduce el producto escalar y vectorial de dos vectores y se utilizan para definir el momento de una fuerza con respecto a un punto y a un eje. La

presentación de estos nuevos conceptos es seguida por la exposición rigurosa y completa de los resultados de las mismas y por los ejemplos que conducen, en el capítulo 4, a muchas aplicaciones prácticas que involucran el equilibrio de cuerpos rígidos bajo la acción de sistemas generales de fuerzas.

- En *Dinámica* se observa la misma división. Se introducen los conceptos básicos de fuerza, masa, aceleración, de trabajo y energía, y de impulso y momento. Se aplican inmediatamente a la resolución de problemas que sólo involucran partículas. De esta forma, los estudiantes pueden familiarizarse por sí mismos con los tres métodos básicos utilizados en dinámica, y aprender sus respectivas ventajas antes de enfrentar las dificultades asociadas con el movimiento de cuerpos rígidos.

Los conceptos nuevos se presentan en términos simples.

Como este texto está diseñado para un primer curso sobre estática, los conceptos nuevos se presentan en términos simples y cada paso se explica en forma detallada. Por otro lado, este enfoque alcanzará su máxima efectividad al analizar los aspectos más relevantes de los problemas considerados, y al adaptar los métodos de aprendizaje general. Por ejemplo, los conceptos de restricciones puntuales y de una terminalidad estática se introducen al principio del texto para ser usados en todo el libro.

Los principios fundamentales se ubican en el contexto de aplicaciones simples. Se enfatiza el hecho de que la mecánica es, esencialmente, una ciencia *derivativa* que se basa en algunos principios fundamentales. Las derivaciones se presentan siguiendo su secuencia lógica y con todo el rigor requerido a este nivel. Sin embargo, la virtud de que el proceso de aprendizaje es predominantemente *derivativo*, las aplicaciones más simples se consideran primero. Por ejemplo:

- La estática de partículas antecede a la estática de cuerpos rígidos, y los problemas que involucran fuerzas colineales se proponen hasta el capítulo 6.
- En el capítulo 4 se consideran primero los problemas de equilibrio que involucran sólo a fuerzas coplanarias, y se resuelven por medio del álgebra ordinaria, mientras que los problemas que involucran fuerzas tridimensionales (los cuales requieren el uso completo del álgebra vectorial), se exponen en la segunda parte de dicho capítulo.

Se emplean diagramas de cuerpo libre para resolver problemas de equilibrio y expresar la equivalencia de sistemas de fuerzas. Los diagramas de cuerpo libre se introducen al principio y se emplean sistemáticamente a lo largo de todo el texto. No sólo se emplean para resolver problemas de equilibrio, sino también para expresar la equivalencia de dos sistemas de fuerzas o, de modo más general, de dos sistemas de vectores. La ventaja de este enfoque se vuelve evidente en el estudio de la dinámica de cuerpos rígidos, donde se requiere para resolver problemas tridimensionales y bidimensionales. Se puede lograr una comprensión más intuitiva y completa de los princi-

posiciones equivalentes a lo anterior si se quiere mantener las unidades de longitud y tiempo de este país. El ejemplo de un uso de unidades algebraicas estándar de movimiento, Este enfoque, introducido en 1982 en la primera edición de *Mecánica vectorial para ingenieros*, ha obtenido hasta la fecha una amplia aceptación entre los profesores de mecánica en Estados Unidos. Por tanto, para la resolución de todos los problemas resueltos de este libro, se prefiere utilizar siempre el uso del método de equilibrio dinámico y de las ecuaciones de movimiento.

Se utilizan presentaciones en distintos tonos para distinguir los vectores. El color en este libro no sólo para mejorar la calidad de las ilustraciones, sino también para ayudar a los estudiantes a distinguir entre los diversos tipos de vectores que pueden aparecer. En virtud de que no había intención de establecer un código de color para el texto, en las capitales de los secciones se utiliza el mismo color para representar el mismo tipo de vector. Por ejemplo, a lo largo del tomo de *Estática*, el rojo se utiliza en forma exclusiva para representar fuerza y para los momentos que los vectores de posición se encuentran en una y una de las unidades en juego. Esto vuelve más fácil para los estudiantes identificar las fuerzas que actúan sobre una partícula o cuerpo rígido dados y comprender los problemas resueltos y otros ejemplos proporcionados en el libro.

Se mantiene, en forma consistente, un cuidadoso balance entre las unidades SI y unidades de uso común en Estados Unidos. Debido a la tendencia que existe en la academia, el gobierno y la industria estadounidenses de adoptar el Sistema Internacional de Unidades (unidades métricas SI), los unidades SI se han utilizado con mayor frecuencia en mecánica se introducen en el capítulo 1 y se emplean en todo el libro. Aproximadamente la mitad de los problemas resueltos y 60 por ciento de los problemas de tarea están planteados en este sistema de unidades, mientras que el resto se proporciona en las unidades de uso común en Estados Unidos. Las unidades SI, que están en el texto, que se introducen en los capítulos de los estudiantes, por lo general, se convierten de unidades SI a las unidades de uso común en los problemas de tarea.

También se ha reconocido que el uso de unidades SI en la mecánica significa más que aplicar factores de conversión. Como el sistema de unidades SI es absoluto basado en el tiempo, la longitud y la masa, mientras que el sistema inglés es un sistema gravitacional basado en el tiempo, la longitud y la fuerza, se requiere considerable esfuerzo para la solución de muchos problemas. Por ejemplo, cuando se usa las unidades SI, por lo general, un cuerpo se especifica en términos de su masa expresada en kilogramos, en la mayor parte de los problemas. Sin embargo, es necesario determinar el peso del cuerpo en newtons para los cuales se requiere un cálculo adicional. Por otro lado, cuando se aplican las unidades de uso común en Estados Unidos, el peso se especifica mediante su peso en libras. Sin embargo, se requerirá un cálculo adicional para determinar su masa en slugs ($\text{lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft}$). Por tanto, los autores creen que los problemas que se les asignen a los estudiantes deben incluir ambos sistemas de unidades.

En las secciones opcionales se tratan temas avanzados o especializados. En el libro se incluye un gran número de secciones o apartados identificados por un asterisco (*). En tanto se distinguen fácilmente de aquellos que constituyen la parte fundamental de un curso básico de estática, estas secciones pueden omitirse sin perjudicar la comprensión del resto del texto.

Entre los temas incluidos en las secciones adicionales se mencionan la reducción de un sistema de fuerzas a una línea de torsión, aplicaciones a hidrostática, diagramas de fuerza cortante y momento flexor, equilibrio de cables, productos de área y centro de masa, la determinación de los ejes principales y momentos de inercia de un cuerpo en forma arbitraria, el momento de inercia polar, las secciones sobre vigas son especialmente útiles cuando el curso de estática es seguido inmediatamente por un curso de mecánica de materiales, mientras que las partes que tratan acerca de las propiedades de momento de área por triángulos rectángulos, triángulos prismáticos prismáticos y triángulos rectángulos que después se aplican en el estudio de la estática, tratan acerca de cuerpos rígidos.

El sistema de escritura en el libro y la mayor parte de los problemas no requieren experiencia o conocimiento previo superior al álgebra, la trigonometría y el cálculo diferencial. Todos los conocimientos de álgebra elemental necesarios para comprender el texto se presentan con detalle en los capítulos 2 y 3. En general se proveen ejemplos de la comprensión adecuada de los conceptos tratados en los ejemplos incluidos que en la manipulación de fórmulas matemáticas. A respecto, se quiere mencionar que la determinación de los centroides de áreas son a menudo provechosos al cálculo de centroides por integración. En consecuencia, establecer firmemente el concepto elemental de un área antes de introducir el uso de integrales.

ORGANIZACIÓN DE LOS CAPÍTULOS Y CARACTERÍSTICAS PEDAGÓGICAS

Introducción del capítulo. Cada capítulo comienza con una introducción que establece el propósito y los objetivos del mismo y en donde se describe en términos sencillos el material que será cubierto y sus aplicaciones en la resolución de problemas de ingeniería. Los lineamientos del capítulo proporcionan a los estudiantes una visión previa de los tópicos que están por venir.

Lecciones en el capítulo. El cuerpo del texto está dividido en unidades, cada una de las cuales consiste en una o más secciones de teoría, uno o varios problemas resueltos, y una gran cantidad de problemas de tarea. Cada unidad corresponde a un tema bien definido que, por lo general, puede ser cubierto en una lección. Sin embargo, en ciertos casos puede ser necesario que se cubra de una o más de una lección a una tópica en particular.

Problemas resueltos. Los problemas resueltos se plantean de manera de simular la que usarán los estudiantes cuando resuelvan los problemas por su propia cuenta. Por lo tanto, estos problemas cumplen el doble propósito de apoyar el texto al mostrar la forma de resolver

es clara y obvia que los estudiantes deben cultivar en sus propias habilidades.

Resolución de problemas en forma independiente. En los problemas resueltos y los de tarea, para cada lección se incluye una sección titulada *Resolución de problemas en forma independiente*. El propósito de estas secciones es ayudar a los estudiantes a organizar mentalmente la lección, a ubicarla en el contexto de las técnicas de resolución de los problemas resueltos, de manera que puedan resolver con mayor éxito los problemas de tarea. Además, en estas secciones también se incluyen sugerencias y estrategias esperadas que les permitirán enfrentar con confianza cualquier problema que se les asigne.

Series de problemas de tarea. La mayoría de los problemas son de naturaleza práctica y deben llamar la atención del estudiante de ingeniería. Sin embargo, están diseñados para ilustrar el material presentado en el texto y para ayudar a los estudiantes a comprender los principios de la mecánica. Los problemas se han agrupado de acuerdo con las partes del material que ilustran y se presentan en orden de dificultad creciente. Los problemas que requieren atención especial están señalados con asteriscos. Al final de cada capítulo se proporcionan las respuestas correspondientes a 70 por ciento de los problemas propuestos y algunos para los demás. En la respuesta se indica el número del libro de texto al que se refiere el problema.

Repaso y resumen del capítulo. Cada capítulo finaliza con un repaso y un resumen del material cubierto en el mismo. Las notas al margen se utilizan para ayudar al estudiante a organizar su trabajo de revisión; además se han incluido referencias cruzadas para ayudarlos a encontrar las partes de material que requieren atención especial.

Problemas de repaso. Al final de cada capítulo se incluye un grupo de problemas de repaso. Estos problemas proporcionan a los estudiantes una oportunidad adicional de aplicar los conceptos más importantes presentados en el capítulo.

Problemas de computadora. Cada capítulo incluye un grupo de problemas diseñados para ser resueltos mediante programas de computadora. Muchos de estos problemas son importantes para el proceso de diseño. En estática, por ejemplo, pueden implicar el análisis de una estructura para diferentes configuraciones y cargas o la determinación de las posiciones de equilibrio de un mecanismo que puede operar en modo controlado o libre. El uso sistemático del computador necesario para resolver un problema de mecánica dado beneficiará a los estudiantes en dos formas diferentes: 1. les ayudará a lograr una mejor comprensión de los principios de la mecánica involucrados; 2. les proporcionará la oportunidad de aplicar sus habilidades con la computadora para encontrar la solución de un problema relevante de ingeniería.

MATERIALES DE APOYO

Esta obra cuenta con interesantes complementos que fortalecen los procesos de enseñanza-aprendizaje, así como la evaluación de éstos.

venientes que se dirigen a profesores que adoptan este texto como recurso. Para obtener más información y conocer la política de venta de estos materiales, contacte a su representante McGraw-Hill.

CONEXIÓN CON LA INGENIERÍA DE MCGRAW-HILL

La conexión de McGraw-Hill con la ingeniería (*McGraw-Hill Connect Engineering*) es una plataforma de tareas y evaluación que proporciona a los estudiantes los medios para conectarse de mejor manera con su curso, sus profesiones y los conceptos importantes que necesitan conocer para su éxito en la actualidad y en el futuro. Mediante la conexión con la ingeniería, los profesores pueden entregar con facilidad tareas, tests y exámenes en línea; los estudiantes pueden practicar habilidades importantes a su propio ritmo y de acuerdo con su propio programa.

La Conexión con la Ingeniería de *Mechanics vectorial para ingenieros* está disponible en www.mhhe.com/beerjohnten. Allí podrá encontrar recursos del texto, presentaciones en PowerPoint, imágenes, animaciones y mucho más.

OPCIONES DE LIBRO ELECTRÓNICO

Los libros electrónicos son una forma fascinante de compartir ideas con los estudiantes y al mismo tiempo crear un medio ambiente más verde. Un libro electrónico puede compartirse a los estudiantes cercano a cualquier costo de un libro de texto tradicional y ofrece características únicas como un poderoso dispositivo de búsqueda, texto resaltado y la capacidad de compartir notas con compañeros de clase que usen libros electrónicos.

McGraw-Hill ofrece dos opciones de libros electrónicos: la compra de un libro descargable de VitalSource o una suscripción al libro de CourseSmart. Para conocer más acerca de las opciones de libros electrónicos, contacte a su distribuidor de McGraw-Hill o visite los sitios en www.vitalsource.com y [www.coursemart.com](http://www.coursesmart.com).

AGRADECIMIENTOS

Los autores les son agradecidos de manera especial a Amy Macken y Williams Memorial Institute que verificó las soluciones y respuestas de todas las problemas de esta edición y después preparó las soluciones del *Manual para el instructor y de soluciones* adicional al texto; Yoonam A. Kwon de la University of Mississippi; David Ogilby de la University of Wisconsin-Rolls; y Daniel W. Yarnitzky de la Pennsylvania State University.

Es un placer reconocer el trabajo de Dennis Oronoff de la Florida Institute of Technology por las artísticas ilustraciones que contribuyen en gran medida a la efectividad del texto.

Los autores agradecen a las diferentes compañías que proporcionaron fotografías para esta edición. También les son agradecidos a la fuerza determinada y la paciencia de Susan Dowell, quien seleccionó las fotografías.

Un agradecimiento también a los miembros de la organización de McGraw-Hill por su apoyo y dedicación durante la preparación de

esta edición. En particular se agradecen los contribuciones a muchos capítulos de Bill Steinhilber, la editora de desarrollo Lora Stevens y la gerente de proyecto Sheila Frank.

Por último, los autores desean expresar su gratitud por los numerosos comentarios y sugerencias que han sido proporcionados por los usuarios de las ediciones anteriores de *Medicina vectorial para higiene*.

F. Russell Johnson Jr.

Edith F. Steinhilber

William Johnson

Lista de símbolos

γ	Constante, radio, distancia
R	Reacciones en apoyos – reacciones
P	Presión
A	Área
Δ	Ángulo, elevación
c	constante
\bar{c}	centroide
D	Distancia
	Base de logaritmos naturales
F	Fuerza, fuerza de fricción
g	Aceleración de la gravedad
G	Centro de gravedad; constante de gravitación
	Altura, flecha de un cable
i, j	Vectores unitarios a lo largo de los ejes coordenados
	Momentos de inercia
I	Momento de inercia centroidal
I_{xy}	Productos de inercia
	Momento polar de inercia
k	Constante de un resorte
r, k_y, k_z	Radio de giro
	Radio de giro centroidal
L	Longitud
l	Longitud, claro
	Masa
M	Momento par
M_x	Momento con respecto al punto x
M_y	Momento resultante con respecto al punto y
M_z	Momento resultante con respecto al punto z
m	masa
M_{Ox}	Momento con respecto al eje Ox
N	Componente normal de una reacción
O	Origen de coordenadas
p	Presión
F	Fuerza, vector
Q	Fuerza, vector
r	Vector de posición
	Radio, distancia, coordenada polar
R	Fuerza resultante, vector resultante, reacción

	balística en Tierra
\mathbf{r}	Vector de posición
s	Longitud de arco; longitud de un cable
\mathbf{F}	Fuerza; vector
δ	Espesor
F	Fuerza
T	Tensión
	Trabajo
\mathbf{F}	Punto vectorial: fuerzas constante
	Volumen; energía potencial: cortante
	Carga por unidad de longitud
\mathbf{W}	Peso
\mathbf{C}	Coordenadas rectangulares: distancias
	Coordenadas rectangulares: centro de gravedad
α	Ángulos
γ	Peso específico
ϵ	Elongación
$\Delta \mathbf{r}$	Desplazamiento virtual
δ	Trabajo virtual
\mathbf{A}	Vector: material a lo largo de una línea
θ	Eficiencia
ϕ	Coordenada angular: ángulo: coordenada polar
	Coeficiente de fricción
	Densidad
	Ángulo de fricción: ángulo

MECÁNICA VECTORIAL PARA INGENIEROS

Estática

Los principales fundamentos de la mecánica, los cuales constituyen la base de gran parte de la Ingeniería moderna

CAPÍTULO

1

Introducción



- ☐ Conceptos y principios fundamentales
- ☐ Sistemas de unidades
- ☐ Conversión de un sistema de unidades a otro
- ☐ Método para la solución de problemas
- ☐ Exactitud numérica

Los contenidos de esta asignatura se dividen en dos grandes bloques de contenidos: el primero de ellos se refiere a la mecánica de cuerpos deformables y la mecánica de fluidos. Los contenidos de este primer bloque se refieren a la mecánica de sólidos y la mecánica de fluidos. El segundo bloque de contenidos se refiere a la mecánica de cuerpos deformables y la mecánica de fluidos.

La tarea actual es una tarea de síntesis por lo que se debe comenzar a buscar y a catalogar algunas de las ideas que se han desarrollado en los últimos años, considerando un tema de investigación. A continuación se presenta una breve introducción a la tarea que es la base de la mayoría de las ciencias de la ingeniería, es una respuesta indispensable para estudiarlas. Sin embargo, una buena idea para el estudiante es proponerle algunas tareas de la ingeniería, a saber: *investigar, diseñar, construir, evaluar y comunicar*, para ser exigente la importancia de poner la comunicación dentro del proceso. Las actividades de investigación se hacen en el *trabajo* y por lo tanto en un mundo por el que se debe *aprender* y *comunicar* lo que se aprende y *comunicar* los fenómenos físicos y poner las bases para articularlos en ingeniería.

Aunque el estudio de la mecánica se remonta a los tiempos de Aristóteles (384-322 a.C.) y de Arquímedes (287-212 a.C.), se tuvo que esperar hasta Newton (1642-1727) para encontrar una formulación sistemática de sus principios mecánicos. Los siglos XVIII y XIX expresaron después el triunfo de los métodos puramente matemáticos de Lagrange y Hamilton. Se añadieron por último métodos numéricos hasta que, finalmente, surgió el estudio de la relatividad (1905-80). Si bien ahora se han reconocido las limitaciones de la mecánica newtoniana, ésta sigue en la base de las aplicaciones prácticas de la ingeniería.

El concepto de *espacio* se asocia con la noción de posición de un punto P . La posición de este punto P se puede localizar por las longitudes de los segmentos que lo unen con los puntos A y B de una línea recta dada. Estas longitudes se denominan como *coordenadas* de P .

El concepto de *masa* tiene la función de caracterizar y comparar los cuerpos en sus relaciones con otros cuerpos.

les. Por ejemplo, los cuerpos que se encuentran en reposo o en movimiento por la fuerza de igual forma se ven afectados por cambios instantáneos en su movimiento traslacional.

Una **fuerza** representa la acción de un cuerpo sobre otro y puede expresarse por contacto real o a distancia como en el caso de las fuerzas gravitacionales y magnéticas. Una fuerza se caracteriza por su **punto de aplicación**, **magnitud** y **dirección**, y se representa con un vector (sección 2.3).

En la mecánica newtoniana, espacio, tiempo y masa son conceptos absolutos, independientes entre sí, esto es, no dependen de los observadores. El tiempo transcurre de la misma manera en todos los casos de movimiento (independientemente de la velocidad). Por otra parte, el concepto de fuerza no es independiente de los otros tres. En realidad, todos los axiomas fundamentales de la mecánica newtoniana, que se enumeran más adelante, involucran la fuerza, es decir, que para saber si un cuerpo se ve afectado por la masa le sirve con la información de su velocidad en el tiempo.

Se asume aquí las condiciones de se posea un movimiento de partículas y cuerpos rígidos a partir de los cuatro principios básicos que se van exponiendo. Por **partícula** se entiende una porción infinitesimal de materia que se trata como punto espacio. Un **cuerpo rígido** es la idealización de un gran número de partículas que se supone poseen todas las mismas propiedades mecánicas de las partículas, pero que se ven afectadas por fuerzas externas diferentes. Aunque los resultados obtenidos van a depender a priori de las condiciones iniciales, los principios permiten probar la validez de las conclusiones de reposo o movimiento de cuerpos reales.

El estudio de la mecánica elemental de sistemas solo se basa en principios fundamentales basados en la evidencia experimental.

La ley de la adición de fuerzas para la adición de fuerzas Es la ley que dice que dos fuerzas que actúan sobre una partícula pueden ser sustituidas por una sola fuerza resultante o **resultante**, que se obtiene trazando el vector de la suma de ellas, es decir, como los lados iguales. Las fuerzas dadas (sección 2.2).

El principio de la independencia Es el hecho que las conclusiones de la ley de la suma de fuerzas para un cuerpo rígido por una o varias mantenidas al igual fuerzas que actúan en un punto del cuerpo rígido se sostienen por una fuerza de la misma magnitud y la misma dirección pero que actúa en un punto diferente, siempre que las dos fuerzas tengan la misma línea de acción (sección 3.3).

Las Leyes Fundamentales de Newton El físico británico Isaac Newton (1643-1726) estableció las leyes de la física y la mecánica que se conocen como las leyes fundamentales de Newton. Las leyes fundamentales de Newton se expresan como sigue:

PRIMERA LEY Si la fuerza resultante que actúa sobre una partícula es cero, la partícula permanece en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme (es decir, se mueve con velocidad constante) si originalmente estaba en movimiento. (sección 2.10)

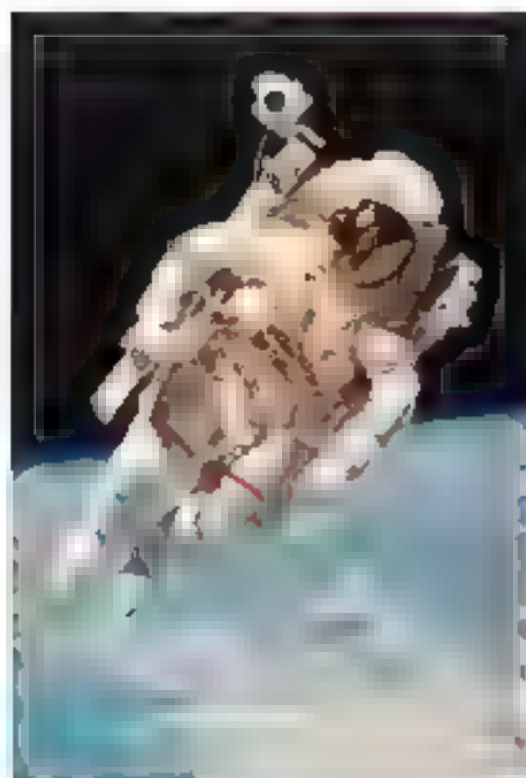
SEGUNDA LEY Si la fuerza resultante que actúa sobre una partícula no es cero, la aceleración de la partícula es directamente proporcional a la magnitud de la resultante y en la dirección de ésta.

Como se verá en la sección 12.2' esta ley puede expresarse así

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (1.1)$$



Figura 1.1



Fotografía 1.1 Cuando están en la obra, los artistas se dice que las personas y los objetos no tienen peso, aun cuando la fuerza gravitacional que actúa sobre ellos es aproximadamente $W = mg$, la que es aproximada en la superficie de la Tierra. Esta aparente contradicción se resolverá en el capítulo 12 cuando se aplica la segunda ley de Newton al movimiento de partículas.

donde F , m_A y m_B representan, respectivamente, la fuerza resultante que actúa sobre la partícula, la masa de esta y la aceleración de ella, todas expresadas en un sistema consistente de unidades.

TERCERA LEY. Las fuerzas de acción y reacción de cuerpos en contacto tienen la misma magnitud, la misma línea de acción y sentidos opuestos, según B.

La ley de gravitación de Newton establece que las partículas de masas M y m se atraen mutuamente con fuerzas iguales y opuestas F y $-F$ (figura 1.1), de magnitud F dada por la fórmula

$$F = G \frac{Mm}{r^2} \quad (1.2)$$

donde r es la distancia entre las dos partículas.

G es la constante universal llamada *constante de gravitación*.

La ley de gravitación de Newton introduce la idea de una acción ejercida a distancia y extiende el alcance de la tercera ley. La acción F y la reacción $-F$ en la figura 1.1 son iguales y opuestas y tienen la misma línea de acción.

Un caso de gran importancia es el de la atracción que la Tierra ejerce sobre una partícula situada en su superficie. La fuerza F ejercida por la Tierra sobre la partícula se denota como el peso W de la partícula. Tomando M igual a la masa de la Tierra, m igual a la masa de la partícula y r igual al radio R de la Tierra e introduciendo la constante

$$g = \frac{GM}{R^2} \quad (1.3)$$

la magnitud W del peso de una partícula de masa m puede expresarse como

$$W = mg \quad (1.4)$$

El valor de R en la fórmula (1.3) depende de la elevación del punto considerado; también depende de su latitud, puesto que la Tierra no es exactamente esférica. Así que el valor de g varía con la posición del punto en cuestión. Mientras el punto permanezca sobre la superficie de la Tierra, en la mayoría de los cálculos de ingeniería es suficiente suponer que g es igual a 9.81 m/s^2 o 32.2 ft/s^2 .

Los principios que se acaban de enunciar se irán exponiendo en el curso del estudio de la mecánica conforme sea necesario. El estudio de la estática de partículas se trata en el capítulo 2 y se basa sólo en la ley de paralelogramos para la adición y en la primera ley de Newton. El principio de conservación de la energía se trata en el capítulo 3. Se comenzará el estudio de la estática de cuerpos rígidos, y la tercera ley de Newton se expone en el capítulo 6, cuando se analizan las fuerzas ejercidas en los miembros de una estructura. La mecánica dinámica se establece formalmente al introducir la segunda ley de Newton y la ley de gravitación. Allí se introducirá en la primera ley de Newton un caso particular de la segunda ley, según el 2.2, en el que se demuestra que una vez conocida la posición de un sistema mecánico en un instante, su movimiento futuro puede determinarse a los fines de los principios y ecuaciones.

Una definición más precisa del peso W (del término W en la ecuación de la 1.4)



Figura 1.2

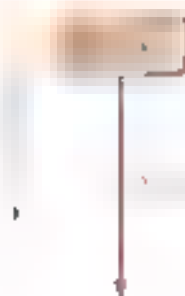


Figura 1.3

aceleración es 1 m/s^2 a una masa de 1 kg (Figura 1.2). A partir de la ecuación (1) se escribe:

$$1 \text{ N} = (1 \text{ kg})(1 \text{ m/s}^2) = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 \quad (1.5)$$

Se trata de las unidades del Sistema Internacional de unidades (SI) que, a su vez, que las tres unidades básicas se relacionan directamente con el lugar donde se miden esas magnitudes. El metro y el kilogramo se miden si pueden usar en cualquier lugar de la Tierra, esto es, donde exista el potencial de su definición como magnitud natural.

El peso de un cuerpo en la Tierra, la *gravitación*, puede siempre expresarse en newtons con cualquier otra fuerza. De la ecuación (1) se obtiene que el peso de un cuerpo de masa 1 kg es de 9.8 N :

$$\begin{aligned} W &= mg \\ &= (1 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2) \\ &= 9.8 \text{ N} \end{aligned}$$

Las unidades y símbolos de las unidades fundamentales SI se muestran con el uso de los prefijos que se definen en la Tabla 1. Las unidades y símbolos de las unidades de longitud, masa y fuerza de acuerdo con el SI se muestran respectivamente el *kilómetro*, *kilogramo* y *newton* (N) y *quilogramo*. $1 \text{ Mg} = 10^6 \text{ g}$ y el *kilonewton* (kN). De acuerdo con la tabla 1.1 se tiene:

$$\begin{aligned} 1 \text{ km} &= 1\,000 \text{ m} & 1 \text{ mm} &= 0.001 \text{ m} \\ 1 \text{ Mg} &= 1\,000 \text{ kg} & 1 \text{ g} &= 0.001 \text{ kg} \\ 1 \text{ kN} &= 1\,000 \text{ N} \end{aligned}$$

La conversión de estas unidades a otros kilogramos y newtons, respectivamente, puede realizarse cambiando el punto decimal tres lugares a la derecha o a la izquierda. Por ejemplo, para convertir 3.52 km en metros se recorre punto decimal tres lugares a la derecha:

$$3.52 \text{ km} = 3\,520 \text{ m}$$

En forma análoga, 47.2 mm se convierten en metros recortando el punto decimal tres lugares a la izquierda:

$$47.2 \text{ mm} = 0.0472 \text{ m}$$

Con el uso de la notación científica, se puede escribir:

$$\begin{aligned} 3.52 \text{ km} &= 3.52 \times 10^3 \text{ m} \\ 47.2 \text{ mm} &= 47.2 \times 10^{-3} \text{ m} \end{aligned}$$

Las unidades de la unidad de tiempo son el *minuto*, *hora* y *día*. Puesto que $1 \text{ min} = 60 \text{ s}$ y $1 \text{ hora} = 60 \text{ min} = 3\,600 \text{ s}$, estos tres minutos pueden convertirse fácilmente con los otros.

Con el uso del múltiplo o múltiplo abreviado de cierta unidad se puede evitar la escritura de números muy grandes o muy pequeños.

¹También conocida como longitud métrica.

Debe notarse que cuando se mide el volumen de un líquido, el decímetro cúbico (dm^3) se conoce en forma usual como un *litro* (l).

Por la tabla 1.2 se ven algunas unidades derivadas del SI, que se usan para medir el momento de un cuerpo, el trabajo de una fuerza, etc. Aunque estas unidades se derivan a partir de algunas unidades básicas, se acostumbra escribir una unidad derivada como si cuando se obtiene una unidad derivada, es la división de una unidad básica entre otra unidad básica, debe usarse un prefijo en el numerador de la unidad derivada pero no en el denominador. Por ejemplo, la constante k de un resorte que se elonga 20 mm bajo una carga de 100 N se expresará como

$$k = \frac{100 \text{ N}}{20 \text{ mm}} = \frac{100 \text{ N}}{0.020 \text{ m}} = 5\,000 \text{ N/m} \quad \text{o} \quad k = 5 \text{ kN/m}$$

pero nunca como $k = 5 \text{ N/mm}$.

Unidades de uso común en Estados Unidos. La mayoría de los geólogos norteamericanos todavía utilizan sistemas de unidades que las unidades básicas son las unidades de longitud, fuerza, tiempo. Estas unidades son respectivamente: pie (ft), libra (lb) y minuto (min). Las siguientes unidades correspondientes a unidades del SI se pueden escribir como 0.3048 m. La libra se define como el peso de un patrón de platino llamado *libra estándar* esta es el NIST (National Institute

Tabla 1.2. Principales unidades del SI usadas en ingeniería

Cantidad	Unidad	Símbolo	Fórmula
Velocidad	Metro por segundo al cuadrado		m/s^2
Ángulo	Radian	rad	1
Aceleración angular	Radian por segundo al cuadrado		rad/s^2
Velocidad angular	Radian por segundo		rad/s
Área	Metro cuadrado	m^2	m^2
Densidad	Kilogramo por metro cúbico		kg/m^3
Energía	Joule	J	$\text{N} \cdot \text{m}$
Fuerza	Newton	N	$\text{kg} \cdot \text{m/s}^2$
Frecuencia	Hertz	Hz	s^{-1}
Impulso	Newton-segundo		$\text{kg} \cdot \text{m/s}$
Longitud	Metro	m	
Masa	Kilogramo	kg	
Momento de una fuerza	Newton-metro	$\text{N} \cdot \text{m}$	$\text{N} \cdot \text{m}$
Potencia	Watt	W	J/s
Presión	Pascal	Pa	N/m^2
Esfuerzo	Pascal	Pa	N/m^2
Tiempo	Segundo	s	1
Velocidad	Metro por segundo	m/s	m/s
Volumen			
Sólidos	Metro cúbico		m^3
Líquidos	Litro	l	cm^3
Trabajo	Joule	J	$\text{N} \cdot \text{m}$

¹Unidad suplementaria: 1 revolución = $2\pi \text{ rad} = 360^\circ$

²Unidad básica

el Standard and Technology en las afueras de Washington y esta es de 0.45359237 kg . Como el peso depende de la posición de la atracción gravitatoria, la fuerza de atracción que el estándar se ejerce sobre la Tierra y el estándar debe estar localizado en la Tierra y a una altura de 35 pies sobre el mar. Por lo tanto, una fuerza de una libra. Es claro que las unidades de este sistema de unidades y unidades de un sistema de unidades absoluto. Por su dependencia de la atracción gravitatoria de la Tierra, este sistema de unidades se denomina *gravimétrico*.

Aunque en la física se utiliza se utiliza también como unidad de fuerza y para algunos sistemas de unidades en Estados Unidos se pueden usar se usan unidades de ingeniería. Lo que a priori se puede pensar en las unidades de ingeniería las que se apartan del sistema. De hecho, cuando una fuerza de 1 lb actúa sobre la libra estándar es decir, cuando esta sujeta a la gravedad terrestre, la aceleración de la gravedad es 32.2 ft/s^2 . La figura 1.4 ilustra esta unidad de aceleración que se relaciona según la ecuación (1.1) con unidades de masa en sistema inglés por la libra y el símbolo es la masa que resulta de la aceleración de 32.2 ft/s^2 al aplicársele una fuerza de 1 lb (figura 1.5). Esta unidad, algunas veces llamada *slug*, puede derivarse de la ecuación $F = ma$ después de sustituir 1 lb y 32.2 ft/s^2 para F y a respectivamente. Se escribe $1 \text{ slug} = 32.2 \text{ lb}$.

$$F = ma \quad 1 \text{ lb} = 1 \text{ slug}(32.2 \text{ ft/s}^2)$$

y se obtiene

$$1 \text{ slug} = \frac{1 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2} = 1 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft} \quad (1.6)$$

Comparando las figuras 1.4 y 1.5 se concluye que *slug* es una masa 32.2 veces mayor que la masa de la libra estándar.

El hecho de que en un sistema de unidades en Estados Unidos los cuerpos se caractericen por su peso en libras en lugar de por su masa en *slugs*, será ventajoso en el estudio de la estática, en donde se tratará en forma continua con pesos u otras fuerzas, y sólo en ocasiones con masas. Sin embargo, en el estudio de la dinámica, donde intervienen fuerzas, masas y aceleraciones, la masa m de un cuerpo se expresará en *slugs* cuando el peso W se da en libras. De acuerdo a la ecuación (1.4) se escribe

$$m = \frac{W}{g} \quad (1.7)$$

donde g es la aceleración de la gravedad ($g = 32.2 \text{ ft/s}^2$).

Otras unidades de uso común en Estados Unidos que se presentan como la *tonelada* en problemas de ingeniería son la *tonella* que es igual a $5,780 \text{ lb}$ la *tonelada corta* que es igual a $2,000 \text{ lb}$ y la *tonelada larga* que es igual a una fuerza de $1,000 \text{ lb}$. La *tonelada* se usa con frecuencia para representar una masa de $2,000 \text{ lb}$ pero si se quiere una libra de masa se vertirá a *slugs* en los cálculos de ingeniería.

La conversión de pesos libras y segundos de unidades expresadas en otras unidades de uso común en Estados Unidos, en forma general resulta complicada y requiere mayor atención que la operación correspondiente en las unidades del SI. Por ejemplo, si se da la magnitud de

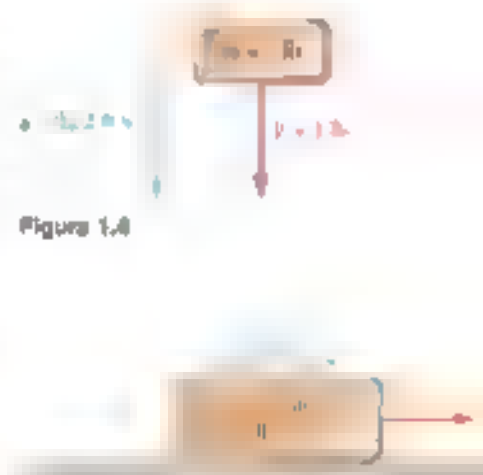


Figura 1.4



Figura 1.5

*En este caso se alude a la tonelada corta, ya que la tonelada larga equivale a 2,240 lb.

una velocidad $v = 44 \text{ m/s}$ se convierte en ft/s de la siguiente manera. Primero se escribe

$$v = 44 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Puesto que se necesitan más unidades en los segundos que en el lado derecho de la ecuación por una expresión que mantenga millas en el denominador y pies en el numerador. Pero, como no se tiene el valor del tiempo, se hace la expresión plana de la tener un valor igual a uno, el cociente $(5280 \text{ ft})/(1 \text{ mi})$ es una operación de este tipo. Haciendo una operación semejante para transformar la unidad hora en segundos, se escribe

$$v = 44 \left(\frac{1 \text{ mi}}{5280 \text{ ft}} \right) \left(\frac{5280 \text{ ft}}{1 \text{ mi}} \right) \left(\frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} \right)$$

Realizando los cálculos que cancela los unidades y aparecen (tanto en el numerador como en el denominador) se obtiene

$$v = 44 \frac{\text{ft}}{\text{s}} = 44 \text{ ft/s}$$

1.4 CONVERSION DE UN SISTEMA DE UNIDADES A OTRO

Existen muchas situaciones en las que un ingeniero necesita convertir en unidades de SI un resultado numérico obtenido en unidades no SI, como en Estados Unidos o viceversa. Como la unidad de tiempo es la misma en ambos sistemas, sólo se necesita convertir las unidades métricas básicas y puesto que todas las unidades métricas pueden derivarse de estas unidades básicas, sólo se requiere recordar dos factores de conversión:

Unidades de longitud: Por definición, la unidad de longitud de uso común en Estados Unidos es

$$1 \text{ ft} = 0.3048 \text{ m} \quad (1.8)$$

De aquí se tiene que

$$1 \text{ m} = 3.280 \text{ ft} = 3.280(0.3048 \text{ m}) = 1.093 \text{ m}$$

o bien

$$1 \text{ m} = 1.093 \text{ km} \quad (1.9)$$

También

$$1 \text{ m} = \frac{1}{3.280} \text{ ft} = \frac{1}{3.280}(0.3048 \text{ m}) = 0.0254 \text{ m}$$

o sea

$$1 \text{ m} = 25.4 \text{ mm} \quad (1.10)$$

Unidades de fuerza: Recordando que la unidad de fuerza de uso común en Estados Unidos, la libra, se define como el peso de una libra estándar (de masa 0.4536 kg) al nivel del mar y a una latitud de 45° , donde $g = 9.807 \text{ m/s}^2$ y usando la ecuación (1.4), se escribe

$$W = mg$$

$$1 \text{ lb} = (0.4536 \text{ kg})(9.807 \text{ m/s}^2) = 4.448 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$$

o, recordando la ecuación (1.5),

$$1 \text{ lb} = 4.448 \text{ N} \quad (1.11)$$

Unidades de masa. La unidad de masa de uso común en Estados Unidos (el *slug*) es una unidad derivada. Así, con el uso de las ecuaciones (1.6), (1.8) y (1.11), se puede escribir

$$1 \text{ slug} = 1 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft} = \frac{1 \text{ lb}}{1 \text{ ft/s}^2} = \frac{4.448 \text{ N}}{9.3045 \text{ m/s}^2} = 4.50 \text{ N} \cdot \text{s}^2/\text{m}$$

y por medio de la ecuación (1.5),

$$1 \text{ slug} = 1 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft} = 14.59 \text{ kg} \quad (1.12)$$

Aunque se puede usar como unidad consistente de masa, recordando que la masa de la libra estándar es, por definición,

$$1 \text{ libra masa} = 0.4536 \text{ kg} \quad (1.13)$$

Estas unidades se pueden usar para determinar la masa en unidades del SI (kilogramos) de un cuerpo que esté caracterizado por su peso en unidades de uso común en Estados Unidos (libras).

Para convertir una unidad derivada de uso común en Estados Unidos a unidades del SI simplemente se altera o se cancela por los factores de conversión apropiados. Por ejemplo, para convertir la magnitud del momento de una fuerza que está expresada como $M = 47 \text{ lb} \cdot \text{m}$, en unidades del SI, se usan las fórmulas (1.10) y (1.11) y se escribe

$$\begin{aligned} M = 47 \text{ lb} \cdot \text{m} &= 47(4.448 \text{ N})(25.4 \text{ m}) \\ &= 5310 \text{ N} \cdot \text{m} \approx 531 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

Los factores de conversión dados en esta sección se pueden usar también para convertir y resolver problemas de las unidades del SI a unidades de uso común en Estados Unidos. Por ejemplo, si una fuerza de 40 N se expresa en unidades de $M = 40 \text{ N} \cdot \text{m}$, el momento de la fuerza en unidades del m^2/s^2 que aparece en la sección 1.3, se escribe

$$M = 40 \text{ N} \cdot \text{m} = 40 \text{ N} \cdot \text{m} \left(\frac{1 \text{ lb}}{4.448 \text{ N}} \right) \left(\frac{1 \text{ ft}}{0.3048 \text{ m}} \right)$$

Al cancelar los factores de conversión y cancelar las unidades por igual en el factor en el numerador como en el denominador, se obtiene

$$M = 29.5 \text{ lb} \cdot \text{ft}$$

Las unidades de uso común en Estados Unidos que se emplean con mayor frecuencia en la mecánica, y sus equivalentes en las unidades del SI, se enlistan en la tabla 1.3.

1.5 MÉTODO PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Un problema puede resolverse de manera adecuada si se plantean los problemas a una disciplina. Si se toma como base la experiencia de la mecánica propia, se usará el método formal de el problema. Si se desea más, se puede resolver el problema de manera más simple para sus condiciones particulares. La solución de los problemas de la mecánica se puede resolver de la siguiente manera:

www.geocienciasvirtuales.blogspot.com.co

Tabla 1.3. Unidades de uso común en Estados Unidos y sus equivalencias en unidades de SI

Cantidad	Unidad de uso común en EE. UU.	Equivalencia de SI
Aceleración	in/s^2	0.0254 m/s^2
	ft/s^2	0.3048 m/s^2
Área	in^2	$6.452 \times 10^{-4} \text{ m}^2$
	ft^2	0.0929 m^2
Energía	$\text{ft} \cdot \text{lb}$	1.356 J
Fuerza	kip	4.448 kN
	lb	4.448 N
Impulso	$\text{oz} \cdot \text{s}$	$0.278 \text{ N} \cdot \text{s}$
	$\text{lb} \cdot \text{s}$	$4.448 \text{ N} \cdot \text{s}$
Longitud	ft	0.3048 m
	in	25.40 mm
	mi	1.609 km
	yd	0.9144 m
Masa	oz masa	28.35 g
	lb masa	0.4536 kg
	ton	2.045 kN
	$\text{short ton (tonelada corta)}$	907 kg
Momento de una fuerza	$\text{ft} \cdot \text{lb}$	$1.356 \text{ N} \cdot \text{m}$
	$\text{ft} \cdot \text{kip}$	$0.138 \text{ kN} \cdot \text{m}$
Momento de inercia de un área	in^4	$0.4162 \times 10^{-6} \text{ mm}^4$
	ft^4	$1.356 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
Momento de inercia de una masa	$\text{lb} \cdot \text{ft}^2$	$1.356 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
	$\text{ft}^2 \cdot \text{s}^2$	$1.356 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
Potencia	hp	746 W
	$\text{ft} \cdot \text{lb/s}$	1.356 W
Presión o esfuerzo	lb/ft^2	47.88 Pa
	lb/in^2 (psi)	6.895 kPa
Velocidad	ft/s	0.3048 m/s
	in/s	0.0254 m/s
	mi/h	0.447 m/s
	mi/h (mph)	1.609 km/h
Volumen	ft^3	0.02832 m^3
	in^3	16.39 cm^3
Líquidos	gal	3.785 L
	qt	0.9463 L
Peso	lb	4.448 N

en los textos más de mil ejemplos de estos. Cada uno debe estar justificado con estos pasos. Debe seguirse reglas al intentar solucionar un problema de mecánica casi automática, sin dejar lugar para la intuición o "sentido común" particular. Después de obtener una respuesta, esta debe justificarse. Así, el ingeniero se puede afianzar el sentido común y la experiencia al personal y, a veces, al estudiante que se enfrenta ante un problema de mecánica. El ingeniero debe entender la física involucrada en la solución de un problema, utilizando para su solución y la exactitud de los cálculos.

El planteamiento de un problema debe ser claro y preciso y contiene los datos necesarios, así como reglas y condiciones que se requieren. Debe ser exacto, directo y claro, por lo que todas las condiciones involucradas, así como un diagrama para cada uno de los cuerpos que participan, por mencionar, formar parte de la descripción actual sobre ellos. A estos le llaman *esquemas de cuerpo libre* o *diagramas de cuerpo libre* y se describirán en detalle en las secciones 2.11 y 4.2.

Los principios fundamentales de la mecánica que se enlistan en la sección 1.3, *principios de la mecánica*, son los que se describen a lo largo

distintos de repeticiones o nuevas mediciones de los cuerpos con volúmenes. Cada resultado debe estar acompañado de una cifra significativa los dígitos más de cinco dígitos. Después se procederá a resolver el problema de ser necesario formar parte de las reglas básicas de los registros manuscritos de los diferentes pasos dados.

Después de haber obtenido la respuesta, ésta debe compararse con todo cuidado. Con frecuencia se pueden detectar errores cuando simultáneamente se realiza la verificación de las unidades. Por ejemplo, para determinar la magnitud de momento de una fuerza de 50 N sobre un punto a 0.60 m de su línea de acción, se escribiría, sección 3.12

$$M = Fd = (50 \text{ N})(0.60 \text{ m}) = 30 \text{ N} \cdot \text{m}$$

La unidad N · m que se obtiene al multiplicar newtons por metros es la unidad correcta para el momento. Si la fuerza se hubiera dado en alguna otra unidad, se sabría que se cometió un error.

Los errores de cálculo pueden ser evitados al sustituir los valores numéricos y unidades en la ecuación y verificar si la respuesta es correcta. No es posible exagerar la importancia de los cálculos correctos en ingeniería.

1.8. EXACTITUD NUMÉRICA

La exactitud en la solución de un problema depende de dos factores: la exactitud de los datos proporcionados y la de los cálculos efectuados.

La solución no puede ser más exacta que el menos exacto de estos dos factores. Por ejemplo, si se sabe que la magnitud de momento es de 100 lb · m, es posible errar de 100% al expresar una que mide el grado de precisión del dato es

$$\frac{100 \text{ lb}}{75(100 \text{ lb})} = 0.0013 = 0.13 \text{ por ciento}$$

Entonces, al calcular la solución, uno de los segundos al que no tendría sentido anotarla como 14.122 lb. La exactitud de la solución no puede ser mayor de 0.13 por ciento, sin importar con qué exactitud se manejen los cálculos y el error posible en la respuesta puede ser tan grande como 0.13(14.122 lb) = 2 lb. La respuesta debería escribirse como 14.120 ± 2 lb.

En los problemas de ingeniería los datos rara vez se conocen con un error menor de 0.2 por ciento, por lo que casi nunca se justifica escribir las respuestas a dichos problemas con una exactitud mayor de 0.2 por ciento. Un error práctico es calcular el resultado y registrar únicamente los cuatro dígitos. Los tres dígitos finales son cifras dudosas. A menudo, por ser una cifra extra, los se omiten, lo que resulta en un problema de redondeo. Como los datos con un grado de exactitud de 0.2 por ciento, por ejemplo, una fuerza de 40 lb se anotaría como 40 lb y una fuerza de 15 lb se debería leer 15.0 lb.

Los ingenieros y estudiantes de ingeniería comúnmente usan los decimales fraccionarios de los cálculos. La exactitud de los valores de estas fracciones es variable y no se conocen de los problemas. Sin embargo, los estudiantes se deben registrar los resultados de las que se omite el sustituir solo por que estas se pueden obtener al final. Como se mencionó con anterioridad, la exactitud de un valor que 0.2 por ciento rara vez se necesita significativamente en la solución de problemas prácticos de ingeniería.

MUCHOS PROBLEMAS DE INGENIERÍA SON
COMPLICADOS AL TENER EN CUENTA EL EQUILIBRIO
DE UNA "PERSONA", EN EL CASO DE COM-
PROCESORES, QUE SE COLA EN UN LUGAR,
HAUCE OTENERSE UNA RELACION ENTRE LAS
VIBRACIONES DE LOS DIFERENTES CABLES
EMPLÉADOS, AL CONSIDERAR EL EQUILIBRIO DEL
SISTEMA CON EL QUE SE UNEN LOS CABLES.



CAPÍTULO

2

Estática de partículas

- 2. Introducción
 - Fuerza sobre una partícula
 - Resultante de dos fuerzas
- 2. Vectores
 - Adición o suma de vectores
 - Resultante de varias fuerzas concurrentes
- 3. Descomposición de una fuerza en sus componentes
 - Componentes rectangulares de una fuerza. Vectores unitarios
- 4. Adición de fuerzas sumando sus componentes X y Y
 - Equilibrio de una partícula
- 5. Primera ley del movimiento de Newton
 - Problemas relacionados con el equilibrio de una partícula
 - Diagramas de cuerpo libre
- 7. Componentes rectangulares de una fuerza en el espacio
 - Fuerza definida en términos de su magnitud y dos puntos sobre su línea de acción
- 8. Adición de fuerzas concurrentes en el espacio
 - Equilibrio de una partícula en el espacio

2.1. INTRODUCCION

En este capítulo se estudiará el efecto de las fuerzas que actúan sobre las partículas. Primero se aprenderá a sumar dos o más fuerzas que actúan sobre una partícula por una sola fuerza que tenga el mismo efecto que ellas. Esta fuerza se denomina **suma o resultante** de las fuerzas dadas que actúan sobre la partícula. Después se aprenderá la relación que existe entre las pequeñas fuerzas que actúan sobre una partícula en un estado de **equilibrio** y se usarán para hallar las resultantes de las fuerzas que actúan sobre una partícula.

El uso de la palabra "partícula" no significa que este capítulo se trate solamente de los temas que se dan a conocer que forman parte de la forma de los cuerpos y cómo se relacionan en la solución de los problemas tratados en este capítulo y en todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo dado se supondrán aplicadas en un solo punto. Pero se podrá usar también si se quiere y con las aplicaciones prácticas se podrá resolver un buen número de problemas de ingeniería.

La primera parte de este capítulo está dedicada al estudio de las fuerzas de líneas en el espacio y la segunda al análisis de las fuerzas en el espacio tridimensional.

FUERZAS EN UN PLANO

2.2. FUERZA SOBRE UNA PARTÍCULA. RESULTANTE DE DOS FUERZAS

Una fuerza es un **vector** que se define por su **magnitud** o **módulo** y **dirección**. Por su **punto de aplicación** o **origen** o **momento** y **dirección**. Las fuerzas sobre una partícula se representan por un **aplicador**. Por tanto, cada fuerza considerada en este capítulo estará completamente definida por su magnitud o módulo y dirección.

La fuerza o módulo de una fuerza se define por el efecto que produce en un cuerpo. Con un solo **vector** se representan las magnitudes. Si usamos por los segundos para medir la magnitud de una fuerza como **newton** N y su múltiplo **kiloneutron** kN igual a $1000 N$ o como **libras** por las unidades del sistema de unidades en Estados Unidos y antes empleadas son el **newton** o **newton** lb y su múltiplo la **kilolibra** kip igual a $1000 lb$. La dirección de una fuerza se define por la **línea de acción** y **sentido** de la fuerza. La **línea de acción** es la línea recta que pasa a lo largo de la cual actúa la fuerza y se define por el **ángulo** que forma con algún eje lfo (figura 2.1).



Figura 2.1

La fuerza en sí se representa por un segmento de línea. Este segmento se llama *propiedad* cuando se extiende a lo largo de este segmento para representar la magnitud de la fuerza. El punto de inicio y el sentido de la fuerza debe indicarse por una punta de flecha. Una definición de una fuerza es importante indicar su sentido. Dos fuerzas como las mostradas en las figuras 2.1a y b, pueden tener la misma magnitud y la misma línea de acción pero diferente sentido, empujando en direcciones opuestas sobre una partícula.

La siguiente experiencia ilustra indirectamente las fuerzas P y Q que actúan sobre una partícula A (figura 2.2a) pueden sustituirse por una sola fuerza R que produce el mismo efecto sobre la partícula (figura 2.2c). A esta fuerza se le llama *resultante* de las fuerzas P y Q y puede obtenerse como se muestra en la figura 2.2b construyendo un paralelogramo con P y Q como lados. La diagonal que pasa por A representa la resultante. Este experimento con la ley del paralelogramo, una combinación de las fuerzas y su línea de acción en la experimentación, no puede probarse ni derivarse de manera matemática.

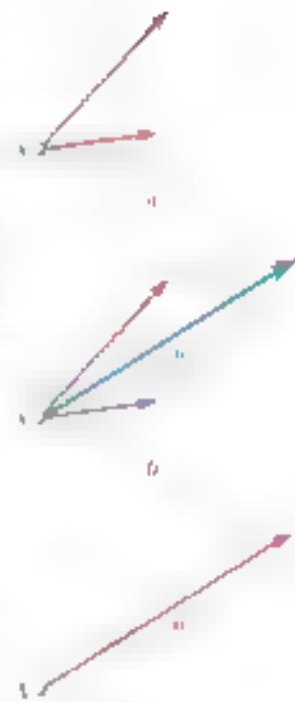


Figura 2.2

2.3. VECTORES

Las aplicaciones de las fuerzas no obedecen en las reglas de la adición vectorial en la aritmética. Si el ángulo entre dos fuerzas es un ángulo recto, las fuerzas que actúan formando un ángulo recto, una de 4 lb y otra de 3 lb suman una fuerza de 5 lb y no una de 7 lb. Las fuerzas no son los números enteros y no siguen la ley del paralelogramo para la adición. Como se verá más adelante, los *desplazamientos* y *velocidades* obedecen las mismas reglas matemáticas que las fuerzas. Estas cantidades físicas que pueden ser representadas por vectores se llaman *vectores*. Las cantidades físicas que no pueden ser representadas por vectores se llaman *escalares*. El ángulo se mide en grados o en radianes.

Los vectores se definen como *expresiones matemáticas que poseen magnitud, dirección y sentido*. Los cuales se suman de acuerdo a la ley del paralelogramo. Los vectores se representan por flechas en las ilustraciones y se distinguen de las cantidades escalares en este sentido. Las reglas \mathbf{P} y \mathbf{Q} se le llama *sentido* o *manera*. El vector puede caracterizarse dibujando una pequeña flecha arriba de la letra usada para representar la magnitud. La ley del triángulo también es preferible porque el subrayado también puede usarse como símbolo de escalar o computacional. La magnitud de un vector determina la longitud de la flecha en expresiones. En este libro se usarán letras cursivas para representar la magnitud de un vector. Así, la magnitud del vector \mathbf{P} se representa como P .

Un vector con el que se representa una fuerza que actúa sobre una partícula, un punto de aplicación bien definido sobre la partícula misma. A tal vector se le llama *vector fijo o ligado*, y no puede cambiarse su posición sin cambiar las condiciones del problema. Sin embargo, otras cantidades físicas que no son fuerzas, como la velocidad, pueden ser representadas por vectores y pueden moverse libremente en el espacio. A estos vectores se les conoce como *libres*. Existen otras cantidades físicas como las *energías* sobre las que no se aplica la ley del



Figura 2.4



Figura 2.5

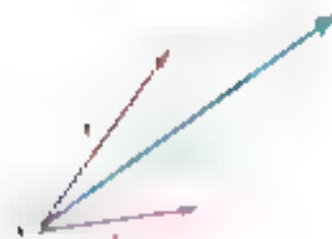


Figura 2.6

los 3 que están representados por vectores que puntúan en una dirección y la longitud del segmento de recta que los une se los conoce como **vectores de cantidades**.

Los vectores de la misma magnitud, dirección y sentido se dicen que son **iguales** cuando $\vec{P} = \vec{Q}$ y $\vec{Q} = \vec{P}$. La aplicación (Figura 2.4) los vectores iguales pueden representarse por la misma letra.

El **vector negativo** de un vector \vec{P} se define como aquel que tiene la misma magnitud que \vec{P} y la misma dirección que \vec{P} pero en la dirección opuesta. El vector \vec{P} se representa por $-\vec{P}$ y los vectores \vec{P} y $-\vec{P}$ se les llama **vectores iguales y opuestos**. Se tiene:

$$\vec{P} + (-\vec{P}) = 0$$

2.4. ADICION O SUMA DE VECTORES

En la sección anterior se vio que por definición los vectores se suman haciendo como a los de paralelogramo. Así la suma de dos vectores \vec{P} y \vec{Q} se obtiene uniendo los dos vectores en mismo punto A y construyendo los paralelogramos con \vec{P} y \vec{Q} como lados a $\vec{P} + \vec{Q}$ (Figura 2.6). La magnitud que se obtiene por A con suma es la suma vectorial de \vec{P} y \vec{Q} y se representa por $\vec{P} + \vec{Q}$. Es importante que el signo y se use para representar tanto la suma vectorial como la resta no debe causar ninguna confusión y las notaciones obtenidas se conocen como **suma de vectores con sentido**. De esta manera se debe indicar no la magnitud de los vectores $\vec{P} + \vec{Q}$ ni los vectores \vec{P} y \vec{Q} de las magnitudes de los vectores \vec{P} y \vec{Q} .

Puesto que el paralelogramo construido con los vectores \vec{P} y \vec{Q} no depende de cómo $\vec{P} + \vec{Q}$ se selecciona se concluye que la adición de los vectores \vec{P} y \vec{Q} es **comutativa** se sabe:

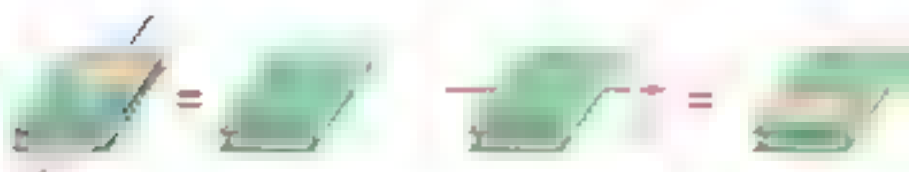
$$\vec{P} + \vec{Q} = \vec{Q} + \vec{P}$$

2.1.

A partir de la ley del paralelogramo se puede obtener otra notación para determinar la suma de los vectores \vec{P} y \vec{Q} como se muestra

* Algunos experimentos tienen magnitud y dirección pero no se miden de acuerdo con la ley del paralelogramo. Aunque tales expresiones se pueden representar por medio de flechas, no se pueden considerar vectores.

Un grupo de experimentos de este tipo son las rotaciones físicas de un cuerpo rígido (después un libro cerrado rodeado de agua) sobre una mesa de madera que se experimenta en la forma habitual con la puntita hacia arriba y el libro hacia la izquierda. Ahora este libro está con respecto a un eje paralelo al libro (Figura 2.3a) esta rotación puede ser representada por una flecha orientada como se muestra en la figura, cuya longitud es igual a 140 unidades. Tomando el libro tal y como se encuentra en su primera posición, sólo lo



2.

Figura 2.3 Rotaciones físicas de un cuerpo rígido

www.geocienciasvirtuales.blogspot.com.co

resulta del triángulo se obtiene $x + y$ si se consideran los triángulos donde la suma de los vectores P y Q ha sido determinada por la ley del paralelogramo. Puesto que el hecho del paralelogramo que resta a Q es que a Q es el punto A y lo mismo se puede decir que solo a partir del paralelogramo (figura 2.7a). De esta manera, la suma de los dos vectores puede encontrarse al sumar P y Q de punta a cola y teniendo la cola de P con la punta de Q (figura 2.7a) se suman sin la ley del paralelogramo y se obtiene $x + y$ sin el triángulo. Este confirma el hecho de que la suma vectorial es conmutativa.

La resta de un vector se define como la adición del vector negativo correspondiente. De hecho, el vector $P - Q$ representa la diferencia de los vectores P y Q si obtenemos alguna resta P o vector negativo $-Q$ (figura 2.8). Se escribe:

$$P - Q = P + (-Q) \quad (2.2)$$

Aquí se debe observar otra vez que aunque se usa el o mismo signo para representar tanto la suma como vectorial como la resta, se utiliza un símbolo $+$ o $-$ que cambia en el signo a otras cantidades vectoriales y escalares.

Ahora se considerará la suma de tres o más vectores. La suma de tres vectores P , Q y S se obtendrá por definición, sumando primero los vectores P y Q y agregando el vector S al vector $P + Q$. De esta manera, por:

$$P + Q + S = (P + Q) + S \quad (2.3)$$

El tercer sumando S se suma al cuarto, etc. y se obtiene agregando el quinto vector a la suma de los tres primeros. Por consiguiente, la suma de cualquier número de vectores se puede obtener agregando en forma repetida, a lo largo del paralelogramo, a tres o más vectores hasta que todos los vectores sean sustituidos por uno solo.

Como 180° alrededor de un eje horizontal perpendicular al plano (figura 2.9a) es una rotación puede ser representada por medio de una flecha cuya longitud es igual a 180 unidades, orientada como se muestra en la figura. Sin embargo, el plano puede haberse rotado en esta posición final aplicando una sola rotación de 180° con respecto a un eje vertical (figura 2.9a). Se concluye que la suma de las dos rotaciones de 180° representadas por flechas iguales, respectivamente, a lo largo de los ejes x y y , es una rotación de 180° representada por una flecha dirigida a lo largo del eje y (figura 2.9a). Los ejes x y y son ejes de un par de ejes que no obedecen a la ley del paralelogramo para la adición; por tanto, estos no pueden ser representados por medio de vectores.

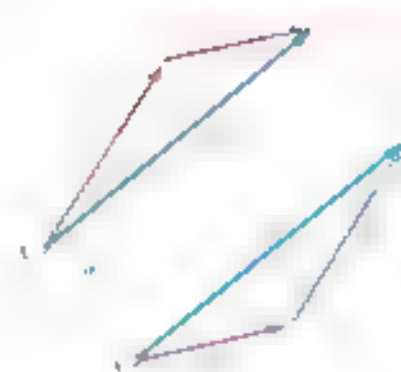


Figura 2.7

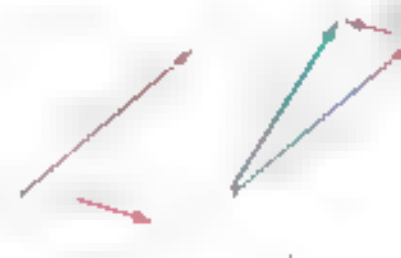


Figura 2.8



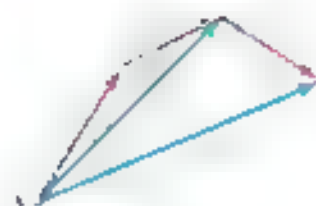


Figura 2.9

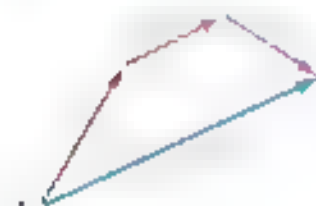


Figura 2.10

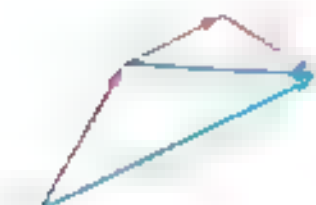


Figura 2.11

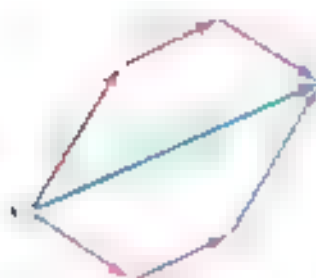


Figura 2.12



Figura 2.13

Si los vectores dados son **coplanares**, es decir si están contenidos en un mismo plano, su suma puede obtenerse directamente a partir de la regla del triángulo. En este caso, se prefiere la aplicación repetida de la regla del triángulo en vez de la ley del paralelogramo. En la figura 2.9 la suma de los tres vectores P , Q y S se obtiene de esta forma. La regla del triángulo se aplica primero para obtener la suma $P + Q$ de los vectores P y Q , y obteniendo así un nuevo vector. La suma de los vectores P , Q y S se obtiene de la misma manera con el vector $P + Q$ para haberse obtenido; obteniéndose directamente la suma de los tres vectores, como se muestra en la figura 2.10, **descomponiendo los vectores en la forma de cada una de las partes en el triángulo** del primer vector en la parte del otro. En la siguiente suma se aplica la ley del paralelogramo para la suma de los vectores.

Se observa que el resultado obtenido permanecerá sin cambiar, como se muestra en la figura 2.11; los vectores Q y S se intercambian reemplazando por la suma de $Q + S$. Entonces se puede escribir

$$P + Q + S = P + (Q + S) = P + Q + S \quad (2.4)$$

Esta expresión expresa el hecho de que la adición de vectores es asociativa. Es importante recordar que ya se demostró que la suma de los tres vectores P , Q y S es la misma, como se puede ver por la expresión

$$P + Q + S = P + (Q + S) = S + (P + Q) \quad (2.5)$$

Esta expresión, junto con otras que pueden obtenerse en la misma forma, muestra que el orden en que se suman varios vectores no importa (figura 2.12).

Producto de un escalar y un vector Como es conveniente representar la suma $P + P$ como $2P$ o la suma $P + P + P$ como $3P$, y en general a la suma de n vectores P iguales como el vector nP , se define el producto nP de un entero positivo n y un vector P como el vector nP que tiene la misma dirección que P y su magnitud es n veces la de P . Al ampliar esta definición para incluir a todos los escalares y al recordarnos la definición de (ii) vector negativo dada en la sección 2.1 se tiene el producto kP de un escalar k y un vector P como el vector kP que tiene la misma dirección que P si k es positivo, la misma dirección que P si k es negativo, y su magnitud es igual al producto de P y el valor absoluto de k . (Figura 2.13)

2.5. RESULTANTE DE VARIAS FUERZAS CONCURRENTES

Consideremos una partícula A sujeta a varias fuerzas coplanares, es decir a varias fuerzas concurrentes en el mismo plano (figura 2.14). Consideremos las fuerzas $F_1, F_2, F_3, \dots, F_n$ que actúan sobre A y sean $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ los vectores que representan las fuerzas que actúan sobre A pueden ser colocados en el triángulo (figura 2.14). Entonces, el vector R que representa la resultante de las fuerzas concurrentes que intervienen es decir la fuerza que produce el mismo efecto sobre la partícula A que las fuerzas dadas. Como se ve,

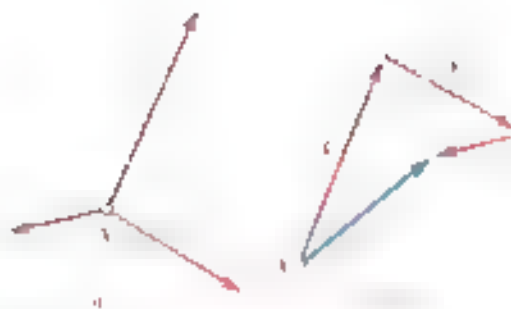


Figura 2.14

Después de mover el origen en el punto A , las fuerzas P , Q y S que representan las fuerzas sobre la partícula.

2.6. DESCOMPOSICIÓN DE UNA FUERZA EN SUS COMPONENTES

Se ha visto que dos o más fuerzas \mathbf{F} que actúan sobre una partícula pueden ser substituídas por una sola fuerza que produce el mismo efecto sobre la partícula. De la misma manera, una sola fuerza \mathbf{F} que actúa sobre una partícula puede ser substituída por dos o más fuerzas que producen el mismo efecto sobre la partícula. A estas fuerzas se les llama *componentes* de la fuerza original \mathbf{F} y el proceso de sustitución de \mathbf{F} se le llama *descomposición* de la fuerza \mathbf{F} en sus *componentes*.

En este sentido, para cada fuerza \mathbf{F} existe un número infinito de conjuntos de componentes. Los conjuntos de dos componentes P y Q son los más importantes en cuanto a aplicaciones prácticas se refieren. En este caso, el número de formas en las que una fuerza \mathbf{F} puede descomponerse en sus componentes es infinito (Figura 2.15). Dos casos son de especial interés:

1. Una de las dos componentes, P , se conoce. La segunda componente, Q , se obtiene aplicando la regla del triángulo a la suma de la punta de P a la punta de \mathbf{F} (Figura 2.16). La magnitud y el sentido de Q se determinan gráficamente o por trigonometría. Una vez que Q se ha determinado, ambas componentes P y Q deben aplicarse en A .
2. Se conoce la línea de acción de cada una de las componentes. La magnitud y el sentido de las componentes se obtiene al aplicar la regla del triángulo a la suma de las puntas de la punta de \mathbf{F} a las puntas de las líneas de acción dadas (Figura 2.17). De esta forma se obtienen dos componentes bien definidas P y Q que pueden determinarse gráficamente o por trigonometría aplicando a ellas los senos.

Puede encontrarse muchos otros casos, por ejemplo, cuando la línea de acción de una de las componentes se conoce y se busca que la magnitud de la otra sea lo más pequeña posible (véase problema resuelto 2.2). En todos los casos se utiliza el triángulo como paralogismo, un cuadrado que satisfaga las condiciones.

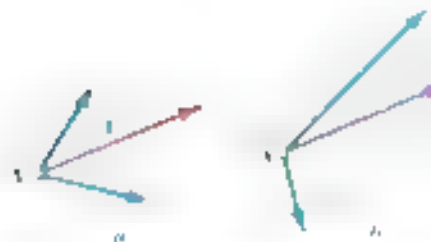


Figura 2.15

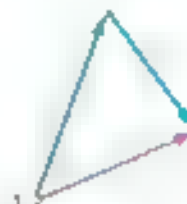


Figura 2.16



Figura 2.17



PROBLEMA RESUELTO 2.1

Las dos fuerzas **P** y **Q** actúan sobre el punto **A**. Determine su resultante.

SOLUCIÓN

Solución gráfica. Dibuje a escala un paralelogramo con lados iguales a **P** y **Q**. La diagonal que sale de vértice de la resultante se obtiene y se mide. En que seno

$$P = 35 \text{ N} \quad \alpha = 25^\circ \quad R = \dots \quad \blacktriangleleft$$

También puede usarse la regla del triángulo. Las fuerzas **P** y **Q** se dibujan de punta a cola y se obtiene una triangulo y la tercera es la resultante por medición directa.

$$P = 35 \text{ N} \quad \alpha = 25^\circ \quad R = \dots \quad \blacktriangleleft$$

Solución trigonométrica. Se usa otra vez la regla del triángulo; los tres lados y el ángulo se conocen y se busca el ángulo. Se aplica la ley de los cosenos

$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ \cos B$$

$$R^2 = (35 \text{ N})^2 + (60 \text{ N})^2 - 2(35 \text{ N})(60 \text{ N}) \cos 155^\circ$$

$$R = 97.73 \text{ N}$$

Ahora con la aplicación de la ley de los senos, se escribe

$$\frac{\sin A}{Q} = \frac{\sin B}{R} \quad \frac{\sin A}{60 \text{ N}} = \frac{\sin 155^\circ}{97.73 \text{ N}} \quad 13$$

Al resolver la ecuación (1) para el seno de **A**, se tiene

$$\sin A = \frac{60 \text{ N} \sin 155^\circ}{97.73 \text{ N}}$$

Con la calculadora se obtiene primero el cociente, luego el arco seno y el resultado es

$$A = 30.4^\circ \quad \alpha = 25^\circ \quad \beta = 55.04^\circ$$

Se obtiene tres ángulos iguales para verificar el resultado y se muestra el **Fig. 2.1**.

$$B = \dots \quad \blacktriangleleft$$

Solución trigonométrica. Se muestra el triángulo de fuerzas **BCD** y se escribe

$$CD = (60 \text{ N}) \sin 25^\circ = 25.36 \text{ N}$$

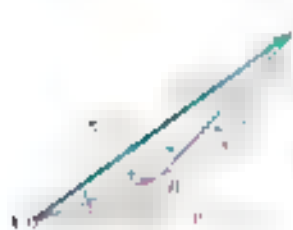
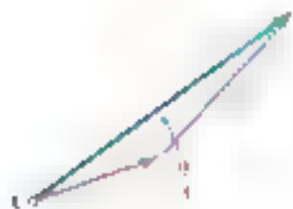
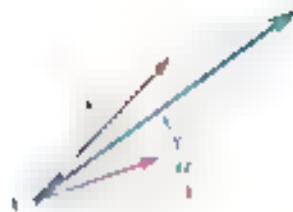
$$BD = (60 \text{ N}) \cos 25^\circ = 54.38 \text{ N}$$

Al usar entonces el triángulo **ACD**, se obtiene

$$\tan A = \frac{25.36 \text{ N}}{54.38 \text{ N}} \quad A = 25.04^\circ$$

$$R = \frac{54.38 \text{ N}}{\sin A} \quad R = 97.73 \text{ N}$$

$$\alpha = 30.4^\circ + A = 35.04^\circ \quad R = 97.73 \text{ N} \angle 35.04^\circ \quad \blacktriangleleft$$



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

Las secciones de términos estuvieron dedicadas a la ley del paralelogramo para la adición de vectores y a sus aplicaciones.

Se presentaban dos problemas resueltos. En el problema resuelto 2 se usó la ley del paralelogramo para determinar la resultante de dos fuerzas de magnitud 40 N y 30 N formando un ángulo de 60° . En el problema resuelto 2.2 la ley se usó para descomponer una fuerza dada en dos componentes de dirección conocida.

Aun se pone a la resolución de problemas en forma independiente. Mientras se va avanzando en el tema se van agregando a los ejercicios los vectores y los triángulos que tienen en común todos los problemas resueltos y los problemas propuestos. La correspondencia a esta sección es que se pueden resolver con la aplicación directa de la ley del paralelogramo.

La solución de un problema propuesto debe basarse en los siguientes pasos:

1. Dibujar un triángulo de fuerzas con los datos del problema.
2. Escribir las ecuaciones de equilibrio en forma vectorial o en forma escalar. Las fuerzas están etiquetadas como F . Por ejemplo, en el problema resuelto 2.1 se tendría:

$$R = P + Q$$

Es deseable tener presente esta ecuación al momento de escribir la siguiente parte de la solución:

Para encontrar el módulo de la resultante R se usa la ley del coseno. Las fuerzas opuestas están en el mismo lado del triángulo, por lo tanto $\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$. Se puede usar la ley de los senos que dice que en un triángulo con las fuerzas opuestas del triángulo con el ángulo de 120° entre las fuerzas P y Q se tiene $\frac{R}{\sin 120^\circ} = \frac{P}{\sin 30^\circ} = \frac{Q}{\sin 30^\circ}$. Se puede usar la ley de los senos que dice que en un triángulo con las fuerzas opuestas del triángulo con el ángulo de 120° entre las fuerzas P y Q se tiene $\frac{R}{\sin 120^\circ} = \frac{P}{\sin 30^\circ} = \frac{Q}{\sin 30^\circ}$.

Se puede usar la ley de los senos que dice que en un triángulo con las fuerzas opuestas del triángulo con el ángulo de 120° entre las fuerzas P y Q se tiene $\frac{R}{\sin 120^\circ} = \frac{P}{\sin 30^\circ} = \frac{Q}{\sin 30^\circ}$. Se puede usar la ley de los senos que dice que en un triángulo con las fuerzas opuestas del triángulo con el ángulo de 120° entre las fuerzas P y Q se tiene $\frac{R}{\sin 120^\circ} = \frac{P}{\sin 30^\circ} = \frac{Q}{\sin 30^\circ}$. Se puede usar la ley de los senos que dice que en un triángulo con las fuerzas opuestas del triángulo con el ángulo de 120° entre las fuerzas P y Q se tiene $\frac{R}{\sin 120^\circ} = \frac{P}{\sin 30^\circ} = \frac{Q}{\sin 30^\circ}$.

Se puede usar la ley de los senos que dice que en un triángulo con las fuerzas opuestas del triángulo con el ángulo de 120° entre las fuerzas P y Q se tiene $\frac{R}{\sin 120^\circ} = \frac{P}{\sin 30^\circ} = \frac{Q}{\sin 30^\circ}$. Se puede usar la ley de los senos que dice que en un triángulo con las fuerzas opuestas del triángulo con el ángulo de 120° entre las fuerzas P y Q se tiene $\frac{R}{\sin 120^\circ} = \frac{P}{\sin 30^\circ} = \frac{Q}{\sin 30^\circ}$.

Problemas

2.1 Dos fuerzas P y Q se aplican en el punto A del gancho que se muestra en la figura. Si se sabe que $P = 75 \text{ N}$ y $Q = 125 \text{ N}$, determine en forma gráfica la magnitud y la dirección de su resultante mediante la ley del paralelogramo, b) la regla del triángulo.

2.2 Dos fuerzas P y Q se aplican en el punto A del gancho que se muestra en la figura. Si se sabe que $P = 60 \text{ lb}$ y $Q = 50 \text{ lb}$, determine gráficamente la magnitud y la dirección de su resultante mediante la ley del paralelogramo, b) la regla del triángulo.

2.3 Los tirantes de cable AB y AD ayudan a sostener al poste AC . Si se sabe que la tensión es de 120 lb en AB y 40 lb en AD , determine gráficamente la magnitud y la dirección de la resultante de las fuerzas ejercidas por los tirantes en A mediante la ley del paralelogramo, b) la regla del triángulo.



Figura P2.3

2.4 Se aplican dos fuerzas en el punto B de la viga AB que se muestra en la figura. Determine gráficamente la magnitud y la dirección de su resultante mediante a) la ley del paralelogramo, b) la regla del triángulo.



Figura P2.1 y P2.2



Figura P2.4

2.5 La fuerza de 400 lb se debe descomponer en componentes a lo largo de las líneas ac y bc de la estructura que se muestra en la figura. Si se sabe que la componente a lo largo de ac es de 240 lb , b) ¿Cuál es el valor correspondiente de la componente a lo largo de bc ?



Figura P2.5 y P2.6

2.6 La fuerza de 300 lb se debe descomponer en componentes a lo largo de las líneas ac y bc . Determine por el método del triángulo si se sabe que la componente a lo largo de bc es de 120 lb , b) ¿Cuál es el valor correspondiente de la componente a lo largo de ac ?

2.7 Se aplican dos fuerzas en el gancho de apoyo que se muestra en la figura. Si se sabe que la magnitud de la P es 15 N , determine gráficamente la magnitud y la dirección de la resultante R . La fuerza Q aplicada en el gancho debe ser horizontal, y b) la magnitud correspondiente de R .



Figura P2.7

*Las respuestas para todos los problemas cuyo número está en tipo romano (como 2.1) se proporcionan al final del libro. Las respuestas para los problemas cuyo número está en tipo arábico (como 2.2) están en paréntesis.

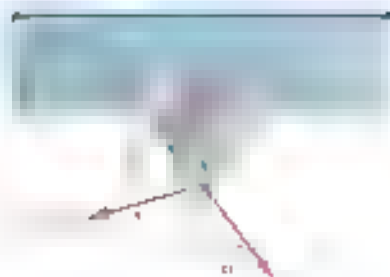


Figura P2.9 y P2.10

2.8 Para el gancho del problema 2.1 se sabe que la magnitud de P es 75 N que uno de los triángulos en la figura es equilateral. a) la fuerza Q si la resultante R de las dos fuerzas aplicadas en A debe ser vertical. b) la magnitud correspondiente de R .

2.9 Un carrito que se mueve a lo largo de una viga horizontal está sometido a dos fuerzas como se muestra en la figura. Si se sabe que $Q = 20\text{ N}$ determine por trigonometría la magnitud de la fuerza P tal que la fuerza resultante sea una fuerza vertical. a) la magnitud correspondiente de la resultante?

2.10 Un carrito que se mueve a lo largo de una viga horizontal está sometido a dos fuerzas como se muestra en la figura. Determine por trigonometría la magnitud de la fuerza P tal que la resultante sea una fuerza vertical de $2\ 700\text{ N}$.

2.11 Un tanque de acero es colocado dentro de una excavación. Si se sabe que $\alpha = 20^\circ$ determine por trigonometría a) la magnitud correspondiente de la fuerza P si la resultante R de las dos fuerzas aplicadas en A debe ser vertical. b) la magnitud correspondiente de R .

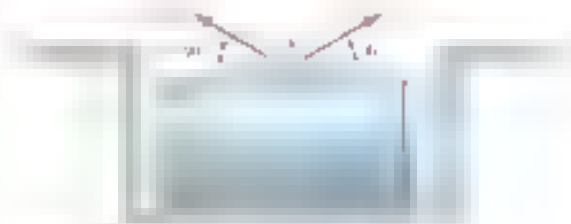


Figura P2.11 y P2.12

2.12 Un tanque de acero es colocado dentro de una excavación. Si se sabe que $\alpha = 20^\circ$ determine por trigonometría a) la magnitud correspondiente de la fuerza P si la resultante R de las dos fuerzas aplicadas en A debe ser vertical. b) la magnitud correspondiente de R .

2.13 Para el gancho del problema 2.7 determine por trigonometría a) la magnitud correspondiente de la fuerza P si la resultante R de las dos fuerzas aplicadas en A debe ser horizontal. b) la magnitud correspondiente de R .

2.14 Para el tanque de acero del problema 2.11 determine por trigonometría a) la magnitud correspondiente de la fuerza P si la resultante R de las dos fuerzas aplicadas en A debe ser horizontal. b) la magnitud correspondiente de R .

2.15 Resuelva el problema 2.2 mediante trigonometría.

2.16 Resuelva el problema 2.3 mediante trigonometría.

2.17 Resuelva el problema 2.4 mediante trigonometría.

2.18 Dos elementos estructurales A y B están remachados al apoyo que se muestra en la figura. Si se sabe que ambos elementos están en compresión y que la fuerza P aplicada en A es de 12 kN y en el elemento B es de 10 kN , determine por trigonometría la magnitud y la dirección de la resultante de las fuerzas aplicadas al apoyo por los elementos A y B.

2.19 Los elementos estructurales A y B están remachados al apoyo que se muestra en la figura. Si se sabe que ambos elementos están en compresión y que la fuerza en el elemento A es de 10 kN y en el elemento B es de 15 kN , determine por trigonometría la magnitud y la dirección de la resultante de las fuerzas aplicadas al apoyo por los elementos A y B.

2.20 Para el gancho del problema 2.7, determine por trigonometría la magnitud y la dirección de la resultante de las dos fuerzas aplicadas en el gancho, si se sabe que $P = 75\text{ N}$ y $\alpha = 30^\circ$.

2.7 Componentes rectangulares de una fuerza.



Figure P2.18 y P2.19

2.7 COMPONENTES RECTANGULARES DE UNA FUERZA. VECTORES UNITARIOS

En muchos problemas será conveniente descomponer una fuerza en sus dos componentes perpendiculares mutuamente. En la figura 2.18 la fuerza P se ha dividido en dos: un componente de $P \cos \alpha$ en la dirección x y un componente de $P \sin \alpha$ en la dirección y . El triángulo formado por P y sus componentes P_x y P_y se llama *combinación rectangular*.

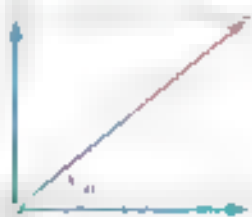


Figura 2.18



Figura 2.19

Los ejes x y y suelen orientarse a lo largo de las direcciones horizontales y verticales respectivamente, como se muestra en la figura 2.18. Sin embargo, pueden seleccionarse cualesquiera otras dos direcciones mutuamente perpendiculares como ejes, a fin de determinar las componentes rectangulares de una fuerza de soporte, que actúa en una dirección arbitraria. Las fórmulas 2.18 y 2.19 son válidas para cualquier x y y en 90° de perpendicularidad a ellas. Este método ayudará a evitar errores al determinar las componentes de una fuerza, como se vio en la sección 2.6.

* Las propiedades establecidas en las secciones 2.7 y 2.8 se pueden extender fácilmente



Figura 2.20

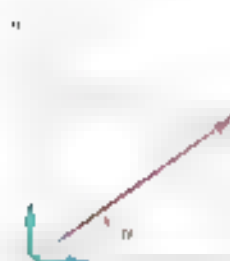


Figura 2.21

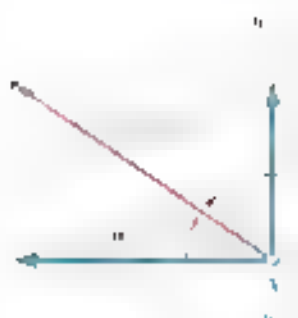


Figura 2.22

El escalar F se atribuirá a los vectores de magnitud unitaria \hat{i} y \hat{j} en lugar de los ejes positivos x y y . A estos vectores se les llama **vectores unitarios** y se representan por \hat{i} y \hat{j} , respectivamente (Figura 2.20). A veces la notación \hat{i} y \hat{j} se reemplaza por \hat{x} y \hat{y} . El vector dado en la sección 2.4, se observa que las componentes rectangulares $F_x = F \cos \theta$ y $F_y = F \sin \theta$ pueden obtenerse en la multiplicación de sus respectivos vectores unitarios \hat{i} y \hat{j} por escalares apropiados (Figura 2.21). Se escribe

$$F_x = F \hat{i} \quad F_y = F \hat{j} \quad (2.6)$$

$$\mathbf{F} = F \hat{i} + F \hat{j} \quad (2.7)$$

Mostramos que los escalares F_x y F_y pueden ser positivos o negativos dependiendo de la sentido de \mathbf{F} y F_y sus valores absolutos son respectivamente iguales a magnitudes de las componentes de las fuerzas F_x y F_y . Las escalares F_x y F_y se llaman **componentes escalares** de la fuerza \mathbf{F} porque las componentes reales de la fuerza F_x y F_y son las **componentes x** y **y** de \mathbf{F} . Sin embargo, cuando F_x es negativo, F_x es el **valor absoluto** de F_x y F_y es el **valor absoluto** de F_y . Se muestra que la componente escalar F_x es positiva cuando la componente vectorial F_x tiene el mismo sentido que el vector unitario \hat{i} (es decir, el mismo sentido que el eje x positivo) y es negativa cuando F_x tiene el sentido opuesto. Lo mismo se aplica a la componente escalar F_y cuando el signo de la componente escalar F_y .

Si se representa con F la magnitud de la fuerza \mathbf{F} y con θ el ángulo entre \mathbf{F} y el eje x positivo, se obtiene la siguiente ecuación (Figura 2.22a). Las magnitudes de F_x y F_y en el eje x positivo (Figura 2.22b) se pueden expresar las componentes escalares de \mathbf{F} como sigue:

$$F_x = F \cos \theta \quad F_y = F \sin \theta \quad (2.8)$$

Se observa que las ecuaciones obtenidas se satisfacen para cualquier valor de θ entre 0° y 360° y que estas definen tanto los signos como los valores absolutos de las componentes escalares F_x y F_y .

Ejemplo 1 Una fuerza de 800 N se ejerce sobre un punto A como se muestra en la figura 2.22a. Determinarse las componentes horizontal y vertical de esta fuerza.

Para obtener el signo correcto de las componentes escalares F_x y F_y el valor $160^\circ - 35^\circ = 145^\circ$ debe sustituirse por θ en las ecuaciones (2.8). Sin embargo, es más práctico determinar por inspección los signos de F_x y F_y (Figura 2.22b) y usar las funciones trigonométricas del ángulo $\alpha = 35^\circ$. En consecuencia se puede escribir

$$F_x = -F \cos \alpha = -(800 \text{ N}) \cos 35^\circ = -655 \text{ N}$$

$$F_y = +F \sin \alpha = +(800 \text{ N}) \sin 35^\circ = +459 \text{ N}$$

Las componentes vectoriales de \mathbf{F} son entonces

$$\mathbf{F}_x = -655 \text{ N} \hat{i} \quad \mathbf{F}_y = +459 \text{ N} \hat{j}$$

y \mathbf{F} se puede escribir en la forma

$$\mathbf{F} = -655 \text{ N} \hat{i} + 459 \text{ N} \hat{j}$$

Ejemplo 2. La fuerza \mathbf{F} en la figura 2.23a se aplica a un edificio. ¿Cuál es la fuerza de 300 N como se muestra en la figura 2.23a. ¿Cuáles son las componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida por la cuerda en el punto A?

A partir de la figura 2.23b se ve que

$$F_x = +(300 \text{ N}) \cos \alpha \quad F_y = -(300 \text{ N}) \sin \alpha$$

Observando por $\sin \alpha = 3/5$ a partir de la figura 2.23b se puede decir que

$$\sin \alpha = \frac{6 \text{ m}}{10 \text{ m}} = \frac{3}{5} \quad \cos \alpha = \frac{8 \text{ m}}{10 \text{ m}} = \frac{4}{5}$$

Entonces se obtiene

$$F_x = +(300 \text{ N}) \left(\frac{4}{5} \right) = +240 \text{ N} \quad F_y = -(300 \text{ N}) \left(\frac{3}{5} \right) = -180 \text{ N}$$

o sea que

$$\mathbf{F} = (240 \text{ N})\mathbf{i} - (180 \text{ N})\mathbf{j}$$

Si una fuerza \mathbf{F} se define por sus componentes rectangulares F_x y F_y como en la figura 2.24, el ángulo θ que define su dirección puede obtenerse escribiendo

$$\tan \theta = \frac{F_y}{F_x} \quad (2.9)$$

El valor del θ se obtiene a partir de la ecuación (2.9) usando la función Pitágoras y es como sigue:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad (2.10)$$

Obtén como el par \mathbf{F} en las componentes de las ecuaciones (2.9).

Ejemplo 3. Una fuerza $\mathbf{F} = (700 \text{ lb})\mathbf{i} + (1,500 \text{ lb})\mathbf{j}$ se aplica a un perno A. Determine el ángulo θ de la fuerza con respecto al eje horizontal.

Primero se dibuja un diagrama que muestra las dos componentes rectangulares y la fuerza y el ángulo θ como en la figura 2.24. A partir de la ecuación (2.9) se escribe

$$\tan \theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{1,500 \text{ lb}}{700 \text{ lb}}$$

Con la calculadora,⁸ se hace la división de 1,500 lb entre 700 lb, se calcula el arco tangente de este cociente y se obtiene $\theta = 65.0^\circ$. Al resolver la segunda de las ecuaciones (2.8) para F se tiene

$$F = \frac{F_y}{\sin \theta} = \frac{1,500 \text{ lb}}{\sin 65.0^\circ} = 1,655 \text{ lb}$$

El mismo cálculo se facilita si el valor de F_x se almacena en la memoria de la calculadora y se divide por $\cos \theta$ para obtener el valor de F .

Algunas de las calculadoras científicas y algunas de las de los computadores tienen funciones trigonométricas y de funciones trigonométricas inversas. Algunas calculadoras también tienen la capacidad de almacenar y recuperar los valores de las funciones polares y decimales. Este tipo de calculadoras eliminan la necesidad de calcular funciones

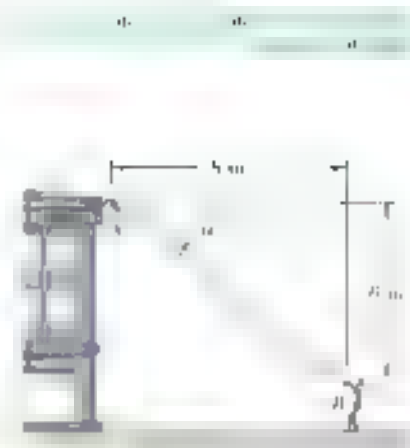


Figura 2.23

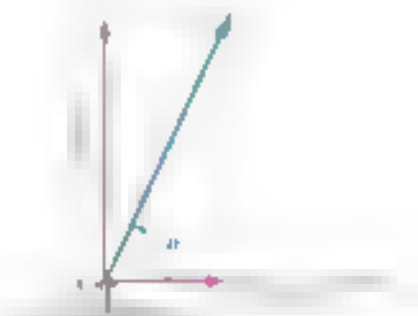


Figura 2.24

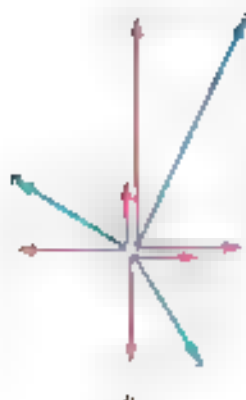


Figura 2.26

2.6. ADICIÓN DE FUERZAS SUMANDO SUS COMPONENTES X Y Y

En la sección 2.2 se estableció que las fuerzas de cuerpo pueden sumarse en un plano xy con la ley del paralelogramo. A partir de esta ley se derivaron en las secciones 2.3 y 2.5 otros dos métodos más directos y fáciles de usar: la *regla del triángulo* de los polígonos y la *regla del polígono*. En esta parte del capítulo se examina los métodos de suma de fuerzas por la adición de las componentes. También se ve que el triángulo de fuerzas puede usarse para obtener la resultante de dos fuerzas podría usarse para obtener la solución *trigonométrica*.

Cuando se van a sumar tres o más fuerzas, no puede obtenerse una solución trigonométrica práctica del polígono de fuerzas como se hizo con la fuerza resultante de dos fuerzas. Así mismo, no puede obtenerse una solución *trigonométrica* del problema si se descomponen las fuerzas en sus componentes rectangulares. Considere, por ejemplo, las tres fuerzas P , Q y S que se muestran en la figura 2.26a. Su resultante R está relacionada por la relación

$$\mathbf{R} = \mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{S} \quad (2.1)$$

Si se descomponen las fuerzas en sus componentes rectangulares, se escribe

$$\begin{aligned} R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j} &= P_x \mathbf{i} + P_y \mathbf{j} + Q_x \mathbf{i} + Q_y \mathbf{j} + S_x \mathbf{i} + S_y \mathbf{j} \\ &= (P_x + Q_x + S_x) \mathbf{i} + (P_y + Q_y + S_y) \mathbf{j} \end{aligned}$$

de donde se tiene que

$$R_x = P_x + Q_x + S_x \quad R_y = P_y + Q_y + S_y \quad (2.2)$$

o, en forma breve,

$$R_x = \Sigma F_x \quad R_y = \Sigma F_y \quad (2.3)$$

Por tanto se puede concluir que *la componente x (o y) de R es igual a la suma de las componentes x (o y) de las fuerzas P , Q y S que actúan sobre un partícula en el plano xy separando de ellas sus componentes x (o y) correspondientes escalares de las fuerzas dadas.*¹

En la práctica, la determinación de la resultante R se realiza en tres etapas como se muestra en la figura 2.27. En primer lugar, las fuerzas dadas en la figura 2.26a se descomponen en sus componentes x y y (figura 2.27b). Por la suma de esas componentes x y y de R (figura 2.27c). Finalmente, la resultante $R = R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j}$ se determina mediante la ley del paralelogramo (figura 2.27d). El procedimiento que se describe se realiza en tres etapas y los cálculos se muestran. Aunque se usan otros métodos para determinar la solución de dos o más fuerzas con la técnica mostrada, que puede ser una solución trigonométrica en el caso de la suma de dos fuerzas.

¹Esta relación se puede aplicar también a la adición de otras cantidades vectoriales, como las velocidades y las aceleraciones.



PROBLEMA RESUELTO 2.3

Cuatro fuerzas actúan sobre un punto A como se muestra en la figura. Determine la resultante de las fuerzas sobre el punto.

SOLUCION

Las componentes x y y de cada fuerza se determinan por trigonometría como se muestra a la izquierda. Se muestran la tabla 1 de la sección 2.1 y la tabla 2 de la sección 2.2. En la sección 2.1 se define un número escalar que representa la componente x de una fuerza y se define un número escalar que representa la componente y de una fuerza. En la sección 2.2 se define un número escalar que representa la componente x de una fuerza y se define un número escalar que representa la componente y de una fuerza.

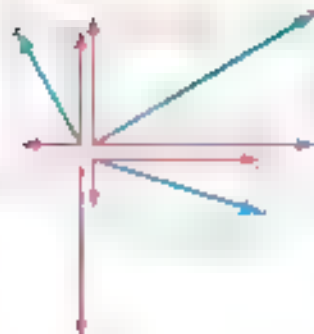


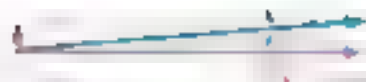
Fig. 2.3

Fuerza	Magnitud, N	Componente x , N	Componente y , N
F_1	50	42.3	25.0
F_2	50	35.4	35.4
F_3	40	40.0	0.0
F_4	40	0.0	-40.0
		$\Sigma F_x = 117.7$	$\Sigma F_y = 20.4$

En estas condiciones la resultante R de las cuatro fuerzas es

$$R = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$$

La magnitud y la dirección de la resultante se puede determinar de la siguiente manera:



$$\tan \theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{20.4 \text{ N}}{117.7 \text{ N}} = 0.173$$

$$R = \frac{117.7 \text{ N}}{\cos \theta} = 118.6 \text{ N} \quad \theta = 8.5^\circ \text{ N de E}$$

El último cálculo puede facilitarse con el uso de calculadora, si el valor de θ se determina de la siguiente manera: $\theta = \arctan(0.173) = 8.5^\circ$. La magnitud de la resultante se puede determinar de la siguiente manera: $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{117.7^2 + 20.4^2} = 118.6 \text{ N}$.

Problemas

2.21 y 2.22 Determine las componentes x y y de cada una de las fuerzas que se muestran en las figuras.



Figura P2.21

2.23 y 2.24 Determine las componentes x y y de cada una de las fuerzas que se muestran en las figuras.

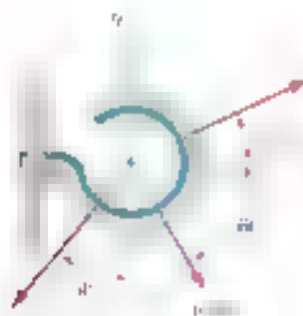


Figura P2.23

2.25 El punto A de la estructura ABCD es el punto $A(1, 2, 3)$ y la fuerza P la es $P(4, 5, 6)$. Se sabe que P tiene una componente horizontal de 300 lb. determine a) la magnitud de la fuerza P y b) su componente vertical.

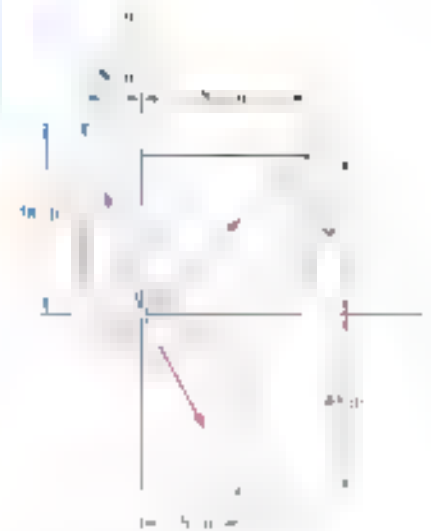


Figura P2.22

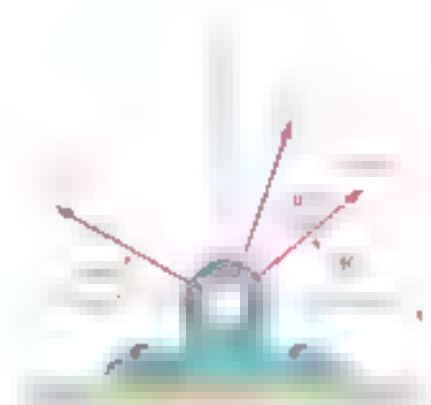


Figura P2.24



Figura P2.25



Figura P2.27 y P2.28



Figura P2.29



Figura P2.35



Figura P2.26

2.26 El cilindro hidráulico BD ejerce una fuerza P sobre el elemento ABC . La fuerza está dirigida a lo largo de la línea BD . Si se sabe que P debe tener una componente de 750 N perpendicular al elemento ABC , determine la magnitud de la fuerza P y su componente paralela a ABC .

2.27 El alambre atornillado BD ejerce sobre el poste telefónico AC una fuerza P dirigida a lo largo de BD . Si se sabe que P tiene una componente de 120 N perpendicular al poste AC , determine la magnitud de la fuerza P y su componente a lo largo de la línea AC .

2.28 El alambre atornillado BD ejerce sobre el poste telefónico AC una fuerza P dirigida a lo largo de BD . Si se sabe que P tiene una componente de 80 N perpendicular al poste AC , determine la magnitud de la fuerza P y su componente a lo largo de la línea AC .

2.29 El elemento CB de la prensa de líquido que se muestra en la figura ejerce sobre el pistón K una fuerza P dirigida a lo largo de la línea CB . Si se sabe que la componente horizontal de P es 400 N , determine la magnitud de la fuerza P y su componente vertical.

2.30 El cable AC ejerce sobre la viga AB una fuerza P dirigida a lo largo de la línea AC . Si se sabe que P debe tener una componente vertical de 400 N , determine la magnitud de la fuerza P y su componente horizontal.



Figura P2.30

2.31 Determine la resultante de las tres fuerzas del problema 2.22.

2.32 Determine la resultante de las tres fuerzas del problema 2.24.

2.33 Determine la resultante de las tres fuerzas del problema 2.21.

2.34 Determine la resultante de las tres fuerzas del problema 2.21.

2.35 Si se sabe que $\alpha = 35^\circ$, determine la resultante de las tres fuerzas mostradas en la figura.

2.36 Se sabe que la magnitud del P es de 725 N . Determine la resultante de las tres fuerzas ejercidas en el punto B de la viga AB .

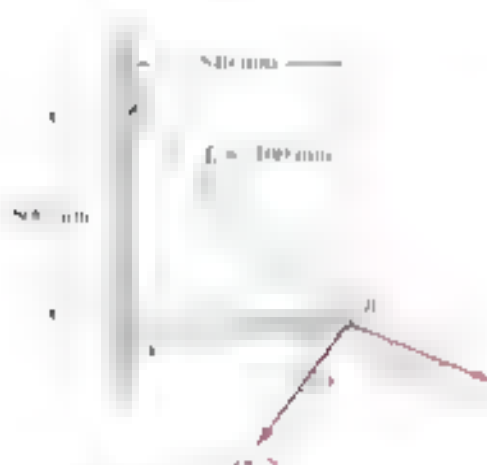


Figura P2.36

2.37 Se sabe que $P = 40\text{ lb}$. Determine la resultante de las tres fuerzas que se muestran en la figura.

2.38 Se sabe que $P = 7\text{ lb}$. Determine la resultante de las tres fuerzas que se muestran en la figura.

2.39 Para el collarín de problema 2.35, determine a) el valor respectivo de α si la resultante de las tres fuerzas que actúan sobre el collarín debe ser vertical, b) la magnitud correspondiente de la resultante.

2.40 Para la viga del problema 2.38, determine a) la tensión respectiva en el cable BC si la resultante de las tres fuerzas ejercidas en el punto B debe ser vertical, b) la magnitud correspondiente de la resultante.

2.41 Determine a) la tensión requerida en el cable AC si se sabe que la resultante de las tres fuerzas que actúan en el punto C del ángulo P debe estar dirigida a lo largo de BC , b) la magnitud correspondiente de la resultante.

2.42 Para el bloque de los problemas 2.37 y 2.38, determine a) el valor respectivo de α si la resultante de las tres fuerzas mostradas debe ser paralela al plano inclinado, b) la magnitud correspondiente de la resultante.

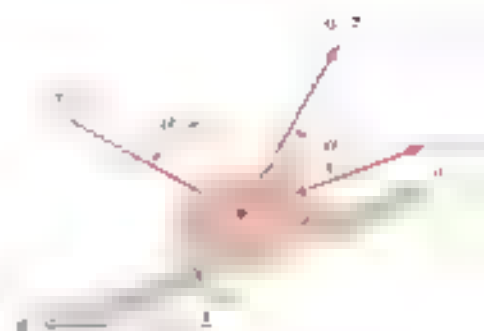


Figura P2.37 y P2.38



Figura P2.41

2.5. EQUILIBRIO DE UNA PARTÍCULA

En las secciones anteriores se expusieron los métodos adecuados para determinar la resultante de varias fuerzas que actúan sobre una partícula. Aunque se acostumbró considerar los problemas expresados hasta ahora, es posible que a veces sea necesario, en el caso del equilibrio de las fuerzas dadas, considerar la aplicación sucesiva de un método u otro, o sea, seguir la metodología si la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre una partícula es cero, la partícula se encuentra en equilibrio.

Una partícula se dice que está en equilibrio si la resultante de las fuerzas que actúan sobre ella es cero. En este caso, la partícula se encuentra en equilibrio. En este caso, la resultante de las fuerzas que actúan sobre ella es cero. En este caso, la resultante de las fuerzas que actúan sobre ella es cero.

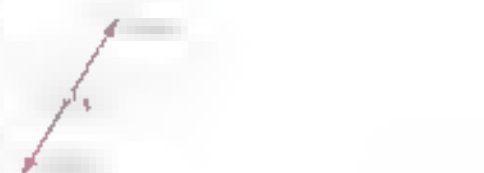


Figura 2.26



Figura 2.27

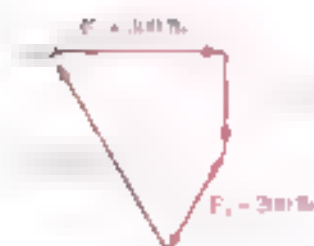


Figura 2.28

Otro caso de una partícula en equilibrio se muestra en la figura 2.27 donde se indican cuatro fuerzas que actúan sobre A. En la figura 2.28, la resultante de las fuerzas dadas se determina por la regla del polígono trazándose en el punto O con F_1 y acumulando las fuerzas punto a punto se encuentra que la punta de F_3 coincide con el punto de partida O así que la resultante R de las fuerzas dadas es cero y la partícula está en equilibrio.

El diagrama cerrado de la figura 2.28 proporciona una representación gráfica de la ecuación (2.14). Para expresar esta forma algebraica las condiciones del equilibrio de una partícula se escribe

$$\mathbf{R} = \sum \mathbf{F} = 0 \quad (2.14)$$

Desarrollando cada fuerza \mathbf{F} en sus componentes x y y las ecuaciones se tienen

$$\sum F_x \mathbf{i} + \sum F_y \mathbf{j} = 0 \quad \text{ó} \quad \sum F_x = 0 + \sum F_y \mathbf{j} = 0$$

Si se toman las componentes en las x y y de la ecuación (2.14) las condiciones de equilibrio de una partícula son

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad (2.15)$$

Regresando la partícula mostrada en la figura 2.27 se comprueba que las condiciones de equilibrio se satisfacen. Se escribe

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 300 \text{ lb} - (200 \text{ lb}) \sin 30^\circ - (400 \text{ lb}) \sin 30^\circ \\ &= 300 \text{ lb} - 100 \text{ lb} - 200 \text{ lb} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_y &= -173.2 \text{ lb} - (200 \text{ lb}) \cos 30^\circ + (400 \text{ lb}) \cos 30^\circ \\ &= -173.2 \text{ lb} - 173.2 \text{ lb} + 346.4 \text{ lb} = 0 \end{aligned}$$

2.10. PRIMERA LEY DEL MOVIMIENTO DE NEWTON

A finales del siglo XVI Sir Isaac Newton formuló tres leyes fundamentales de la mecánica clásica. La primera de estas leyes puede enunciarse como sigue:

Si la fuerza resultante que actúa sobre una partícula es cero, la partícula permanece en reposo o se mueve en línea recta con velocidad constante. Si la fuerza resultante no es cero, la partícula se mueve en línea recta con aceleración constante.

De las leyes de la dinámica de equilibrio expuestas en la sección 2.1 se deduce que una partícula en equilibrio puede estar en reposo o moviéndose en línea recta con velocidad constante. En la siguiente sección se considerarán varios problemas concernientes al equilibrio de una partícula.

2.11. PROBLEMAS RELACIONADOS CON EL EQUILIBRIO DE UNA PARTÍCULA. DIAGRAMAS DE CUERPO LIBRE

En una partícula, un problema de equilibrio mecánico se define de una manera física real. Un esquema para resolver las condiciones físicas del problema se conoce como *diagrama de cuerpo libre*.

Los métodos de análisis estudiados en las secciones anteriores se aplican a un sistema de fuerzas que actúan sobre una partícula. Un cuerpo libre es un sistema de fuerzas que actúa sobre una partícula. En un problema de equilibrio mecánico se define de una manera física real.

escogiendo una partícula significativa y dibujando un diagrama separado que muestre a ésta y a todas las fuerzas que actúan sobre ella. Dicho diagrama se conoce como *diagrama de cuerpo libre*.

Por ejemplo, considérese el edificio de la figura 2.20a, muestra lo en el diagrama espacial de la figura 2.20b. Este mecanismo entre dos edificios y ahora es levantado hacia la plataforma de dirección que se encuentra en el centro, está sujeto a la acción de varias fuerzas. A la derecha hay que pasar sobre poleas y las cuerdas AB y AC. Si desea determinar el tensor en cualquiera de las cuerdas AB y AC.

Por resolver el problema de la tracción en la figura a lo cuerpo libre que muestra a la partícula A, se muestra en la figura 2.20c. Las tensiones en las cuerdas AB y AC que se muestran en la figura 2.20c. El punto A parece ser un cuerpo libre, ya que se presiona el diagrama de cuerpo libre del punto A se muestra en la figura 2.20d. Esto muestra al punto A las cuerdas que lo sostienen. A partir de ahí, vertical y las dos cuerdas AB y AC, se presiona el punto A, se muestra en la figura 2.20d. El peso W del punto A se muestra en la figura 2.20d. De acuerdo con la ecuación (2.6) se escribe

$$W = mg = (75 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 736 \text{ N}$$

y se muestra el valor en la figura a lo cuerpo libre. Las fuerzas ejercidas por las dos cuerdas no se conocen, pero como son iguales en magnitud a la tensión en la cuerda AB y en la cuerda AC se representan con T_{AB} y T_{AC} y se dibujan hacia fuera de A en las direcciones mostradas por el diagrama espacial. A se muestra en la figura 2.20d.

En el punto A está sujeto a las tres fuerzas de acción. Se puede formar un triángulo cerrado cuando se combinan las tres fuerzas. En el triángulo de fuerzas los lados dados en la figura 2.20e. Las fuerzas T_{AB} y T_{AC} de las cuerdas en las cuerdas pueden encontrarse gráficamente. En el triángulo se dibuja a escala, o puede encontrarse analíticamente la trigonometría. Si se escoge el método de solución, con la ley de los senos se escribe

$$\frac{T_{AB}}{\sin 60^\circ} = \frac{T_{AC}}{\sin 40^\circ} = \frac{736 \text{ N}}{\sin 50^\circ}$$

$$T_{AB} = 647 \text{ N} \quad T_{AC} = 490 \text{ N}$$

Cuando una partícula está en equilibrio bajo tres fuerzas el problema siempre puede resolverse al aplicar las ecuaciones de las tres fuerzas. Si se desea una solución analítica, se puede resolver las ecuaciones de equilibrio dadas en la ecuación 2.7.

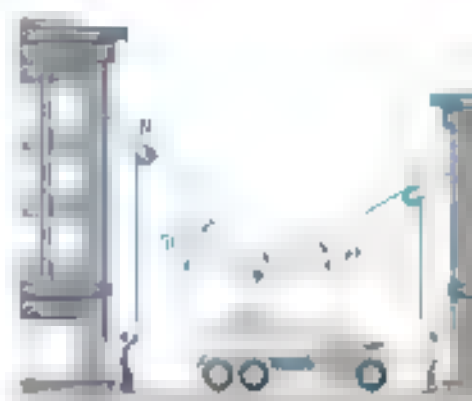
$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad (2.7)$$

Estas ecuaciones pueden resolverse para un total de dos incógnitas en la forma sin importar el número de fuerzas existentes. En el caso de tres fuerzas, las tres fuerzas pueden resolverse para dos incógnitas.

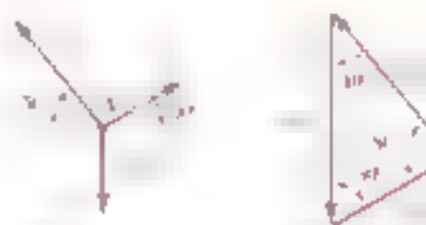
Los tipos más comunes de problemas son aquellos donde las dos incógnitas representan 1) las dos componentes de una fuerza, o 2) la magnitud de una fuerza y el ángulo de la fuerza con respecto a la horizontal. También se puede encontrar problemas que requieren la resolución de una ecuación de equilibrio o una ecuación de la magnitud de una fuerza y una ecuación de equilibrio 2.7 a 2.61.

www.geocienciasvirtuales.blogspot.com.co

2.11 Problemas relacionados con el equilibrio de una partícula. Diagramas de cuerpo libre



a. Diagrama espacial



b. Diagrama de cuerpo libre

Figura 2.20



Fotografía 2.1 Como se ilustra en un ejemplo anterior, es posible determinar las tensiones en los cables que sostienen al ojo que se muestra en la fotografía, conectando el gancho con una partícula y después aplicando las ecuaciones de equilibrio a las fuerzas que actúan sobre el gancho.



PROBLEMA RESUELTO 2.4

En la operación de descarga de un buque, un automóvil de 3 500 lb es suspendido por un cable. Se ata una cuerda al cable en A y se tira para centrar el automóvil sobre la posición deseada. El ángulo entre el cable y la vertical es $\alpha = 30^\circ$, mientras que el ángulo entre la cuerda y la horizontal es de 30° . ¿Cuál es la tensión en la cuerda?

SOLUCIÓN



Diagrama de cuerpo libre. Se elige el punto A como cuerpo libre y se elige el diagrama de cuerpo libre correspondiente. T_{AB} es la tensión en el cable AB y T_{AC} es la tensión en la cuerda.

Condición de equilibrio. Como sólo actúan tres fuerzas sobre el cuerpo libre se dibuja un triángulo de fuerzas para expresar que éste se encuentra en equilibrio. Con los ángulos dados se escribe:

$$\frac{T_{AB}}{\sin 21^\circ} = \frac{T_{AC}}{\sin 54^\circ} = \frac{3\,500 \text{ lb}}{\sin 75^\circ}$$

Utilizando una calculadora, primero se calcula y se guarda el valor del último cociente. Se multiplica este valor por el seno correspondiente por $\sin 21^\circ$ y se obtiene:

$$T_{AB} = 5\,590 \text{ lb}$$



PROBLEMA RESUELTO 2.5

La columna vertical de la izquierda, soportada por la fuerza F perpendicular a la manteniendo en equilibrio al cuerpo que se muestra al margen. Señale que la fuerza ejercida por los cables sobre el punto es perpendicular al momento aplicado.

SOLUCIÓN



Se elige el punto A como cuerpo libre y se elige el diagrama de cuerpo libre correspondiente. Como sólo actúan tres fuerzas sobre el cuerpo libre se dibuja un triángulo de fuerzas para expresar que éste se encuentra en equilibrio. Con los ángulos dados se escribe:

Condición de equilibrio. Puesto que sólo actúan tres fuerzas sobre el cuerpo libre se dibuja un triángulo de fuerzas para expresar que éste se encuentra en equilibrio. Con los ángulos dados se escribe:

$$F = (294 \text{ N}) \sin 15^\circ = 761 \text{ N} \quad \alpha = 15^\circ$$



PROBLEMA RESUELTO 2.6

Un casco de buceo de 60 lb se coloca en un canal de prueba para determinar la fuerza de arrastre que puede soportarse a cierta velocidad. Para hacerlo se coloca un modelo del casco propuesto en un canal de prueba y se usan tres cables para mantener su peso en el eje del centro del canal. Las lecturas de los cables indican que para una velocidad dada la tensión es de 40 lb en el cable AB y de 60 lb en el cable AE. Determine la fuerza de arrastre ejercida sobre el casco y la tensión en el cable AC.

SOLUCIÓN

Determinación de los ángulos. En primer lugar se determinan los ángulos α y β que definen las direcciones de los cables AB y AE. Se escriben:

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= \frac{7 \text{ ft}}{4 \text{ ft}} = 1.75 & \tan \beta &= \frac{1.5 \text{ ft}}{4 \text{ ft}} = 0.375 \\ \alpha &= 60.96^\circ & \beta &= 20.56^\circ\end{aligned}$$

Diagrama de cuerpo libre. Se escoge el casco como cuerpo libre. Se indican las fuerzas que actúan sobre el casco: las tensiones de los cables AB, AE y AC, así como la fuerza de arrastre F_D ejercida por el flujo.

Ecuación de equilibrio. Se expresa que el casco está en equilibrio. Se escribe:

$$\mathbf{R} = \mathbf{T}_{AB} + \mathbf{T}_{AE} + \mathbf{T}_{AC} + \mathbf{F}_D = \mathbf{0} \quad (1)$$

Como aparecen más de tres fuerzas, se obtendrán sus componentes x y y :

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_{AB} &= -40 \text{ lb} \cos(60.96^\circ) \mathbf{i} + (40 \text{ lb}) \sin(60.96^\circ) \mathbf{j} \\ &= -(34.73 \text{ lb}) \mathbf{i} + 19.84 \text{ lb} \mathbf{j} \\ \mathbf{T}_{AE} &= T_{AE} \cos(20.56^\circ) \mathbf{i} + T_{AE} \sin(20.56^\circ) \mathbf{j} \\ &= 0.93512 T_{AE} \mathbf{i} + 0.36337 T_{AE} \mathbf{j} \\ \mathbf{T}_{AC} &= -(60 \text{ lb}) \mathbf{j} \\ \mathbf{F}_D &= F_D \mathbf{i}\end{aligned}$$

Se sustituyen las expresiones obtenidas en la ecuación (1) y se factorizan los vectores unitarios \mathbf{i} y \mathbf{j} , por lo que se tiene:

$$(-34.73 \text{ lb} + 0.93512 T_{AE} + F_D) \mathbf{i} + (19.84 \text{ lb} + 0.36337 T_{AE} - 60 \text{ lb}) \mathbf{j} = \mathbf{0}$$

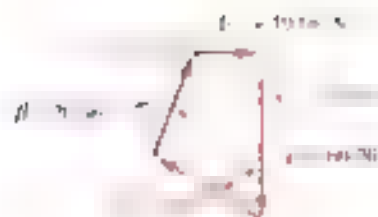
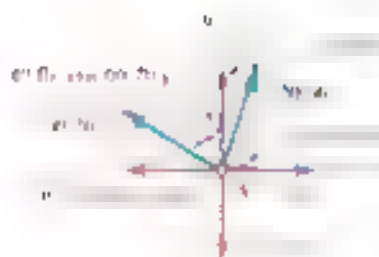
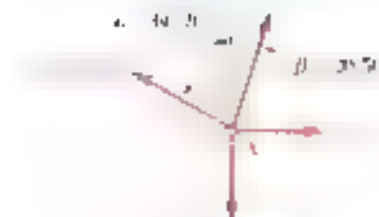
Para ecuación se cumple si, y sólo si, los coeficientes de \mathbf{i} y \mathbf{j} son iguales a cero. Así se obtienen las siguientes ecuaciones de equilibrio. Por experiencia, respectivamente, que la suma de las componentes x y la suma de las componentes y de las fuerzas dadas debe ser cero.

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 & -34.73 \text{ lb} + 0.93512 T_{AE} + F_D &= 0 & (2) \\ \sum F_y &= 0 & 19.84 \text{ lb} + 0.36337 T_{AE} - 60 \text{ lb} &= 0 & (3)\end{aligned}$$

De la ecuación (3) se encuentra $T_{AE} = + (21.1) \text{ lb}$

y sustituyendo este valor en la ecuación (2) se obtiene $F_D = + (17.6) \text{ lb}$

Al dibujar el diagrama de cuerpo libre se ve que tanto la tensión como la fuerza de arrastre están en la dirección correcta. El signo positivo en la respuesta señala que el sentido supuesto era el correcto. Puede dibujarse el polígono de fuerzas completo y así comprobar los resultados.



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

El método de la fuerza se aplica a los problemas de estática de cuerpos rígidos. La que resulta de la aplicación de este método es un sistema de ecuaciones que se resuelve algebraicamente. El método de la fuerza se aplica a los problemas de estática de cuerpos rígidos. La que resulta de la aplicación de este método es un sistema de ecuaciones que se resuelve algebraicamente.

El método de la fuerza se aplica a los problemas de estática de cuerpos rígidos. La que resulta de la aplicación de este método es un sistema de ecuaciones que se resuelve algebraicamente. El método de la fuerza se aplica a los problemas de estática de cuerpos rígidos. La que resulta de la aplicación de este método es un sistema de ecuaciones que se resuelve algebraicamente.

El método de la fuerza se aplica a los problemas de estática de cuerpos rígidos. La que resulta de la aplicación de este método es un sistema de ecuaciones que se resuelve algebraicamente. El método de la fuerza se aplica a los problemas de estática de cuerpos rígidos. La que resulta de la aplicación de este método es un sistema de ecuaciones que se resuelve algebraicamente.

El método de la fuerza se aplica a los problemas de estática de cuerpos rígidos. La que resulta de la aplicación de este método es un sistema de ecuaciones que se resuelve algebraicamente. El método de la fuerza se aplica a los problemas de estática de cuerpos rígidos. La que resulta de la aplicación de este método es un sistema de ecuaciones que se resuelve algebraicamente.

El método de la fuerza se aplica a los problemas de estática de cuerpos rígidos. La que resulta de la aplicación de este método es un sistema de ecuaciones que se resuelve algebraicamente. El método de la fuerza se aplica a los problemas de estática de cuerpos rígidos. La que resulta de la aplicación de este método es un sistema de ecuaciones que se resuelve algebraicamente.

El método de la fuerza se aplica a los problemas de estática de cuerpos rígidos. La que resulta de la aplicación de este método es un sistema de ecuaciones que se resuelve algebraicamente. El método de la fuerza se aplica a los problemas de estática de cuerpos rígidos. La que resulta de la aplicación de este método es un sistema de ecuaciones que se resuelve algebraicamente.

El método de la fuerza se aplica a los problemas de estática de cuerpos rígidos. La que resulta de la aplicación de este método es un sistema de ecuaciones que se resuelve algebraicamente. El método de la fuerza se aplica a los problemas de estática de cuerpos rígidos. La que resulta de la aplicación de este método es un sistema de ecuaciones que se resuelve algebraicamente.

Problemas

2.43 En C se amarran dos cables y se cargan como se muestra en la figura. Si se sabe que $\alpha = 30^\circ$ determine la tensión $a)$ en el cable AC y $b)$ en el cable BC.

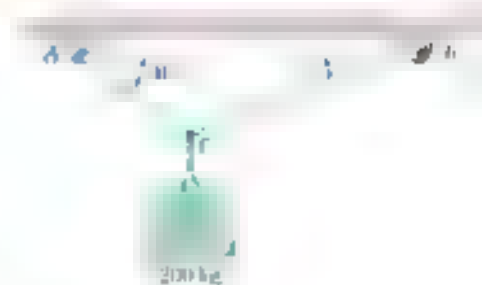


Figura P2.43

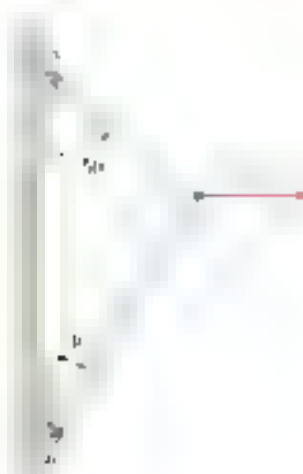


Figura P2.44

2.45 En C se amarran dos cables y se cargan como se muestra en la figura. Si se sabe que $P = 300\text{ N}$ y $\alpha = 60^\circ$ determine la tensión $a)$ en el cable AC y $b)$ en el cable BC.



Figure P2.45

2.46 En C se amarran dos cables y se cargan como se muestra en la figura. Determine la tensión $a)$ en el cable AC y $b)$ en el cable BC.

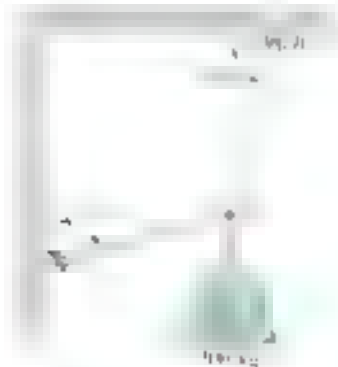


Figura P2.46

2.47 Si se sabe que $\mu = 30^\circ$, determine la tensión en el cable AC y la fuerza en la cuerda BC.



Figura P2.47

2.48 Si se sabe que $\alpha = 55^\circ$ y que el aguilón AC ejerce sobre la articulación C una fuerza dirigida a lo largo de la línea AC, determine (a) la magnitud de la fuerza y (b) la tensión en el cable BC.



Figura P2.48

2.49 Las fuerzas P y Q se aplican al componente de una pieza de conexión de la armadura que se muestra en la figura. Si se sabe que $P = 500$ lb, $Q = 650$ lb y que la pieza de conexión se encuentra en equilibrio, determine las magnitudes de las fuerzas ejercidas sobre las varillas A y B.

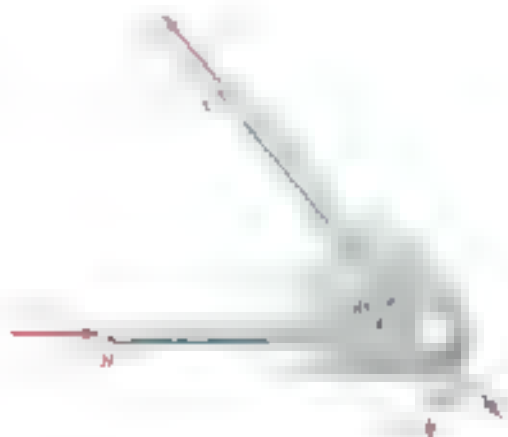


Figura P2.49 y P2.50

2.50 Las fuerzas P y Q se aplican al componente de una pieza de conexión de la armadura que se muestra en la figura. Si se sabe que $P = 500$ lb, $Q = 650$ lb y que la pieza de conexión se encuentra en equilibrio, determine las magnitudes de las fuerzas ejercidas sobre las varillas A y B.

2.51 Una conexión soldada está en equilibrio bajo la acción de las cuatro fuerzas que se muestran en la figura. Si se sabe que $F_A = 8$ kN y que $F_B = 18$ kN, determine las magnitudes de las dos fuerzas restantes.

2.52 Una conexión soldada está en equilibrio bajo la acción de las cuatro fuerzas que se muestran en la figura. Si se sabe que $F_A = 5$ kN y que $F_B = 10$ kN, determine las magnitudes de las dos fuerzas restantes.



Figura P2.51 y P2.52

2.53 En C se unan dos cables y se cargan como se muestra en la figura. Si se sabe que $Q = 80$ lb, determine la tensión en el cable AC y en el cable BC.

2.54 En C se unan dos cables y se cargan como se muestra en la figura. Determine el rango de valores de Q para los cuales la tensión en cualquiera de los cables no sea mayor que 60 lb en cualquiera de los cables.

2.55 Un pescador es rescatado con una silla de contramestre que se encuentra suspendida de una polea que puede mover libremente sobre el cable de apoyo ACB y es jalada a una velocidad constante mediante el cable CD. Si se sabe que $\alpha = 30^\circ$ y $\beta = 10^\circ$ y que el peso combinado de la silla y el pescador es de 900 N, determine la tensión $a)$ en el cable de soporte ACB y $b)$ en el cable de arrastre CD.



Figura P2.55 y P2.56

2.56 Un pescador es rescatado con una silla de contramestre que se encuentra suspendida de una polea que puede mover libremente sobre el cable de apoyo ACB y es jalada a una velocidad constante mediante el cable CD. Si se sabe que $\alpha = 25^\circ$ y $\beta = 15^\circ$ y que la tensión en el cable CD es de 80 N, determine $a)$ el peso combinado de la silla y el pescador y $b)$ la tensión en el cable de soporte ACB.

2.57 Para la estructura mostrada en la figura P2.57, se sabe que el peso combinado de los cables es de 900 N, que el cable AC es de 3 m de longitud y el cable BC es de 4 m de longitud. Determine $a)$ la mínima fuerza P que puede aplicarse en C, $b)$ el valor correspondiente de la tensión.

2.58 Para la situación descrita en la figura P2.47, determine $a)$ el valor de α para el cual la tensión en el cable BC es la mínima posible y $b)$ el valor correspondiente de la tensión.

2.59 Para la estructura y la carga del problema 2.48, determine $a)$ el valor de α para el que la tensión en el cable BC es mínima, $b)$ el valor correspondiente de la tensión.

2.60 Si se sabe que las porciones AC y BL del cable ACB deben ser iguales en longitud para que el cable pueda ser jalado a la velocidad constante, determine $a)$ el valor de α para el que la tensión en este no debe ser mayor que 870 N.



Figura P2.53 y P2.54



Figura P2.60



Figura P2.61 y P2.62

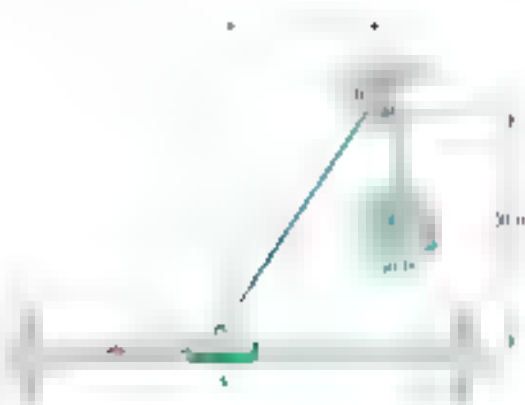


Figura P2.63 y P2.64

2.61 En C se amarran dos cables y se cargan como se muestra en la figura. Si se sabe que la tensión máxima permisible en cada cable es de 500 N, determine el máximo valor de la fuerza P que puede aplicarse en B. Cálculen el valor correspondiente de α .

2.62 En C se amarran dos cables y se cargan como se muestra en la figura. Si se sabe que la tensión máxima permisible en cada cable es de 500 N y que los cables AB y BC tienen una longitud de 10 m, determine el máximo valor de la fuerza P que puede aplicarse en B. Cálculen el valor correspondiente de α .

2.63 En la figura se muestra un sistema de cables y pesos. Si se sabe que la tensión máxima permisible en cada cable es de 500 N y que los cables AB y BC tienen una longitud de 10 m, determine el máximo valor de la fuerza P que puede aplicarse en B. Cálculen el valor correspondiente de α .

2.64 En la figura se muestra un sistema de cables y pesos. Si se sabe que la tensión máxima permisible en cada cable es de 500 N y que los cables AB y BC tienen una longitud de 10 m, determine el máximo valor de la fuerza P que puede aplicarse en B. Cálculen el valor correspondiente de α .

2.65 Una carga de 180 kg está sostenida por el arreglo de cuerdas y poleas que se muestra en la figura. Si se sabe que $\theta = 30^\circ$, determine el valor de la fuerza P que debe aplicarse en el extremo libre de la cuerda que pasa por el sistema de poleas. Se asume que la fricción es despreciable en ambos lados de una cuerda que pasa por una polea simple. Este problema puede resolverse mediante los métodos del capítulo 4.



Figura P2.65 y P2.66

2.66 Una carga de 180 kg está sostenida por el arreglo de cuerdas y poleas que se muestra en la figura. Si se sabe que $\theta = 30^\circ$, determine el valor de la fuerza P que debe aplicarse en el extremo libre de la cuerda que pasa por el sistema de poleas. Se asume que la fricción es despreciable en ambos lados de una cuerda que pasa por una polea simple. Este problema puede resolverse mediante los métodos del capítulo 4.

2.67 Una caja de madera de 600 lb está sostenida por varios arreglos de poleas como se muestra en la figura. Determine la tensión en la cuerda para cada arreglo. (Vea la sugerencia del problema 2.65.)

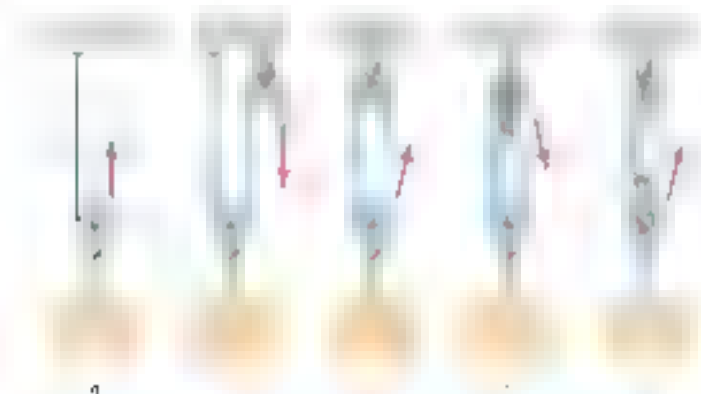


Figura P2.67

2.68 Retorne las tensiones T_1 y T_2 del problema 2.67 y demuestre que el extremo libre de la cuerda está unido a la caja de madera.

2.69 La carga Q se aplica a la polea C , la cual puede rotar sobre el eje AB . La polea A está unida a la estructura por medio de un cable ante un segundo cable CAD , el cual pasa a través de la polea A y sostiene una carga P . Si se sabe que $P = 750$ N, determine a) la tensión en el cable AB b) la magnitud de la carga Q .

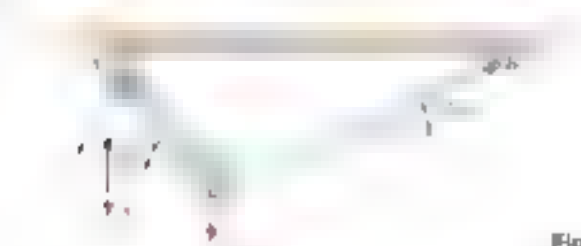


Figura P2.69 y P2.70

2.70 Una carga Q de 1 800 N se aplica a la polea C , la cual puede rotar sobre el cable AB , el cual se sostiene en la estructura por medio de un cable CAD , el cual pasa a través de la polea A y sostiene una carga P . Determine a) la tensión en el cable ACB b) la magnitud de la carga P .

FUERZAS EN EL ESPACIO

2.12. COMPONENTES RECTANGULARES DE UNA FUERZA EN EL ESPACIO

Los problemas propuestos en esta sección tratan de las magnitudes de las fuerzas en el espacio. Los problemas de esta sección requieren la solución de un sistema de ecuaciones. Se sugiere al estudiante que consulte el capítulo de álgebra lineal para obtener más información sobre los métodos de solución de sistemas de ecuaciones.

Consideremos una fuerza \mathbf{F} que actúa en el origen O de la siguiente manera: \mathbf{F} puede ser descompuesta en tres componentes rectangulares F_x , F_y y F_z . La componente F_x se encuentra en el plano Oxy , la componente F_y se encuentra en el plano Oyz y la componente F_z se encuentra en el eje z . La fuerza \mathbf{F} puede ser descompuesta en tres componentes rectangulares F_x , F_y y F_z .

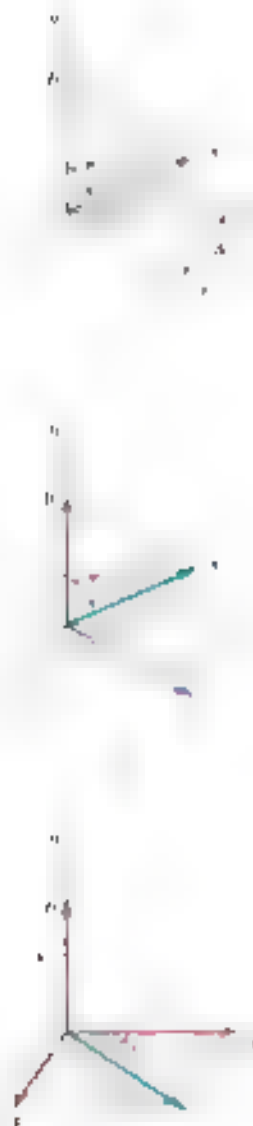


Figura 2.30

La dirección de \mathbf{F} dentro del plano está definida por el ángulo θ_y que forma \mathbf{F} con el eje y . La fuerza \mathbf{F} puede descomponerse en una componente vertical F_y y una componente horizontal F_x ; esta operación mostrada en la figura 2.30(a), se realiza en el plano $OHAC$ de acuerdo con las reglas de semejanza de triángulos. Las componentes escalares correspondientes son

$$F_x = F \cos \theta_y, \quad F_y = F \sin \theta_y \quad (2.16)$$

La F_x puede descomponerse en sus dos componentes rectangulares F_x y F_z a lo largo de los ejes x y z , respectivamente. En la superficie unitaria mostrada en la figura 2.30(b), se realiza con semejanza de triángulos las operaciones las expresiones siguientes para las componentes escalares correspondientes:

$$F_x = F_y \cos \phi = F \sin \theta_y \cos \phi \quad (2.17)$$

$$F_z = F_y \sin \phi = F \sin \theta_y \sin \phi$$

La fuerza \mathbf{F} se ha descompuesto en tres componentes vectoriales rectangulares $\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}$ dirigidas a lo largo de los tres ejes coordenados.

Si se aplica el teorema de Pitágoras a los triángulos OAH y OAC de la figura 2.30, se escribe:

$$F^2 = (OA)^2 = (OB)^2 + (BA)^2 = F_y^2 + F_x^2$$

$$F_x^2 = (OC)^2 = (OD)^2 + (DC)^2 = F_z^2 + F_y^2$$

Si se eliminan F_y de estas dos ecuaciones se concluye que F se relaciona de la siguiente manera con la magnitud de \mathbf{F} y sus componentes rectangulares escalares:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad (2.18)$$

La relación que existe entre la fuerza \mathbf{F} y sus tres componentes F_x , F_y y F_z se presenta más fácil si se traza "una caja" que tiene por aristas F_x , F_y y F_z como se muestra en la figura 2.31. La fuerza \mathbf{F} está representada por la diagonal OZ de esta caja. La figura 2.31 muestra un triángulo rectángulo OAB formado para deducir la fórmula de las ecuaciones 2.16: $F_y = F \sin \theta_y$. Por analogía, en la figura 2.31(a) se han trazado otros dos triángulos rectángulos el OAC y OAE ; estas cajas pequeñas se asemejan a la de triángulo OAB . Si representamos por θ_x y θ_z los ángulos entre \mathbf{F} con los ejes x y z , respectivamente, se pueden escribir las fórmulas semejantes a $F_y = F \sin \theta_y$ de la siguiente manera:

$$F_x = F \cos \theta_x, \quad F_y = F \cos \theta_y, \quad F_z = F \cos \theta_z \quad (2.19)$$

Los tres ángulos θ_x , θ_y y θ_z de modo y dirección de la fuerza \mathbf{F} son los ángulos de dirección θ_x y θ_y introducidos de la manera en esta sección. Los cosenos de θ_x , θ_y y θ_z se conocen como los cosenos directores de la fuerza \mathbf{F} .

Con el uso de los vectores unitarios \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} dirigidos a lo largo de los ejes x , y y z , respectivamente, en la figura 2.32, se puede expresar \mathbf{F} en la forma

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} \quad (2.20)$$

donde las componentes escalares F_x , F_y y F_z están definidas por las ecuaciones 2.19.

Ejemplo 1 Una fuerza de 500 N forma ángulos de 60° , 45° y 120° con los ejes x , y y z , respectivamente. Encuentre las componentes F_x , F_y y F_z de

Fig. 2.31

Sustituyendo $F = 500 \text{ N}$, $\theta_x = 60^\circ$, $\theta_y = 45^\circ$ y $\theta_z = 120^\circ$ en las fórmulas (2.19) se escribe:

$$\begin{aligned} F_x &= (500 \text{ N}) \cos 60^\circ = +250 \text{ N} \\ F_y &= (500 \text{ N}) \cos 45^\circ = +354 \text{ N} \\ F_z &= (500 \text{ N}) \cos 120^\circ = -250 \text{ N} \end{aligned}$$

Cuando en la ecuación (2.20) los valores obtenidos para las componentes x , y y z de \mathbf{F} se insertan:

$$\mathbf{F} = 250 \text{ N} \mathbf{i} + 354 \text{ N} \mathbf{j} - 250 \text{ N} \mathbf{k}$$

* Nótese que el signo de las componentes y y z de \mathbf{F} es igual al signo $\cos \theta$ que indica que la componente tiene el mismo sentido que el eje correspondiente y el signo negativo tiene el sentido opuesto. ■

El ángulo que una fuerza \mathbf{F} forma con un eje debe medirse desde el lado positivo del eje y estará siempre comprendido entre 0° y 180° . El ángulo θ_x medido con el eje x está comprendido entre 0° y 180° . La dirección \mathbf{F} está en el cuadrante yz que el eje x positivo, $\cos \theta_x$ y F_x serán positivos. El ángulo θ_y medido con el eje y está comprendido entre 0° y 180° y $\cos \theta_y$ y F_y serán positivos, mientras que θ_z es obtuso; en consecuencia, F_x y F_y son positivos, mientras que F_z es negativo.

Si se sustituye en la ecuación (2.20) las expresiones obtenidas para F_x , F_y y F_z en (2.19) se escribe:

$$\mathbf{F} = F(\cos \theta_x \mathbf{i} + \cos \theta_y \mathbf{j} + \cos \theta_z \mathbf{k}) \quad (2.21)$$

que muestra que la fuerza \mathbf{F} puede expresarse como el producto del escalar F y del vector

$$\lambda = \cos \theta_x \mathbf{i} + \cos \theta_y \mathbf{j} + \cos \theta_z \mathbf{k} \quad (2.22)$$

El vector λ es un vector unitario en la dirección de magnitud 1 y λ es más a menudo que \mathbf{F} porque $\lambda_x = F_x/F$, $\lambda_y = F_y/F$ y $\lambda_z = F_z/F$ que λ es la línea de acción de \mathbf{F} . De (2.22) se muestra que las componentes λ_x , λ_y y λ_z son respectivamente iguales a los cosenos directores de la línea de acción de \mathbf{F} .

$$\lambda_x = \cos \theta_x, \quad \lambda_y = \cos \theta_y, \quad \lambda_z = \cos \theta_z \quad (2.23)$$

Se puede demostrar que los valores de los cosenos θ_x , θ_y y θ_z son siempre independientes. Expresando por la suma de los cuadrados de las componentes de λ es igual al cuadrado de su magnitud, se escribe:

$$\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 = 1$$

o sustituyendo para λ_x , λ_y y λ_z de (2.23),

$$\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1 \quad (2.24)$$

Por ejemplo, se muestra que cuando se han seleccionado los valores $\theta_x = 60^\circ$ y $\theta_y = 45^\circ$, el valor de θ_z debe ser igual a 60° o 120° para satisfacer la ecuación (2.24).

Cuando las componentes F_x , F_y y F_z de una fuerza \mathbf{F} están dadas, la magnitud F de la fuerza se obtiene de (2.18). Entonces las ecuaciones (2.19) pueden resolverse para los cosenos directores.

* Con una calculadora programada para convertir coordenadas rectangulares en coordenadas polares, se verá que el siguiente procedimiento resulta más expedito para calcular F primero se determina F_x a partir de sus dos componentes rectangulares F_x y F_y (figura 2.30) después se determina F a partir de sus dos componentes rectangulares F_x y F_z (figura 2.31). El orden en el que se introducen F_x , F_y y F_z resulta indiferente.

2.12 Composición rectangular de una fuerza en el espacio

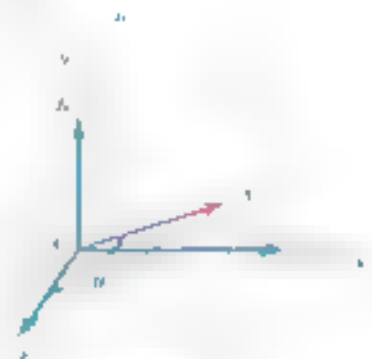
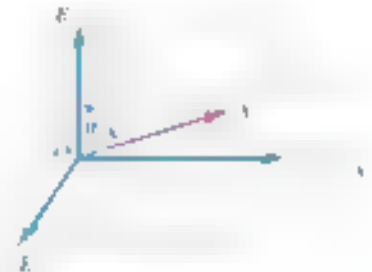
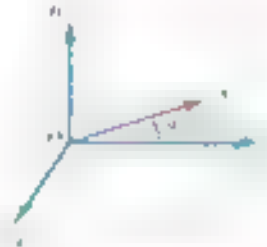


Figura 2.31



Figura 2.32



Figura 2.33

$$\cos \theta = \frac{F_x}{F} \quad \cos \theta_y = \frac{F_y}{F} \quad \cos \theta_z = \frac{F_z}{F} \quad (2.25)$$

obtener los ángulos θ_x , θ_y y θ_z por el procedimiento indicado en (2.25).

Ejemplo 2 Una fuerza \mathbf{F} tiene las componentes $F_x = 20$ lb, $F_y = -30$ lb y $F_z = 60$ lb. Se desea encontrar la magnitud de \mathbf{F} y los ángulos θ_x , θ_y y θ_z que forma con los ejes coordenados.

A partir de la fórmula (2.25) se obtiene

$$\begin{aligned} F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \\ &= \sqrt{(20 \text{ lb})^2 + (-30 \text{ lb})^2 + (60 \text{ lb})^2} \\ &= \sqrt{4\,400} \text{ lb} = 70 \text{ lb} \end{aligned}$$

Si se sustituyen los valores de las componentes y la magnitud de \mathbf{F} en las ecuaciones (2.25) se encuentra

$$\cos \theta_x = \frac{F_x}{F} = \frac{20 \text{ lb}}{70 \text{ lb}} \quad \cos \theta_y = \frac{F_y}{F} = \frac{-30 \text{ lb}}{70 \text{ lb}} \quad \cos \theta_z = \frac{F_z}{F} = \frac{60 \text{ lb}}{70 \text{ lb}}$$

Calculando sucesivamente cada cociente y su arco coseno, se obtiene

$$\theta_x = 73.4^\circ \quad \theta_y = 115.4^\circ \quad \theta_z = 31.0^\circ$$

Estos cálculos pueden realizarse fácilmente con una calculadora. ■

2.13 FUERZA DEFINIDA EN TÉRMINOS DE SU MAGNITUD Y DOS PUNTOS SOBRE SU LÍNEA DE ACCIÓN

En muchas aplicaciones a la ingeniería, la fuerza \mathbf{F} se determina por los valores numéricos de los puntos $M(x_1, y_1, z_1)$ y $N(x_2, y_2, z_2)$ sobre su línea de acción (figura 2.34). Considere el vector \overrightarrow{MN} que une a M y N y tiene el mismo sentido que \mathbf{F} . Si se representan sus componentes escalares por d_x , d_y y d_z , respectivamente, se escribe

$$\overrightarrow{MN} = d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} + d_z \mathbf{k} \quad (2.26)$$

El vector unitario $\hat{\mathbf{u}}$ en la dirección de acción de \mathbf{F} es decir a lo largo de \overrightarrow{MN} , puede obtenerse al dividir el vector \overrightarrow{MN} entre su magnitud $|\overrightarrow{MN}|$. Se sabe que $|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$ y se observa que $|\overrightarrow{MN}|$ es igual a la distancia d de M a N , se escribe

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{\overrightarrow{MN}}{|\overrightarrow{MN}|} = \frac{1}{d} (d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} + d_z \mathbf{k}) \quad (2.27)$$

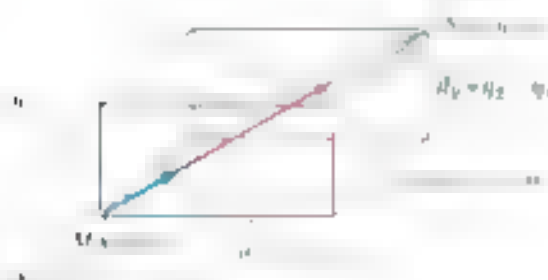


Figura 2.34

Es importante recordar que \mathbf{F} es el producto de F y $\mathbf{\hat{A}}$ por lo que se tiene

$$\mathbf{F} = F\mathbf{\hat{A}} = \frac{F}{d}(d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k}) \quad (2.24)$$

de la cual se sigue que las componentes de \mathbf{F} son dadas por

$$F_x = \frac{F d_x}{d}, \quad F_y = \frac{F d_y}{d}, \quad F_z = \frac{F d_z}{d} \quad (2.25)$$

Las relaciones (2.20) y (2.21) pueden escribirse usando el producto escalar entre las componentes de las fuerzas \mathbf{F} de magnitud F con el vector unitario $\mathbf{\hat{A}}$ que define $\mathbf{\hat{A}}$ en términos de los ejes x , y y z . La línea de acción de \mathbf{F} está definida por dos puntos M y N haciendo las proyecciones de M y N sobre el plano perpendicular a las componentes del vector \overline{MN} y la distancia d de M a N

$$d_x = x_N - x_M, \quad d_y = y_N - y_M, \quad d_z = z_N - z_M$$

$$d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$$

Sustituyendo los valores para F y para d_x , d_y , d_z y d en las relaciones (2.25), se obtienen las componentes F_x , F_y y F_z de la fuerza.

Los ángulos θ_x , θ_y y θ_z que forman \mathbf{F} con los ejes coordenados pueden definirse de las relaciones (2.25). Con variables como en (2.25) y (2.26) también se puede escribir

$$\cos \theta_x = \frac{d_x}{d}, \quad \cos \theta_y = \frac{d_y}{d}, \quad \cos \theta_z = \frac{d_z}{d} \quad (2.26)$$

y determinar los ángulos θ_x , θ_y y θ_z directamente de la ecuación (2.26) usando la magnitud F y los puntos M y N .

2.14 ADICIÓN DE FUERZAS CONCURRENTES EN EL ESPACIO

La suma de R de dos o más fuerzas en el espacio se puede hacer analizando sus componentes rectangulares. Las técnicas gráficas y trigonométricas no son muy prácticas en el caso de fuerzas en el espacio.

El método seguido aquí es semejante al empleado en la sección 2.4 con fuerzas coplanares. Se establece que

$$\mathbf{R} = \sum \mathbf{F}$$

se descomponen cada fuerza en sus componentes rectangulares y se verifica

$$R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} + R_z\mathbf{k} = \sum F_x\mathbf{i} + \sum F_y\mathbf{j} + \sum F_z\mathbf{k}$$

$$= (\sum F_x)\mathbf{i} + (\sum F_y)\mathbf{j} + (\sum F_z)\mathbf{k}$$

de la cual se desprende que

$$R_x = \sum F_x, \quad R_y = \sum F_y, \quad R_z = \sum F_z \quad (2.27)$$

La magnitud de la resultante y los ángulos θ_x , θ_y y θ_z que ésta forma con los ejes coordenados se obtienen por el método de la sección 2.12. Se escribe

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \quad (2.28)$$

$$\cos \theta_x = \frac{R_x}{R}, \quad \cos \theta_y = \frac{R_y}{R}, \quad \cos \theta_z = \frac{R_z}{R} \quad (2.29)$$



PROBLEMA RESUELTO 2.7

En el punto de sujeción, una articulación A ejerce una fuerza cuyo módulo en el alambre es de 2 500 N. Determine a) las componentes F_x , F_y y F_z de la fuerza por ella soportada, b) los ángulos θ_x , θ_y y θ_z con respecto a la dirección de la fuerza.

SOLUCIÓN

a) Componentes de la fuerza. La línea de acción de la fuerza que actúa sobre el punto pasa por A y B y la fuerza está dirigida de A hacia B. Las componentes de vector \vec{AB} que tienen la misma dirección que la fuerza son:

$$x = -40 \text{ m} \quad y = +80 \text{ m} \quad z = +30 \text{ m}$$

La distancia total de A a B es:

$$AB = d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2} = 94.3 \text{ m}$$

Al representar por \hat{i} , \hat{j} y \hat{k} los vectores unitarios a lo largo de los ejes coordenados, se tiene:

$$\vec{AB} = -(40 \text{ m})\hat{i} + (80 \text{ m})\hat{j} + (30 \text{ m})\hat{k}$$

Introduciendo el vector unitario $\hat{A} = \vec{AB}/AB$, se escribe:

$$\vec{F} = F\hat{A} \quad \text{y} \quad \frac{\vec{AB}}{AB} = \frac{2\,500 \text{ N}}{94.3 \text{ m}} \vec{AB}$$

Si se sustituye la expresión encontrada para \vec{AB} , se obtiene:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{2\,500 \text{ N}}{94.3 \text{ m}} [-(40 \text{ m})\hat{i} + (80 \text{ m})\hat{j} + (30 \text{ m})\hat{k}] \\ \vec{F} &= -(1\,060 \text{ N})\hat{i} + (2\,120 \text{ N})\hat{j} + (795 \text{ N})\hat{k} \end{aligned}$$

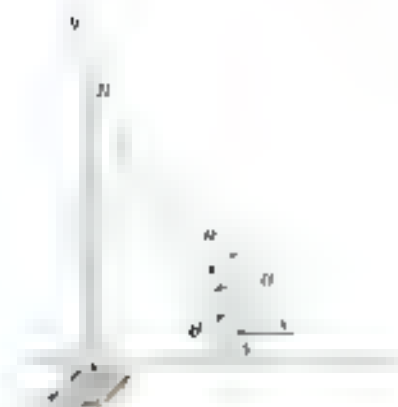
Por consiguiente, las componentes de \vec{F} son

b) Dirección de la fuerza. Con las ecuaciones (2.25), se escribe:

$$\begin{aligned} \cos \theta_x &= \frac{F_x}{F} = \frac{-1\,060 \text{ N}}{2\,500 \text{ N}} \quad \cos \theta_y = \frac{F_y}{F} = \frac{2\,120 \text{ N}}{2\,500 \text{ N}} \\ \sin \theta_z &= \frac{F_z}{F} = \frac{795 \text{ N}}{2\,500 \text{ N}} \end{aligned}$$

Si se calcula sucesivamente cada cociente y su arco coseno, se obtiene:

Nota: El símbolo \cos^{-1} puede leerse como "arco coseno" o "arco coseno inverso".





PROBLEMA RESUELTO 2.5

Una fuerza de 1200 lb se aplica al punto A, como se muestra, y se aplica tensión a los cables AB y AC por las cables mostrados. Se sabe que la tensión es de 840 lb en el cable AB y 960 lb en el cable AC. Hallar la tensión en los cables AB y AC, y la fuerza en el punto A.

SOLUCIÓN

Componentes de las fuerzas. La fuerza ejercida por cada cable sobre la estaca A se descompone en sus componentes x , y y z . Se representa la fuerza ejercida por el cable AB sobre la estaca A hacia la sección de la punta. Si se representa por \vec{F}_{AB} a los vectores unitarios a lo largo de los ejes coordenados, se escribe:

$$\frac{\vec{F}_{AB}}{AB} = \frac{-16}{21}\vec{i} + \frac{8}{21}\vec{j} + \frac{11}{21}\vec{k} \quad AB = 21 \text{ ft}$$

$$\frac{\vec{F}_{AC}}{AC} = \frac{-16}{24}\vec{i} + \frac{8}{24}\vec{j} - \frac{16}{24}\vec{k} \quad AC = 24 \text{ ft}$$

Al representar por \vec{u}_{AB} al vector unitario a lo largo de la línea AB, se tiene:

$$\vec{T}_{AB} = T_{AB}\vec{u}_{AB} = T_{AB}\frac{\vec{F}_{AB}}{AB} = \frac{840 \text{ lb}}{21 \text{ ft}}\vec{F}_{AB}$$

Al sustituir la expresión encontrada para \vec{F}_{AB} , se obtiene:

$$\vec{T}_{AB} = \frac{840 \text{ lb}}{21 \text{ ft}}(-16\vec{i} + 8\vec{j} + 11\vec{k}) = -640\vec{i} + 320\vec{j} + 440\vec{k}$$

Si se representa con \vec{u}_{AC} al vector unitario a lo largo de AC se obtiene el siguiente resultado:

$$\vec{T}_{AC} = T_{AC}\vec{u}_{AC} = T_{AC}\frac{\vec{F}_{AC}}{AC} = \frac{960 \text{ lb}}{24 \text{ ft}}\vec{F}_{AC}$$

$$\vec{T}_{AC} = -640\vec{i} + 400\vec{j} - 640\vec{k}$$

Resultante de las fuerzas. La resultante \vec{R} de las fuerzas ejercidas por los dos cables es:

$$\vec{R} = \vec{T}_{AB} + \vec{T}_{AC} = -1280\vec{i} + 720\vec{j} - 200\vec{k}$$

La magnitud y dirección de la resultante se determinan por:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{(-1280)^2 + (720)^2 + (-200)^2}$$

$$R = 1350 \text{ lb}$$

De las ecuaciones (2.37) se obtiene:

$$\cos \theta_x = \frac{R_x}{R} = \frac{-1280}{1350} \quad \theta_x = 159.7^\circ$$

$$\cos \theta_y = \frac{R_y}{R} = \frac{720}{1350} \quad \theta_y = 56.3^\circ$$

$$\cos \theta_z = \frac{R_z}{R} = \frac{-200}{1350} \quad \theta_z = 96.8^\circ$$

Calculando en forma sucesiva cada coseno y sus arcos cosenos, se obtiene:

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En la resolución de los problemas de esta sección pueden ser de utilidad los siguientes resultados de la trigonometría: para cualquier triángulo con lados a , b y c opuestos a los ángulos A , B y C se tiene:

Ley de los senos: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.
Ley de los cosenos: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$.

Ejemplo: Si la dirección de la fuerza \mathbf{F} está definida por los ángulos θ_1 y θ_2 medidos en la figura 2.36, las proyecciones de \mathbf{F} a lo largo de estos ángulos y sus correspondientes proporciones con las componentes de \mathbf{F} en x e y son $\frac{1}{2}$ y $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Observe que las componentes de \mathbf{F} se obtienen proyectando \mathbf{F} sobre el plano horizontal conteniendo la proyección \mathbf{F}_x obtenida en esta forma se obtienen las componentes \mathbf{F}_y y \mathbf{F}_z (figura 2.36c).

Observación: Si la dirección de la fuerza \mathbf{F} es definida por los ángulos θ_1 , θ_2 y θ_3 por \mathbf{F} forma, se las proyecciones de cada componente se puede obtener multiplicando la magnitud F de la fuerza por el seno del ángulo que le corresponde, respectivamente:

$$F_x = F \cos \theta_1, \quad F_y = F \cos \theta_2, \quad F_z = F \cos \theta_3.$$

Ejemplo: Si la dirección de la fuerza \mathbf{F} es definida por los puntos M y N dados en la figura 2.37, se puede encontrar la magnitud de \mathbf{F} proyectando \mathbf{F} sobre el eje xy desde M hasta N y determinar sus componentes d_1 , d_2 y d_3 sobre los vectores unitarios \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} :

$$\mathbf{MN} = d_1 \mathbf{i} + d_2 \mathbf{j} + d_3 \mathbf{k}$$

Después se determina el vector unitario \mathbf{A} a lo largo de la línea de acción de \mathbf{F} dividiendo el vector \mathbf{MN} entre su magnitud $|\mathbf{MN}|$. Se multiplica \mathbf{A} por la magnitud de \mathbf{F} sustituyendo \mathbf{F} por su valor para \mathbf{F} en términos de sus componentes rectangulares (problema resuelto 2.7):

$$\mathbf{F} = F\mathbf{A} = \frac{F}{|\mathbf{MN}|} (d_1 \mathbf{i} + d_2 \mathbf{j} + d_3 \mathbf{k})$$

Cuando se define un sistema de ejes rectangulares como la fuerza es un vector, cualquier sistema de notación consistente con sus reglas de manipulación algebraica es válido. Se le sugiere al estudiante que se familiarice con el sistema de notación T_{xyz} antes de leer el estudio de la fuerza en el punto 6. Observe que los subíndices 1 y 2 en las notaciones T_{12} y T_{21} se refieren a la dirección de la fuerza. Se recomienda adoptar la misma notación para el eje z al definir el punto 1 (por subíndice) y al punto 2 (el segundo subíndice).

Cuando el vector que define la línea de acción de la fuerza se conoce, puede obtenerse en sus componentes x , y y z como el caso de los casos que define la fuerza en cada dirección coordenada para ir desde el punto 1 hasta el punto 2. Es decir:

4. Si se aplica la ecuación (1) al ángulo correcto, obteniendo las componentes:

15. La ecuación (1) es válida para cualquier ángulo θ entre F y F_x y F_y y se puede obtener su magnitud F así:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

Los valores horizontales de la línea de acción de F se pueden determinar obteniendo las componentes de la fuerza entre F :

$$\cos \theta_x = \frac{F_x}{F} \quad \cos \theta_y = \frac{F_y}{F} \quad \cos \theta_z = \frac{F_z}{F}$$

A partir de los cosenos directores se pueden determinar los ángulos θ , θ_x , θ_y que F forma con los ejes cartesianos (ejemplo 3).

El $F = F_x^2 + F_y^2 + F_z^2$ se obtiene de la siguiente manera: Si se elige el espacio tridimensional, primero se define un sistema de ejes cartesianos rectangulares. Se colocan en los ejes las componentes iguales de los proyecciones de F se calculan los senos de F en la suma de esas componentes se obtienen las componentes F_x , F_y , F_z de la siguiente manera: si magnitud y la dirección de la resultante se puede obtener entonces se obtienen los mismos anteriores para cualquier fuerza F presente en el espacio 3D.

Problemas

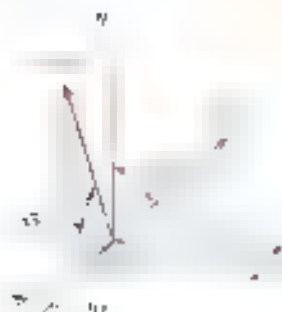


Figura P2.71 y P2.72



Figura P2.73, P2.74, P2.75 y P2.76

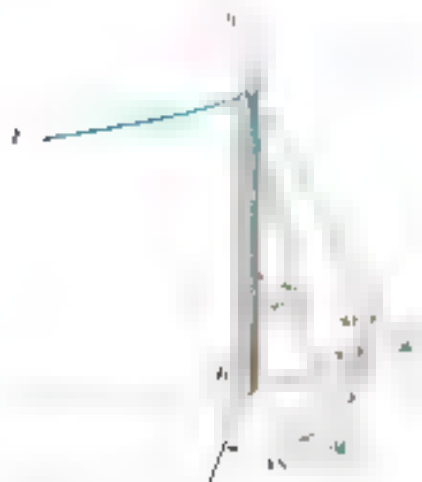


Figura P2.77 y P2.78

2.71 Determine *a*) las componentes *x*, *y* y *z* de la fuerza de 750 N y *b*) los ángulos θ_1 , θ_2 y θ_3 que forma la fuerza con los ejes coordenados.

2.72 Determine *a*) las componentes *x*, *y* y *z* de la fuerza de 900 N y *b*) los ángulos θ_1 , θ_2 y θ_3 que forma la fuerza con los ejes coordenados.

2.73 Una placa circular horizontal se sostiene mediante tres alambres que forman ángulos de 30° respecto de la vertical y se encuentran unidos a un soporte en D. Si se sabe que la componente *x* de la fuerza ejercida por el alambre CD sobre el punto C es 10 N, determine *a*) la tensión en el alambre AD *b*) los ángulos θ_1 , θ_2 y θ_3 que forma la fuerza ejercida en A con los ejes coordenados.

2.74 Una placa circular horizontal se sostiene mediante tres alambres que forman ángulos de 30° respecto de la vertical y se encuentran unidos a un soporte en D. Si se sabe que la componente *z* de la fuerza ejercida por el alambre BD sobre el punto B es 14 N, determine *a*) la tensión en el alambre AD *b*) los ángulos θ_1 , θ_2 y θ_3 que forma la fuerza ejercida en B con los ejes coordenados.

2.75 Una placa circular horizontal se sostiene mediante tres alambres que forman ángulos de 30° respecto de la vertical y se encuentran unidos a un soporte en D. Si se sabe que la tensión en el alambre CD es de 80 lb, determine *a*) las componentes *x* de la fuerza ejercida por el alambre CD sobre el punto C *b*) los ángulos θ_1 , θ_2 y θ_3 que forma la fuerza ejercida en C con los ejes coordenados.

2.76 Una placa circular horizontal se sostiene mediante tres alambres que forman ángulos de 30° respecto de la vertical y se encuentran unidos a un soporte en D. Si se sabe que la componente *x* de la fuerza ejercida por el alambre CD sobre el punto C es de 20 N, determine *a*) la tensión en el alambre AD *b*) los ángulos θ_1 , θ_2 y θ_3 que forma la fuerza ejercida en C con los ejes coordenados.

2.77 El extremo del cable coaxial AF se une al poste AB, el cual está sostenido por los cables de alambre AC y AD. Si se sabe que la tensión en el alambre AD es de 20 lb, determine las componentes *x* y *y* de la fuerza ejercida por este alambre sobre el poste. Los ángulos θ_1 , θ_2 y θ_3 que forma la fuerza con los ejes coordenados.

2.78 El extremo del cable coaxial AF se une al poste AB, el cual está sostenido por los tirantes de alambre AC y AD. Si se sabe que la tensión en el alambre AD es de 35 lb, determine *a*) las componentes *x* y *y* de la fuerza ejercida por este alambre sobre el poste *b*) los ángulos θ_1 , θ_2 y θ_3 que forma la fuerza con los ejes coordenados.

2.79 Determine la magnitud y dirección de la fuerza $\mathbf{F} = (320 \text{ N})\mathbf{i} + (400 \text{ N})\mathbf{j} - (250 \text{ N})\mathbf{k}$.

2.80 Determine la magnitud y dirección de la fuerza $F = 240 \text{ N}$ $470 \text{ Nj} + (680 \text{ N})k$.

2.81 Una fuerza actúa en el origen de un sistema coordenado en la dirección definida por los ángulos $\theta_1 = 45^\circ$, $\theta_2 = 60^\circ$ y $\theta_3 = 90^\circ$. Si se sabe que la componente x de la fuerza es de -52 lb , determine a) el ángulo θ_1 , b) las componentes restantes y la magnitud de la fuerza.

2.82 Una fuerza actúa en el origen de un sistema coordenado en la dirección definida por los ángulos $\theta_1 = 55^\circ$ y $\theta_2 = 45^\circ$. Si se sabe que la componente y de la fuerza es de -48 lb , que $F_z = 100 \text{ lb}$ y $\theta_3 = 90^\circ$, determine las componentes restantes y la magnitud de la fuerza.

2.83 Una fuerza F de magnitud 210 N actúa en el origen de un sistema coordenado. Si se sabe que $F_x = 80 \text{ N}$, $\theta_1 = 151.2^\circ$ y $F_y < 0$, determine a) las componentes F_y y F_z , b) los ángulos θ_2 y θ_3 .

2.84 Una fuerza F de magnitud 230 N actúa en el origen de un sistema coordenado. Si se sabe que $\theta_1 = 32.5^\circ$, $F_y = -60 \text{ N}$ y $F_z > 0$, determine a) las componentes F_x y F_z , b) los ángulos θ_2 y θ_3 .

2.85 Una torre de transmisión se sostiene mediante tres alambres, los cuales están anclados por medio de pernos en B , C y D . Si la tensión en el alambre AB es de 525 lb , determine las componentes de la fuerza ejercida por el alambre sobre el perno en B .

2.86 Una torre de transmisión se sostiene mediante tres alambres, los cuales están anclados por medio de pernos en B , C y D . Si la tensión en el alambre AD es de 315 lb , determine las componentes de la fuerza ejercida por el alambre sobre el perno en D .

2.87 Un marco ABC está sostenido en parte por el cable DBE , el cual pasa a través de un pulley sin fricción en B . Si se sabe que la tensión en el cable es de 450 N , determine las componentes de la fuerza ejercida por el cable sobre el soporte en D .



Figura P2.85 y P2.86

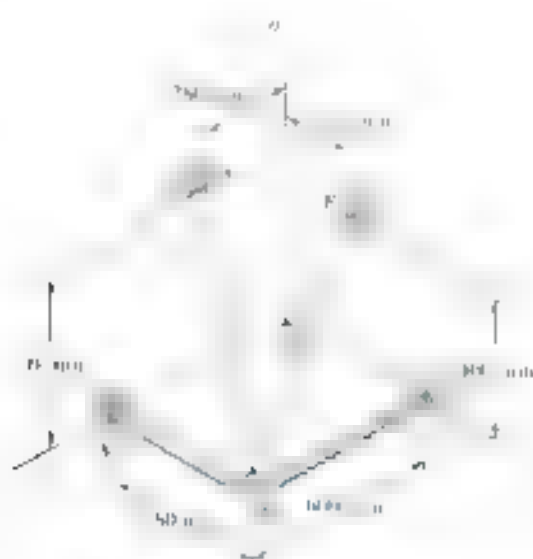


Figura P2.87



Figura P2.91 y P2.92

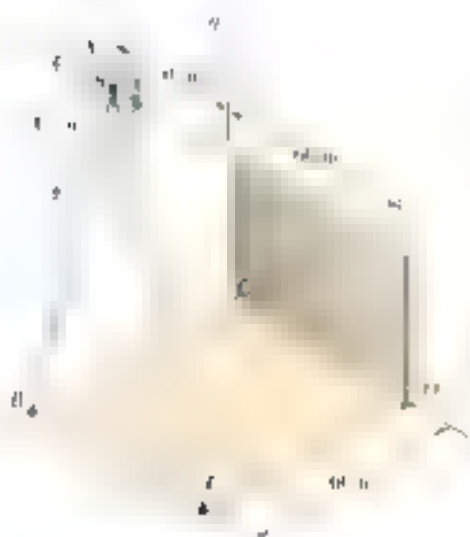


Figura P2.93 y P2.94

2.88 Para el sistema de cables del problema 2.87, determine las componentes de la fuerza ejercida por el cable sobre el soporte en E.

2.89 Si se sabe que la tensión en el cable AB es de 1 425 N, determine las componentes de la fuerza ejercida sobre la placa en B.



Figura P2.86 y P2.89

2.90 Si se sabe que la tensión en el cable AC es de 2 130 N, determine las componentes de la fuerza ejercida sobre la placa en C.

2.91 Determine la magnitud y la dirección de la resultante de las dos fuerzas mostradas en la figura, si se sabe que $P = 300$ N y $Q = 400$ N.

2.92 Determine la magnitud y la dirección de la resultante de las dos fuerzas mostradas en la figura, si se sabe que $P = 400$ N y $Q = 300$ N.

2.93 Si se sabe que las tensiones en los cables AB y AC son de 425 N y 510 N, respectivamente, determine la magnitud y la dirección de la resultante de las fuerzas ejercidas en A por los dos cables.

2.94 Si se sabe que las tensiones en los cables AB y AC son de 510 N y 425 N, respectivamente, determine la magnitud y la dirección de la resultante de las fuerzas ejercidas en A por los dos cables.

2.95 Para el marco del problema 2.87, determine la magnitud y la dirección de la resultante de las fuerzas ejercidas por el cable en B o la tensión en el cable es de 785 N.

2.96 Si se sabe que, para los cables del problema 2.90, la tensión en el cable AB es de 1 425 N y la tensión en el cable AC es de 2 130 N, determine la magnitud y dirección de la resultante de las fuerzas ejercidas en A por los dos cables.

2.97 El extremo del cable cruzado AB se une al poste AB , el cual está sostenido por los cables de alambre AC y AD . Si se sabe que la tensión en el alambre AC es de 900 N , que la resultante de las fuerzas ejercidas en A por los alambres AC y AD actúa en el plano xy , determine la tensión en AD y la magnitud y la dirección de la resultante de las tres fuerzas.

2.98 El extremo del cable cruzado AB se une al poste AB , el cual está sostenido por los cables de alambre AC y AD . Si se sabe que la tensión en el alambre AD es de 250 lb , que la resultante de las fuerzas ejercidas en A por los alambres AC y AD actúa en el plano xy , determine a) la tensión en AC , b) la magnitud y la dirección de la resultante de las tres fuerzas.



Figura P2.97 y P2.98

2.15 EQUILIBRIO DE UNA PARTICULA EN EL ESPACIO

De acuerdo con la definición dada en la sección 2.1, un partícula está en equilibrio si la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre ella es cero. Las componentes R_x , R_y y R_z de la resultante están dadas por las ecuaciones (2.34), al expresar que las componentes de la resultante son cero, se escriben:

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0 \quad (2.34)$$

Las ecuaciones (2.34) representan las condiciones necesarias y suficientes para lograr el equilibrio de una partícula en el espacio. Estas ecuaciones pueden usarse para resolver problemas que tratan con el equilibrio de una partícula, como los que más adelante se nos lo tres se presentan.

Para resolver tales problemas, se traza un diagrama de cuerpo libre donde se muestre a la partícula en equilibrio y todas las fuerzas que actúan sobre ella. Deben escribirse las ecuaciones de equilibrio (2.34) y despejar las tres incógnitas. En los tipos de problemas más comunes, esas incógnitas representan 1) las tres componentes de una sola fuerza o 2) la magnitud de tres fuerzas cada una con dirección conocida.



Fotografía 2.2 Como la tensión presente en cables cables que sostienen al dispositivo de carga no se puede encontrar mediante las ecuaciones (2.34), es posible obtener una relación entre las tensiones considerando el equilibrio del gancho.



PROBLEMA RESUELTO 2.9

Un cilindro de 200 kg se suspende por cables de dos cables AB y AC que en A están anclados a la pared. Las abscisas de A, B y C son de 10 m, 2 m y 12 m, respectivamente. La fuerza horizontal P actúa perpendicular a la pared al sistema de cables. Determine la magnitud de P y la tensión en cada cable.



SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre: Se escoge el punto A como cuerpo libre, en el punto A se aplican las fuerzas de tensión de los cables AB y AC, la fuerza horizontal P y el peso W.

Con la introducción de los vectores unitarios i , j y k , se descompone cada fuerza en sus componentes rectangulares.

$$\mathbf{P} = P\mathbf{i}$$

$$\mathbf{W} = -mg\mathbf{j} = -(200 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)\mathbf{j} = -(1962 \text{ N})\mathbf{j}$$

En el caso de T_{AB} y T_{AC} , es necesario determinar primero las componentes rectangulares de los vectores \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{AC} representados con λ_{AB} y λ_{AC} en forma de λ_{AB} se expresa:

$$\overrightarrow{AB} = -(1.2 \text{ m})\mathbf{i} + (10 \text{ m})\mathbf{j} + (4 \text{ m})\mathbf{k} \quad AB = 12.862 \text{ m}$$

$$\lambda_{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} = -0.0933\mathbf{i} + 0.7775\mathbf{j} + 0.3120\mathbf{k}$$

$$\mathbf{T}_{AB} = T_{AB}\lambda_{AB} = -0.0933T_{AB}\mathbf{i} + 0.7775T_{AB}\mathbf{j} + 0.3120T_{AB}\mathbf{k} \quad (2)$$

Al representar con λ_{AC} el vector unitario a lo largo de AC se escribe en forma semejante:

$$\overrightarrow{AC} = -(1.2 \text{ m})\mathbf{i} + (10 \text{ m})\mathbf{j} - (10 \text{ m})\mathbf{k} \quad AC = 14.183 \text{ m}$$

$$\lambda_{AC} = \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} = -0.08455\mathbf{i} + 0.7046\mathbf{j} - 0.7046\mathbf{k}$$

$$\mathbf{T}_{AC} = T_{AC}\lambda_{AC} = -0.08455T_{AC}\mathbf{i} + 0.7046T_{AC}\mathbf{j} - 0.7046T_{AC}\mathbf{k} \quad (3)$$

Condiciones de equilibrio: Puesto que A está en equilibrio se debe tener $\Sigma \mathbf{F} = 0$:

$$\mathbf{T}_{AB} + \mathbf{T}_{AC} + \mathbf{P} + \mathbf{W} = 0$$

o con la sustitución de (1), (2) y (3) para las fuerzas y factorizando i , j y k :

$$\begin{aligned} (-0.0933T_{AB} - 0.08455T_{AC} + P) &= 0 \\ (0.7775T_{AB} + 0.7046T_{AC} - 1962 \text{ N}) &= 0 \\ (0.3120T_{AB} - 0.7046T_{AC}) &= 0 \end{aligned}$$

Al hacer los coeficientes de i , j y k iguales a cero, se escriben las tres ecuaciones de equilibrio que representan la suma de las componentes rectangulares con, respectivamente, iguales a cero.

$$\Sigma F_x = 0: \quad (-0.0933T_{AB} - 0.08455T_{AC} + P) = 0$$

$$\Sigma F_y = 0: \quad (0.7775T_{AB} + 0.7046T_{AC} - 1962 \text{ N}) = 0$$

$$\Sigma F_z = 0: \quad (0.3120T_{AB} - 0.7046T_{AC}) = 0$$

Con la solución de estas ecuaciones se obtiene:

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

A continuación se va a explicar cómo resolver y plantear la resolución de los problemas planteados en la sección anterior. Se debe ser consciente de que los problemas planteados en esta sección solamente se aplican a los casos que se plantean en la sección anterior, es decir, a los problemas que se plantean en la sección anterior.

La solución consistirá de los siguientes pasos:

1. Se debe plantear el problema en forma de ecuaciones. Esto consiste en mostrar la ecuación que relaciona las fuerzas que actúan sobre la cuerda. En el diagrama se debe indicar con claridad la dirección de las fuerzas, es decir, si se trata de una fuerza que actúa en la dirección de la cuerda o si se trata de una fuerza que actúa en la dirección perpendicular a la cuerda.

2. Se debe plantear el problema en forma de ecuaciones. Esto consiste en mostrar la ecuación que relaciona las fuerzas que actúan sobre la cuerda. En el diagrama se debe indicar con claridad la dirección de las fuerzas, es decir, si se trata de una fuerza que actúa en la dirección de la cuerda o si se trata de una fuerza que actúa en la dirección perpendicular a la cuerda.

$$F = F_A = \frac{p}{d} (d_i l + d_j + d_k)$$

Donde $d = d_i + d_j + d_k$ son las distancias de las partes del diagrama. En este caso, se debe indicar con claridad la dirección de las fuerzas, es decir, si se trata de una fuerza que actúa en la dirección de la cuerda o si se trata de una fuerza que actúa en la dirección perpendicular a la cuerda.

3. Se debe plantear el problema en forma de ecuaciones. Esto consiste en mostrar la ecuación que relaciona las fuerzas que actúan sobre la cuerda. En el diagrama se debe indicar con claridad la dirección de las fuerzas, es decir, si se trata de una fuerza que actúa en la dirección de la cuerda o si se trata de una fuerza que actúa en la dirección perpendicular a la cuerda.

Problemas



Figura P2.99, P2.100, P2.101 y P2.102

2.99 Se usan tres cables para amarrar el globo que se muestra en la figura. Determine la fuerza vertical P que ejerce el globo en A , si se sabe que la tensión en el cable AB es de 250 N .

2.100 Se usan tres cables para amarrar el globo que se muestra en la figura. Determine la fuerza vertical P que ejerce el globo en A , si se sabe que la tensión en el cable AC es de 444 N .

2.101 Se usan tres cables para amarrar el globo que se muestra en la figura. Determine la fuerza vertical P que ejerce el globo en A , si se sabe que la tensión en el cable AD es de 483 N .

2.102 Se usan tres cables para amarrar el globo que se muestra en la figura. Si se sabe que el globo ejerce una fuerza vertical de 500 N en A , determine la tensión en cada cable.

2.103 Tres cables sostienen una caja como se muestra en la figura. Determine el peso de la caja, si se sabe que la tensión en el cable AB es de 750 lb .

2.104 Tres cables sostienen una caja como se muestra en la figura. Determine el peso de la caja, si se sabe que la tensión en el cable AD es de 600 lb .



Figura P2.103, P2.104, P2.105 y P2.106

2.105 Tres cables sostienen una caja como se muestra en la figura. Determine el peso de la caja, si se sabe que la tensión en el cable AC es de 750 lb .

2.106 Tres cables sostienen una caja de 1500 lb como se muestra en la figura. Determine la tensión en cada cable.

2.107 Los cables están conectados en A, donde se aplican las fuerzas P y Q , como se muestra en la figura. Si se sabe que $Q = 0$, encuentre el valor de P para el cual la tensión en el cable AD es de 305 N .

2.108 Tres cables están conectados en A, donde se aplican las fuerzas P y Q , como se muestra en la figura. Si se sabe que $P = 1\,200\text{ N}$, encuentre los valores de Q para los cuales el cable AD está tenso.

2.109 Una torre de transmisión se sostiene por medio de tres alambres que están unidos a una articulación en A y se anclan mediante pernos en B, C y D. Si la tensión en el alambre AB es de 630 lb , determine la fuerza vertical P ejercida por la torre sobre la articulación en A.

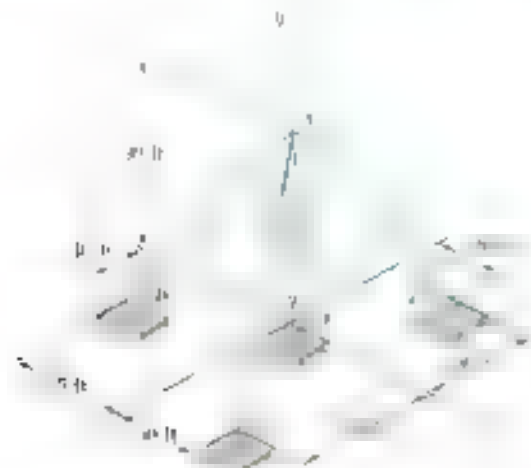


Figura P2.109 y P2.110

2.110 Una torre de transmisión se sostiene por medio de tres alambres que están unidos a una articulación en A y se anclan mediante pernos en B, C y D. Si la tensión en el alambre AC es de 450 lb , determine la fuerza vertical P ejercida por la torre sobre la articulación en A.

2.111 Una placa rectangular está sustentada por tres cables como se muestra en la figura. Si se sabe que la tensión en el cable AC es de 60 N , determine el peso de la placa.

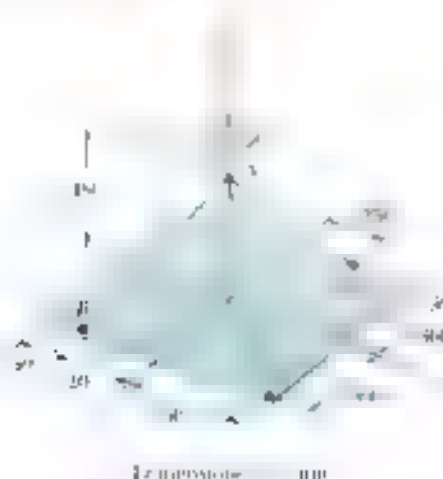


Figura P2.111 y P2.112

2.112 Tres cables sostienen una placa rectangular, como se muestra en la figura. Si se sabe que la tensión en el cable AC es de 520 N , determine el peso de la placa.

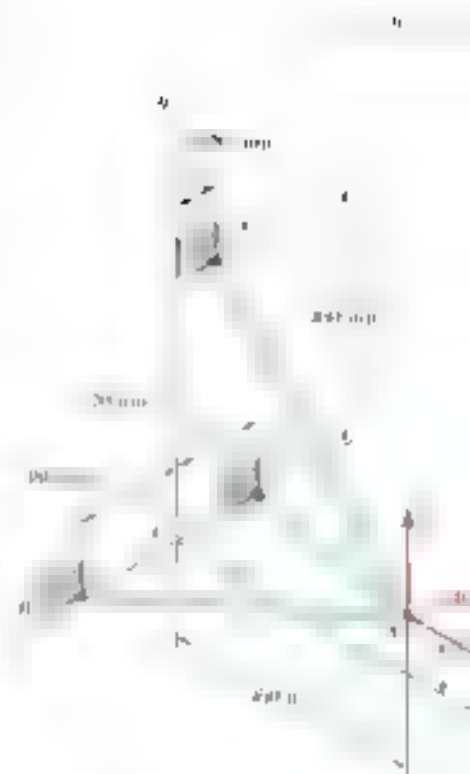


Figura P2.107 y P2.108

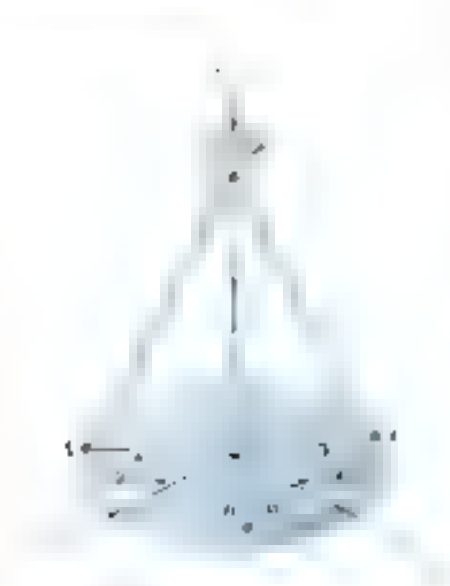


Figura P2.114



Figura P2.119

2.113 Para la torre de transmisión de los problemas 2.109 y 2.110, determine la tensión en cada alambre si se sabe que la torre ejerce una fuerza vertical ascendente de 2 000 lb sobre la articulación en A.

2.114 Una placa circular horizontal que pesa 60 lb está suspendida de tres alambres que forman ángulos de 30° respecto de la vertical y se encuentran unidos a un soporte en D. Determine la tensión en cada alambre.

2.115 Para la placa rectangular de los problemas 2.111 y 2.112, determine la tensión en cada uno de los tres cables si se sabe que el peso de la placa es de 702 N.

2.116 Para el sistema de cables de los problemas 2.107 y 2.108, determine la tensión en cada cable si se sabe que $P = 2\ 850\text{ N}$ y $Q = 0$.

2.117 Para el sistema de cables de los problemas 2.107 y 2.108, determine la tensión en cada cable si se sabe que $P = 2\ 800\text{ N}$ y $Q = 570\text{ N}$.

2.118 Para el sistema de cables de los problemas 2.107 y 2.108, determine la tensión en cada cable si se sabe que $P = 2\ 800\text{ N}$ y $Q = -576\text{ N}$. Q tiene una dirección descendente.

2.119 Dos trabajadores descargan de un camión un contrapeso de 200 lb de hierro fundido usando dos cuerdas y una rampa con tracción. Si se sabe que en el instante mostrado el contrapeso está inmóvil, determine la tensión en cada cuerda si las coordenadas de posición de los puntos son A(0, -30 in., -10 in.), B(-40 in., 50 in., 0) y C(45 in., 40 in., 0), respectivamente. Suponga que no hay fricción entre la rampa y el contrapeso. (Sugerencia: Puesto que no hay fricción, la fuerza ejercida por la rampa sobre el contrapeso debe ser perpendicular a éste.)

2.120 Resuelva el problema 2.119 ahora suponga que no tienen trabajadores pero una fuerza $P = 100\text{ lb}$ actúa en el centro de la

2.121 Un contenedor de peso W está suspendido del arco A. El cable BAC pasa a través del arco y se une a los soportes fijos en B y C. Dos fuerzas $P = P_1$ y $Q = P_2$ se aplican en el arco para mantener al recipiente en la posición mostrada. Determine P y Q si $W = 376\text{ N}$. (Sugerencia: La tensión en la misma en ambos tramos del cable BAC.)



Figura P2.121

2.122 Para el sistema de problema 2.121, determine W y Q si se sabe que $P = 164 \text{ N}$.

2.123 Un contenedor de peso W está suspendido del anillo A , al cual se une por el extremo M una fuerza P se aplica al extremo E de un cable que pasa sobre una polea en B y a través del anillo A y que está anclado al punto C . Se sabe que $W = 800 \text{ N}$ y $P = 1000 \text{ N}$. Sugiera: La tensión es la misma en todos los tramos del cable $EBAD$.



Figura P2.123

2.124 Si la tensión en el cable AC del sistema descrito en el problema 2.123 es de 400 N , determine la magnitud de la fuerza P y el peso del contenedor.

2.125 Los collarines A y B están unidos por medio de un alambre de 25 in de largo y pueden deslizarse libremente sin fricción sobre las varillas X y Y . La fuerza Q de 60 lb se aplica al collarín B como se indica. Determine $a)$ la tensión en el alambre cuando $x = 9 \text{ in}$, y $b)$ la magnitud correspondiente de la fuerza P que debe aplicarse para mantener el sistema en equilibrio.

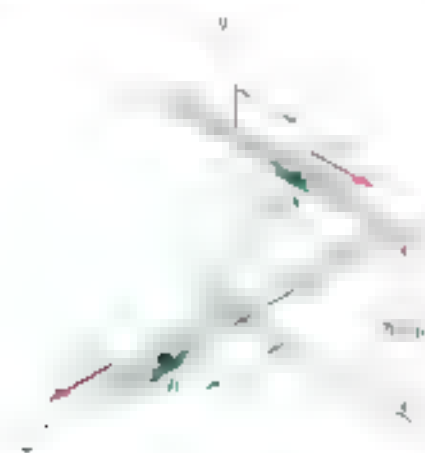


Figura P2.125 y P2.126

2.126 Los collarines A y B están unidos por medio de un alambre de 25 in de largo y pueden deslizarse libremente sin fricción sobre las varillas. Determine las distancias x y y para las cuales se mantiene en equilibrio el sistema cuando $P = 120 \text{ lb}$ y $Q = 60 \text{ lb}$.

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 2

En este capítulo se estudió el efecto de fuerzas sobre partículas, es decir, sobre cuerpos no deformables, tales que todas las fuerzas que actúan sobre ellos se puede suponer que se aplican en el mismo punto.

Las fuerzas son cantidades vectoriales, se caracterizan por un punto de aplicación, una magnitud y una dirección, y se suman o restan como los vectores, por lo tanto (Fig. 2.35) la magnitud y dirección del resultado R de dos fuerzas P y Q se pueden determinar usando la regla del triángulo o por trigonometría, alizando sucesivamente la línea de los segundos y la ley de los senos, si dichos triángulos son (2.4).

Cualquier fuerza dada que actúe sobre una partícula puede descomponerse en dos o más componentes, es decir, se puede reemplazar por dos o más fuerzas que tengan el mismo efecto sobre la partícula. Se puede descomponer una fuerza F en dos componentes P y Q al trazar un paralelogramo que tenga a F por su diagonal, o, como las componentes P y Q son triángulos rectos, por los dos lados adyacentes, lo que da lugar a los triángulos rectos, y se pueden determinar ya sea en gráficas o por trigonometría (sección 2.6).

Se dice que una fuerza F se ha dividido en dos componentes rectangulares si sus componentes F_x y F_y son perpendiculares entre sí y se originan al mismo punto (Fig. 2.36). Al introducir los vectores unitarios i y j en lugar de los ejes x y y respectivamente, se escribe (sección 2.7)

$$F_x = F_x i \quad F_y = F_y j \quad (2.6)$$

$$F = F_x i + F_y j \quad (2.7)$$

donde F_x y F_y son las componentes escalares de F . Estas pueden ser positivas o negativas, se definen por las relaciones

$$F_x = F \cos \theta \quad F_y = F \sin \theta \quad (2.8)$$

Cuando se dan las componentes rectangulares F_x y F_y de una fuerza F , el ángulo θ que define la dirección de la fuerza se puede obtener al escribir

$$\tan \theta = \frac{F_y}{F_x} \quad (2.9)$$

La magnitud F de la fuerza se puede obtener al resolver una de las relaciones (2.8) al aplicar el teorema de Pitágoras y escribir

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad (2.10)$$

Cuando tres o más fuerzas coplanarias actúan sobre una partícula, las componentes rectangulares de su resultado R se pueden

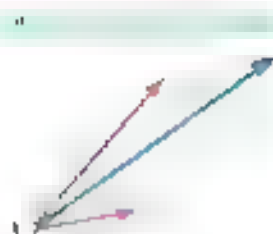


Figura 2.35



Figura 2.36

Componentes rectangulares.

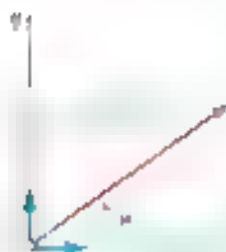


Figura 2.37

Resolución de una fuerza en componentes rectangulares.

obtener al sumar las componentes correspondientes de las fuerzas dadas (sección 2.4). Se tiene

$$R_x = \sum F_x, \quad R_y = \sum F_y \quad (2.13)$$

La magnitud y dirección de \mathbf{R} se pueden determinar entonces por relaciones semejantes a las ecuaciones (2.1) y (2.10) de la ecuación (2.3).

Una fuerza \mathbf{F} en un espacio tridimensional se puede describir mejor en términos de sus componentes \mathbf{F}_x , \mathbf{F}_y y \mathbf{F}_z (sección 2.4). Al introducir por medio de θ_x , θ_y , θ_z respectivamente los ángulos que \mathbf{F} forma con los ejes x , y y z (figura 2.38), se tiene

$$F_x = F \cos \theta_x, \quad F_y = F \cos \theta_y, \quad F_z = F \cos \theta_z \quad (2.14)$$

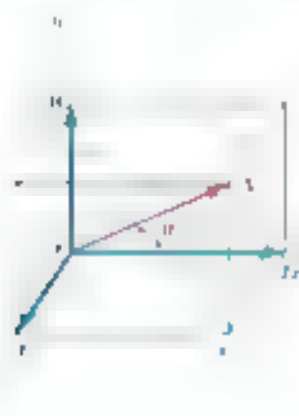
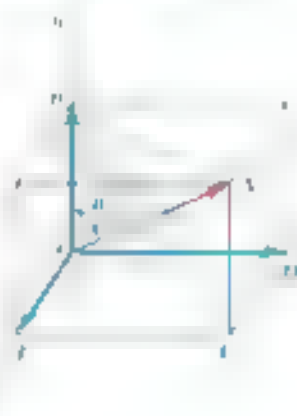
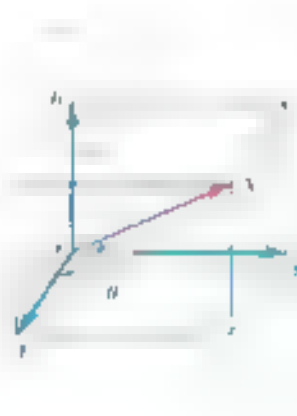


Figura 2.38

(a)



(b)



(c)

Los senos de θ_x , θ_y y θ_z se conocen como los *senos directores* de la fuerza \mathbf{F} . Con la introducción de los vectores unitarios \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} a lo largo de los ejes coordenados, se escribe

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} \quad (2.20)$$

o

$$\mathbf{F} = F(\cos \theta_x \mathbf{i} + \cos \theta_y \mathbf{j} + \cos \theta_z \mathbf{k}) \quad (2.21)$$

como lo muestra la figura 2.39. El \mathbf{F} es el producto de su magnitud F y del vector unitario

$$\lambda = \cos \theta_x \mathbf{i} + \cos \theta_y \mathbf{j} + \cos \theta_z \mathbf{k}$$

Puesto que la magnitud de λ es igual a la unidad, se tiene que

$$\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1 \quad (2.24)$$

Como las componentes F_x , F_y y F_z de una fuerza \mathbf{F} se proporcionan, la magnitud F de la fuerza se encuentra escribiendo

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad (2.18)$$

Los cosenos directores de \mathbf{F} se obtienen a partir de las ecuaciones (2.14). Se tiene

$$\cos \theta_x = \frac{F_x}{F}, \quad \cos \theta_y = \frac{F_y}{F}, \quad \cos \theta_z = \frac{F_z}{F} \quad (2.25)$$

Cuando una fuerza \mathbf{F} se define en un espacio tridimensional por medio de su magnitud F y de dos puntos A y B se debe seguir a

www.geocienciasvirtuales.blogspot.com.co



Figura 2.39

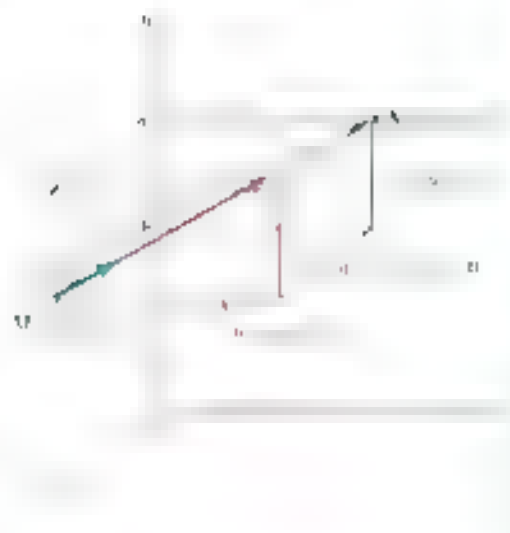
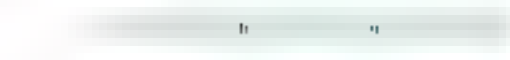


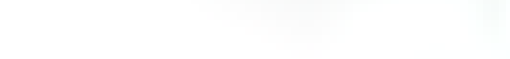
Figura 2.40



Equilibrio de una partícula



Diagrama de cuerpo libre



Equilibrio en el espacio



de acción (sección 2.13), sus componentes rectangulares se pueden obtener de la siguiente manera: primero se calcula el vector \overrightarrow{MN} por los teoremas $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M} - \overrightarrow{N}$ y sus componentes d_x , d_y y d_z (figura 2.40); se escribe

$$\overrightarrow{MN} = d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} + d_z \mathbf{k} \quad (2.26)$$

Después se obtiene el vector unitario λ a lo largo de la línea de acción de \mathbf{F} al dividir \overrightarrow{MN} entre su magnitud $MN = d$:

$$\lambda = \frac{\overrightarrow{MN}}{MN} = \frac{1}{d}(d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} + d_z \mathbf{k}) \quad (2.27)$$

Recordando que \mathbf{F} es igual al producto de F y λ , se tiene

$$\mathbf{F} = F\lambda = \frac{F}{d}(d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} + d_z \mathbf{k}) \quad (2.28)$$

de lo cual se desprende: problemas resueltos 2.5 y 2.5. Las componentes escalares de \mathbf{F} son, respectivamente,

$$F_x = \frac{F}{d} d_x, \quad F_y = \frac{F}{d} d_y, \quad F_z = \frac{F}{d} d_z \quad (2.29)$$

Cuando *dos o más fuerzas* actúan sobre una partícula en el *espacio tridimensional*, las componentes rectangulares de su resultante \mathbf{R} se pueden obtener al sumar cada una a lo largo de las componentes correspondientes de las fuerzas (sección 2.4). Si se tiene

$$d = \sum F, \quad R = \sum F, \quad R = \sum F \quad (2.30)$$

La magnitud y dirección de \mathbf{R} se pueden determinar en un instante a partir de las ecuaciones escalares a las ecuaciones 2.29 y 2.25. Véase problema resuelto 2.6.)

Se dice que una partícula está en *equilibrio* cuando la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre ella es cero (sección 2.4). La partícula permanece en reposo o se mueve con velocidad constante en una línea recta (véase el capítulo 4). Véase también el problema resuelto 2.10.)

Para resolver un problema se recomienda: a) partiendo de un diagrama de cuerpo libre, dibujar un *diagrama de cuerpo libre* de la partícula, mostrando todas las fuerzas que actúan sobre ella (sección 2.11); b) *sub-actuar las fuerzas* que actúan sobre la partícula, se puede dibujar un *triángulo de fuerzas* para expresar que la partícula está en equilibrio (véase el capítulo 4). c) *resolver* el problema gráficamente o por trigonometría para no más de tres incógnitas (véase problema resuelto 2.4). Si se *resuelve* el problema por trigonometría, se debe *resolver* el problema por trigonometría para no más de tres incógnitas (véase problema resuelto 2.4).

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0 \quad (2.31)$$

Estas ecuaciones pueden usarse para resolver los problemas de dos incógnitas (problema resuelto 2.6).

Cuando una partícula está en *equilibrio en el espacio tridimensional* (sección 2.11), de compensarse y resolverse las tres ecuaciones de equilibrio

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum F_z = 0 \quad (2.32)$$

Estas ecuaciones se pueden resolver para no más de tres incógnitas (véase problema resuelto 2.6).

Problemas de repaso

2.127 La dirección de las fuerzas de 75 lb puede variar pero el ángulo entre las fuerzas siempre es de 50° . Determine el valor de α para el cual la resultante de las fuerzas que actúan en A tiene una dirección horizontal para $\alpha = 20^\circ$ hasta 60° .

2.128 Se pretende sacar una estaca del suelo por medio de dos cuerdas, como se muestra en la figura. Si se conoce la magnitud y la dirección de la fuerza P que debe ejercerse en la otra cuerda si la resultante de ambas fuerzas debe ser una fuerza horizontal, encuentre α .

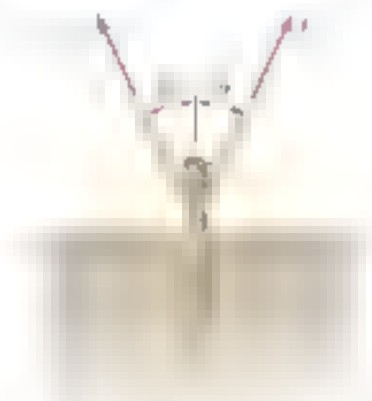


Figura P2.128

2.129 El elemento BD ejerce sobre el elemento ABC una fuerza P de magnitud 40 lb. Si se sabe que P puede tener (a) cualquier dirección o (b) la dirección que haga mínima la magnitud de la fuerza P y α sea cualquier ángulo horizontal, encuentre α .



Figura P2.127



Figura P2.129

2.130 Dos cables se anclan en C y se cargan como se muestra en la figura. Determine la tensión a en el cable AC y b en el cable BC.



Figura P2.130

2.131 Dos cables se anclan en C y se cargan como se muestra en la figura. Si se sabe que $P = 360$ N, determine la tensión a en el cable AC y b en el cable BC.

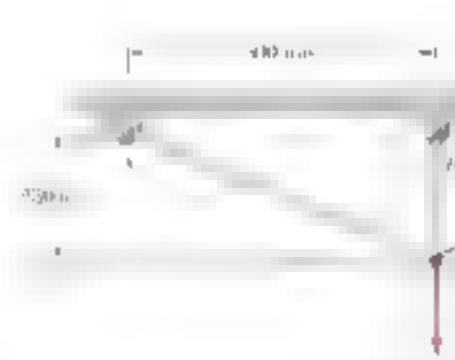


Figura P2.131 y P2.132

2.132 Dos cables se anclan en C y se cargan como se muestra en la figura. Determine el rango de valores de P para los cuales ambos cables permanecen tensos.



Figura P2.134

2.133 Una fuerza actúa en el origen de un sistema coordenado en la dirección definida por los ángulos $\theta_x = 69.3^\circ$ y $\theta_z = 57.9^\circ$. Si se sabe que la componente y de la fuerza es 100 N , determine las componentes x y z de la fuerza y la magnitud de la fuerza.

2.134 El cable AB tiene 65 ft de largo y una tensión de 3 900 lb. Determine x , y y z de la fuerza ejercida por el cable sobre el punto B . Las proyecciones θ_x , θ_y , θ_z que el cable forma con los ejes x , y y z son:

2.135 A fin de mover un cañón volcánico, se atan dos cables en A y se anclan al suelo en los puntos B y C . Se sabe que la tensión en el cable AB es de 10 kN y en el cable AC es de 7.5 kN. determine la magnitud y la dirección de la resultante de las fuerzas ejercidas en A por los dos cables.



Figura P2.135

2.136 Un contenedor de peso $W = 1\,165 \text{ N}$ se sostiene por medio de tres cables como se muestra en la figura. Determine la tensión en cada cable.



Figura P2.136

2.137 Los alambres A y B se conectan por medio de un alfiler de 525 mm de largo y están sujetos a la acción de las fuerzas mostradas en la figura. Si una fuerza $P = 134 \text{ N}$ se aplica al collarín A , determine (a) la tensión en el alambre cuando $y = 155 \text{ mm}$ y (b) la magnitud de la fuerza Q requerida para mantener el equilibrio del sistema.

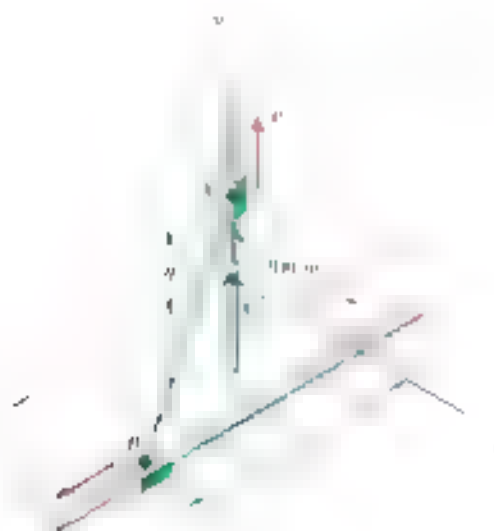


Figure P2.137

2.138 Retornar el problema 2.137 ahora suponga que $y = 275 \text{ mm}$.



2.C1 Utilice el software de cálculo de la tensión en la cuerda para determinar la tensión en la cuerda en la posición $\theta = 0^\circ$ y $\theta = 90^\circ$. Utilice este software para resolver los problemas 2.32, 2.33, 2.35 y 2.38.

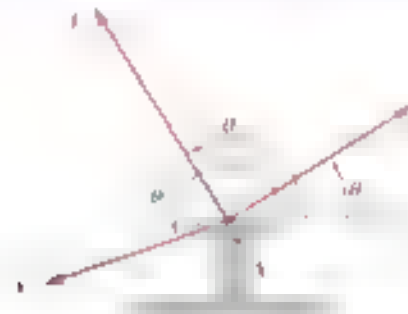


Figura P2.C1

2.C2 Una carga P está sostenida por dos cables como se muestra en la figura. Determine el software de cálculo de la tensión en la cuerda para cualquier valor de P y θ que se encuentren desde $\theta_1 = \beta = 90^\circ$ hasta $\theta_2 = 0^\circ = \alpha$, con incrementos dados $\Delta\theta$. Con el software determine para los incrementos de θ los valores de P que se encuentran en la cuerda para valores de θ que varían de $\theta = \theta_1$ a $\theta = \theta_2$ con un valor de θ para el cual la tensión en los cables sea mínima posible. (a) $\theta_1 = 90^\circ$, $\theta_2 = 0^\circ$, $\Delta\theta = 5^\circ$.

- 1) $\alpha = 35^\circ$, $\beta = 75^\circ$, $P = 400$ lb, $\Delta\theta = 5^\circ$
- 2) $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $P = 600$ lb, $\Delta\theta = 5^\circ$
- 3) $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $P = 3500$ lb, $\Delta\theta = 3^\circ$

Figura P2.C2

2.C3 Una persona de masa m se sujeta a una cuerda en la posición $\theta = 90^\circ$ que está unida a los soportes A y B , separados por una distancia de 20 m. El peso promedio de la cuerda es w que varía de los valores de 500 N/m a 1000 N/m. Determine el software de cálculo de la tensión en la cuerda para cualquier valor de w y m que se encuentren desde $w_1 = 500$ N/m hasta $w_2 = 1000$ N/m, con incrementos dados Δw . Con el software determine para los incrementos de w los valores de m que se encuentran en la cuerda para valores de m que varían de $m = m_1$ a $m = m_2$ con un valor de m para el cual la tensión en los cables sea mínima posible. (a) $w_1 = 500$ N/m, $w_2 = 1000$ N/m, $\Delta w = 50$ N/m.



Figura P2.C3

2.C4 Utilice software para determinar la magnitud y la dirección de la resultante de las fuerzas \vec{F}_1 donde $\vec{F}_1 = -2\hat{i} + 3\hat{j}$ que se aplica en el punto A_1 con coordenadas x_1, y_1 y \vec{F}_2 se sabe que la línea de acción de \vec{F}_2 pasa por el punto A_2 con coordenadas x_2, y_2 . Se debe utilizar el software para resolver los problemas 2.103, 2.104, 2.105 y 2.135.

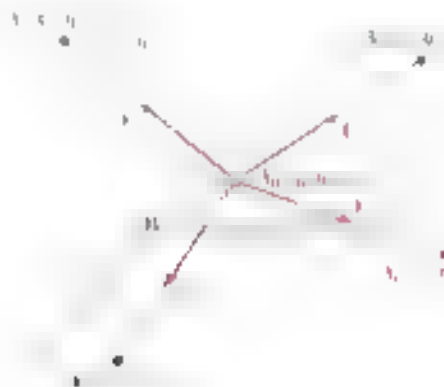


Figura P2.C4

2.C5 Tres cables se unen en los puntos A_1 , A_2 y A_3 , respectivamente y están conectados en el punto A_0 al cual se le aplica una carga \vec{P} con $P = 100 \text{ lb}$. Se debe utilizar el software para resolver los problemas 2.102, 2.106, 2.107 y 2.115.



Figura P2.C5

Las maniobras del USS New Jersey, un buque de guerra de la Armada de los Estados Unidos, se muestran en un documental que relata los eventos ocurridos en la guerra de Corea. En este capítulo se mostrará también las fuerzas ejercidas por los remolcadores sobre el barco durante la guerra y se verá por qué las fuerzas equivalentes ejercidas por un solo remolcador más poderoso.

CAPÍTULO

3

Cuerpos rígidos sistemas equivalentes de fuerza



© 2008 por el Departamento de Ingeniería Civil

Introducción

Fuerzas externas e internas

3.1 Principio de transmisibilidad,

Fuerzas equivalentes

Producto vectorial de dos vectores

Productos vectoriales expresados

en términos de componentes

rectangulares

Momento de una fuerza con

respecto a un punto

Teorema de Varignon

3.11 Componentes rectangulares del

momento de una fuerza

3.19 Producto escalar de dos vectores

3.20 Producto triple mixto de tres

vectores

3.11 Momento de una fuerza con

respecto a un eje dado

Momento de un par

3.1 Pares equivalentes

3.4 Adición o suma de pares

3.5 Los pares pueden representarse

por medio de vectores

3.6 Descomposición de una fuerza

dada en una fuerza en O y un par

3.7 Reducción de un sistema de

fuerzas a una fuerza y un par

3.8 Sistemas equivalentes de fuerzas

3.9 Sistemas equipotentes de vectores

3.20 Otras reducciones de un sistema

de fuerzas

3.11 Reducción de un sistema de

fuerzas a una llave de torsión

o llavero

3.1 INTRODUCCION

En esta introducción se supone que cada uno de los cuerpos considerados puede ser tratado como si fuera una sola partícula. Sin embargo, este supuesto es válido en el caso de que el cuerpo de estudio se encuentre en equilibrio con otras partículas o en el caso de que se trate de un cuerpo rígido que se deforme muy poco. En estos casos, la deformación es tan pequeña que puede ser despreciada. En el presente capítulo se supone que los cuerpos rígidos se comportan como si fueran partículas, es decir, como si fueran puntos.

Aunque el concepto de cuerpo rígido es un ideal, en la práctica se supone que los cuerpos rígidos son aquellos cuerpos que no se deforman. Sin embargo, en la práctica, los cuerpos rígidos son aquellos cuerpos que se deforman muy poco. En estos casos, la deformación es tan pequeña que puede ser despreciada. En el presente capítulo se supone que los cuerpos rígidos se comportan como si fueran partículas, es decir, como si fueran puntos.

En este capítulo se estudia el concepto de fuerza y par, y se estudia la reducción de un sistema de fuerzas a una fuerza y un par. Se estudia también el concepto de momento de una fuerza con respecto a un punto y al eje, y se estudia el concepto de momento de un par. Se estudia también el concepto de producto escalar y producto vectorial, y se estudia el concepto de producto triple mixto.

Después de estudiar estos conceptos, se estudia la reducción de un sistema de fuerzas a una fuerza y un par. Se estudia también el concepto de momento de una fuerza con respecto a un punto y al eje, y se estudia el concepto de momento de un par. Se estudia también el concepto de producto escalar y producto vectorial, y se estudia el concepto de producto triple mixto.

En el presente capítulo se estudia el concepto de fuerza y par, y se estudia la reducción de un sistema de fuerzas a una fuerza y un par. Se estudia también el concepto de momento de una fuerza con respecto a un punto y al eje, y se estudia el concepto de momento de un par. Se estudia también el concepto de producto escalar y producto vectorial, y se estudia el concepto de producto triple mixto.

3.2 FUERZAS EXTERNAS E INTERNAS

Las fuerzas que actúan sobre los cuerpos rígidos se pueden dividir en dos grupos: 1. fuerzas externas y 2. fuerzas internas.

1. Las fuerzas externas representan la acción que ejercen otros cuerpos sobre el cuerpo rígido en consideración. Ellas son las responsables del comportamiento externo del cuerpo rígido. Las fuerzas externas actúan sobre el cuerpo rígido en su totalidad, y no pueden ser despreciadas. En el presente capítulo y en los capítulos 4 y 5 se considerarán solo las fuerzas externas.

2. Las **fuerzas internas** son aquellas que mantienen unidas las partículas que conforman al cuerpo rígido. Si éste está constituido en su estructura por varias partes, las fuerzas que mantienen unidas a dichas partes también se definen como fuerzas internas. Este grupo de fuerzas se estudiará en los capítulos 6 y 7.

Como resultado de fuerzas externas, existiendo las fuerzas que actúan sobre el cuerpo de manera tal que se ajustan al principio por el cual los miembros mediante sus acciones y reacciones forman un sistema 3.17 Las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo se representan en el diagrama de cuerpo libre (figura 3.23). En primer lugar, se debe considerar la acción de la gravedad sobre el cuerpo, es decir, el efecto de la atracción de la Tierra sobre cada una de las partículas que constituyen al cuerpo. Éste se puede representar por medio de una sola fuerza \mathbf{W} . El punto de aplicación de esta fuerza, esto es, el punto en el que actúa la fuerza, se lo considera el centro de gravedad del cuerpo. En el capítulo 6 se verá cómo se pueden determinar los centros de gravedad. El punto \mathbf{W} ha sido colocado sobre el punto de aplicación de todas las fuerzas presentes en el cuerpo, pero podría colocarse en cualquier otro punto, siempre que se considere la fuerza \mathbf{W} como una fuerza actuando en ese punto. Así mismo, las reacciones \mathbf{R}_A y \mathbf{R}_B están indicadas en sus respectivos puntos de aplicación. Se debe tener presente que las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo son:



Figure 3.1



Figure 3.2

Los hombres ejercen la fuerza F al tirar de la cuerda. El punto de aplicación de F es en la mano del hombre. La mano le permite moverse por donde se desea hacia delante o hacia atrás y también puede moverse hacia arriba o hacia abajo. La fuerza externa que se aplica es el tirón efectuado por el otro hombre. Este movimiento del cañón hacia delante, donde en la boca esta mantiene su orientación original (el eje de cañón permanece horizontal y sus lados se mantienen verticales), se conoce como traslación. Otras fuerzas podrían ocasionar un movimiento de rotación (es decir, girar). Por ejemplo, si la fuerza para la potencia es aplicada a la parte delantera del arma, ocasiona que el arma gire sobre el eje de su eje trasero. Este movimiento es una rotación. Por tanto, se puede concluir que cada una de las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo rígido puede ocasionar un movimiento de traslación, rotación o ambas, siempre y cuando dichas fuerzas no coincidan en alguna que sea una

3.1 PRINCIPIO DE TRANSMISIBILIDAD FUERZAS EQUIVALENTES

[illegible]

Figure 2.3

a) de la serie de Fourier de f en S , donde también algunas de las
 condiciones de convergencia están dadas; la estabilidad nos asegura que
 tales series convergen a f en S y que, por lo tanto, f puede ser
 extendida a una serie de Fourier en S . La extensión de f a S es la
 única que puede ser extendida a una serie de Fourier en S .

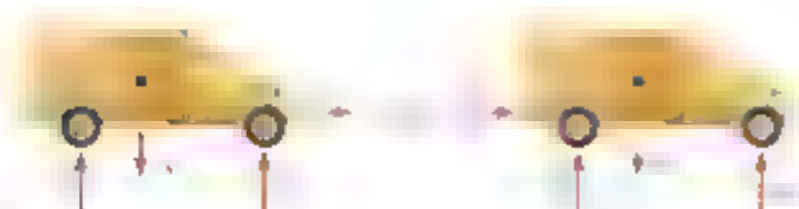
[illegible]

FIGURE 3.4

En el ejemplo del cañón, en primer lugar se observa que la línea de acción de la fuerza \mathbf{F} es una línea horizontal que pasa a través de las defensas delanteras y traseras del cañón (ver fig. 1). Por tanto, cuando lo simplifica de traslatabilidad se puede reemplazar \mathbf{F} por una fuerza equivalente \mathbf{F}' que actúa sobre la tracción trasera. En otras palabras, las condiciones de movimiento y todas las demás fuerzas externas que actúan sobre el cañón (\mathbf{W} , \mathbf{R}_1 y \mathbf{R}_2) permanecen inalteradas si los límites que forman la defensa trasera en lugar de tirar de la defensa delantera.

se puede reemplazar una fuerza \mathbf{F}_1 actuando en la fuerza \mathbf{F}_2 actuando en la misma partícula. Por ejemplo, considere una línea corta AB sobre la cual actúan dos fuerzas opuestas \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 que están $\mathbf{F}_1 = F_1 \mathbf{i}$ y $\mathbf{F}_2 = -F_2 \mathbf{i}$. De acuerdo con el principio de transmisibilidad, la fuerza \mathbf{F}_1 se puede reemplazar por una fuerza \mathbf{F}_2 que tiene la misma magnitud $F_1 = F_2$ pero que actúa en A en lugar de B . Las fuerzas \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 que actúan sobre la misma partícula pueden sumarse de acuerdo a las reglas del capítulo 2 y, como dijimos

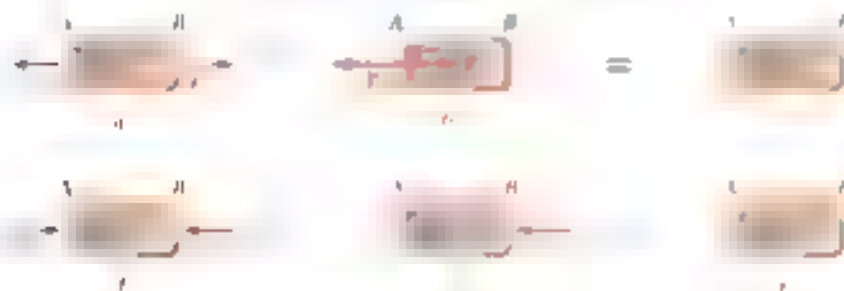


Figure 3.5

fuerzas son iguales y opuestas, su suma es igual a cero. Por tanto, en términos de comportamiento exterior de la barra, sistema de fuerzas original contrastado a la fuerza \vec{F}_0 y, por ende, a $\vec{F}_0 + \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ no resulta alguna que actúe sobre la barra (figura 3.5c).

Considere ahora las dos fuerzas iguales y opuestas \vec{P}_1 y \vec{P}_2 que actúan sobre la barra AB como se muestra en la figura 3.5d. La fuerza \vec{P}_1 puede ser el empuje de la fuerza \vec{P}' o bien la misma magnitud, pero en la dirección y misma línea de acción pero que actúa en B (lugar de \vec{F}_2 en A (figura 3.5e). Entonces, las fuerzas \vec{P}_1 y \vec{P}_2 pueden sumarse y obtenerse su suma es igual a cero (figura 3.5f). De esta manera, en el punto de vista de la barra, aplica la dos cuerpos iguales pero en los contrastados en la figura 3.5a y se cancelan. Sin embargo, resulta que en la barra, \vec{F}_0 y \vec{F}_1 son el empuje y la tracción por los dos miembros son diferentes. La barra de la figura 3.5a está en *tenedero* y, si no es su rigidez rígida, se incrementará ligeramente su longitud; la barra de la figura 3.5d está en *compresión* y, si no es rígida, disminuirá en poco su longitud. De esta forma, aunque el momento de transmisión de las fuerzas en forma de parámetro de transmisión es la misma, la dirección de los ejes de los miembros y parámetros de las fuerzas en las que actúan sobre la barra, se debe evitar o tener en cuenta al momento de determinar fuerzas internas y deformaciones.

3.4. PRODUCTO VECTORIAL DE DOS VECTORES

Para entender mejor el efecto de una fuerza sobre un cuerpo rígido, a continuación se introduce un nuevo concepto: el *momento de una fuerza con respecto a un punto*. Los conceptos se van a introducir más adelante y podrá aplicarse en la forma más adecuada a su interés se agregan a las herramientas matemáticas que se tienen disponibles: *producto vectorial de dos vectores*.

El producto vectorial de los vectores \vec{P} y \vec{Q} se define como el vector \vec{V} que satisface las siguientes condiciones:

1. La línea de acción de \vec{V} es perpendicular al plano que contiene a \vec{P} y \vec{Q} (figura 3.6a).
2. La magnitud de \vec{V} es el producto de las magnitudes de \vec{P} y \vec{Q} por $\sin \theta$, donde θ es el ángulo entre \vec{P} y \vec{Q} . La magnitud siempre deberá ser menor o igual a 180° ; por tanto, se tiene:

$$V = PQ \sin \theta \quad (3.1)$$

3. La dirección de \vec{V} se obtiene a partir de la *regla de la mano derecha*. Cierre su mano derecha y manténgala (o tome la posición de la mano derecha en el primer sentido que la rotación a través del ángulo θ que haría al vector \vec{P} coincidir con el vector \vec{Q} ; entonces, su dedo pulgar indicará la dirección del vector \vec{V} (figura 3.6b). Obsérvese que si \vec{P} y \vec{Q} no tienen un punto de aplicación común, estos primeros se deben volver a dibujar a partir del mismo punto. Se dice que los tres vectores \vec{P} , \vec{Q} y \vec{V} (tomados en ese orden) forman una *tríada a mano derecha*.

¹Se debe señalar que los ejes x , y y z utilizados en el capítulo 2 forman un sistema de ejes ortogonales a mano derecha y que los vectores unitarios \hat{i} , \hat{j} y \hat{k} definidos en la sección 2.1.2 forman una tríada ortogonal a mano derecha.



Figura 3.6

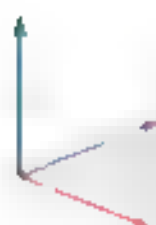


Figura 3.7

9

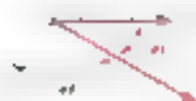


Figura 3.8

Como se mencionó anteriormente, el vector V que satisface estas tres condiciones (las cuales lo definen en forma única) se conoce como el **producto vectorial** de P y Q y se representa por la expresión matemática

$$V = P \times Q \quad (3.2)$$

En esta de la notación utilizada el producto vectorial de los vectores P y Q también se conoce como el **producto cruz** de P y Q .

A partir de la definición (3.2) se concluye que cuando los vectores P y Q tienen la misma dirección o direcciones opuestas, su producto cruz es igual a cero y $V = 0$. En caso general, cuando el ángulo formado por los dos vectores no es 0° ni 180° , a la ecuación (3.1) se le puede dar una interpretación geométrica sencilla: la magnitud V de producto cruz de P y Q es igual al área del paralelogramo que forman como lados P y Q (figura 3.7). Por tanto, el producto vectorial $P \times Q$ permanece inalterado si Q se reemplaza por un vector Q' que sea coplanario a P y Q tal que el área del paralelogramo formado por P y Q' sea paralelo a P . Así, se escribe

$$V = P \times Q = P \times Q' \quad (3.3)$$

A partir de la tercera condición enunciada para el producto vectorial $V = P \times Q$ existe la convención que es adscritiva: $P \times Q \neq Q \times P$. En consecuencia a más de esto, se concluye que los productos vectoriales no son conmutativos, es decir, $Q \times P$ no es igual a $P \times Q$. De hecho, se puede demostrar que $Q \times P$ está representado por el vector $-V$ que es igual y opuesto a V entonces se escribe

$$Q \times P = -(P \times Q) \quad (3.4)$$

Ejemplo. Calcúlese el producto vectorial $V = P \times Q$ cuando el vector P tiene una magnitud de 6 y se encuentra en el plano xy que forma un ángulo de 30° con el eje x y el vector Q tiene una magnitud de 4 y se encuentra a lo largo del eje x (figura 3.8).

A partir de la definición del producto vectorial se concluye que el vector V debe estar a lo largo del eje y , tener la magnitud

$$V = PQ \sin \theta = 6(4) \sin 30^\circ = 12$$

y que debe estar dirigido hacia arriba.

Se vio que la propiedad conmutativa no es aplicable en el caso de productos vectoriales. Ahora se que la propiedad asociativa $(P \times Q) \times R = P \times (Q \times R)$ tampoco se cumple, esto es, si la relación

$$P \times (Q_1 + Q_2) = P \times Q_1 + P \times Q_2 \quad (3.5)$$

se cumple o no, respóndase. En el libro de texto los lectores están dispuestos a aceptar sin demostración formal una respuesta que de manera intuitiva puede parecer correcta. Sin embargo, dado que la estructura del álgebra vectorial y de la estática depende de la relación (3.5) se debe tomar el tiempo necesario para su deducción.

Si perder la generalidad se puede suponer que P está dirigida a lo largo del eje y_1 y que los vectores Q_1 y Q_2 están en el plano x_1y_1 . Se tienen perpendiculares a partir de los extremos terminales de Q_1 y Q_2 al eje y_1 formando los triángulos rectángulos de esta forma los vectores Q_1 y Q_2 . Se hará referencia a estos vectores, respectivamente, como las proyecciones de la ecuación (3.3), se observa que el término del lado izquierdo de la ecuación (3.5) puede ser reemplazado por $P \times Q$ y que los términos de los productos vectoriales $P \times$

$\mathbf{Q} \times (\mathbf{P} \times \mathbf{Q})$ del lado de arriba muestran sus relaciones respectivas mediante los $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ y $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$. De la ecuación de la figura 3.9b se puede demostrar que puede escribirse de la siguiente manera:

$$\mathbf{P} \times \mathbf{Q} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} + \mathbf{P} \times \mathbf{Q} \quad (3.5)$$

Ahora se puede ver que $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ se puede interpretar como el \mathbf{Q} modificado por la suma vectorial de \mathbf{P} y \mathbf{Q} en el plano xy en el sentido contrario al del movimiento de las manecillas de la figura 3.9b. Los otros dos productos vectoriales en (3.5) se interpretan de



Figura 3.9



en forma similar a partir de \mathbf{Q}_1 y \mathbf{Q}_2 respectivamente. Ahora se verá que la proyección de un vector sobre cualquier plano arbitrario es la suma de las proyecciones de la suma \mathbf{Q} de \mathbf{Q}_1 y \mathbf{Q}_2 debe ser la suma de las proyecciones \mathbf{Q}'_1 y \mathbf{Q}'_2 de \mathbf{Q}_1 y \mathbf{Q}_2 sobre el mismo plano (figura 3.9c). Esta relación entre los tres vectores \mathbf{Q} , \mathbf{Q}_1 y \mathbf{Q}_2 seguirá siendo válida después de que los tres vectores hayan sido reflejados por el plano P y hayan sido rotados a través de un ángulo de 90° (figura 3.9d). Por tanto, se ha demostrado la ecuación (3.5) y se puede tener la certeza de que la propiedad distributiva es válida para los productos vectoriales.

Una tercera propiedad es la asociativa, la cual no es válida para los productos vectoriales y queda demostrada por:

$$\mathbf{P} \times (\mathbf{Q} \times \mathbf{S}) \neq \mathbf{P} \times (\mathbf{Q} \times \mathbf{S}) \quad (3.6)$$

3.5 PRODUCTOS VECTORIALES EXPRESADOS EN TÉRMINOS DE COMPONENTES RECTANGULARES

A continuación se procederá a determinar el momento vectorial de una fuerza \mathbf{F} en los ejes \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} que se encuentran en el capítulo 2. Considérese primero el producto $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$ (figura 3.10a). Como ambos vectores tienen una magnitud igual a 1, entonces se sabe que los ángulos rectos entre los vectores \mathbf{i} y \mathbf{j} deben dar como resultado un vector unitario. Dado que se quiere que el vector \mathbf{k} sea perpendicular a los vectores \mathbf{i} y \mathbf{j} y \mathbf{k} son mutuamente perpendiculares y también a cada uno de los otros dos. Por este hecho, la ecuación de la regla de la mano derecha presentada en el punto 3 de la sección 3.4, se concluye que el producto $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$ debe ser igual a \mathbf{k} (figura 3.10b). Por último se debe ver

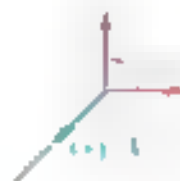


Figura 3.10



Figura 3.11

servar que el producto vectorial de un vector consigo mismo, como $\mathbf{i} \times \mathbf{i}$, es igual a cero debido a que ambos vectores tienen la misma dirección. Los productos vectoriales de los pares perpendiculares de vectores unitarios son

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \times \mathbf{i} &= \mathbf{0} & \mathbf{j} \times \mathbf{i} &= -\mathbf{k} & \mathbf{k} \times \mathbf{i} &= \mathbf{j} \\ \mathbf{i} \times \mathbf{j} &= \mathbf{k} & \mathbf{j} \times \mathbf{j} &= \mathbf{0} & \mathbf{k} \times \mathbf{j} &= -\mathbf{i} \\ \mathbf{i} \times \mathbf{k} &= -\mathbf{j} & \mathbf{j} \times \mathbf{k} &= \mathbf{i} & \mathbf{k} \times \mathbf{k} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Si se ordena a las tres letras que representan a los vectores unitarios en un círculo en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj (figura 3.11) se obtiene una regla mnemotécnica para el producto vectorial de los tres vectores unitarios. El producto de dos vectores unitarios será positivo si éstos se siguen uno a otro en un orden contrario al movimiento de las manecillas del reloj y será negativo si éstos se siguen uno al otro en un orden en el sentido de las manecillas del reloj.

Ahora se puede expresar fácilmente el producto vectorial \mathbf{V} de dos vectores cuales \mathbf{P} y \mathbf{Q} en términos de las componentes rectangulares de los dos vectores. Al descomponer a \mathbf{P} y \mathbf{Q} en sus componentes rectangulares, primero se escribe

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} = (P_x \mathbf{i} + P_y \mathbf{j} + P_z \mathbf{k}) \times (Q_x \mathbf{i} + Q_y \mathbf{j} + Q_z \mathbf{k})$$

Con el uso de la propiedad distributiva \mathbf{V} se expresa como la suma de productos vectoriales como $P_x Q_y \mathbf{j} \times \mathbf{k}$. Se debe recordar que una manera conveniente de obtener el producto vectorial de dos vectores unitarios como $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$ multiplicamos por el producto de los escalares como $P_x Q_y$ y recordando las identidades (3.7) después de identificar a \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} , se obtiene

$$\mathbf{V} = P_y Q_z - P_z Q_y \mathbf{i} + (P_z Q_x - P_x Q_z) \mathbf{j} + (P_x Q_y - P_y Q_x) \mathbf{k} \quad (3.8)$$

Entonces, los componentes rectangulares de producto vectorial \mathbf{V} se dan dados por

$$\begin{aligned} V_x &= P_y Q_z - P_z Q_y \\ V_y &= P_z Q_x - P_x Q_z \\ V_z &= P_x Q_y - P_y Q_x \end{aligned} \quad (3.9)$$

De otro modo a la ecuación (3.8) se observa que \mathbf{V} se puede escribir de la forma $\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ donde \mathbf{P} y \mathbf{Q} representan el vector \mathbf{P} y el vector \mathbf{Q} respectivamente. Por tanto, el producto vectorial \mathbf{V} puede expresarse de la siguiente forma por medio de la determinación

$$\mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \quad (3.10)$$

El método determinando que consiste de tres renglones y tres columnas se puede explicar explicando la primera y la segunda columnas, y formando paréntesis a lo largo de cada línea diagonal. Entonces, la suma de los productos obtenidos a lo largo de la línea roja se resta de la suma de los productos obtenidos a lo largo de la línea negra.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} & & \\ P_x & P_y & P_z & & \\ Q_x & Q_y & Q_z & & \end{array}$$

3.6 MOMENTO DE UNA FUERZA CON RESPECTO A UN PUNTO

Consideremos una fuerza \mathbf{F} que actúa sobre un cuerpo rígido (figura 3.12a). Como se sabe, la fuerza \mathbf{F} está representada por un vector, que define la magnitud y su dirección. Sin embargo, el efecto de la fuerza sobre el cuerpo puede variar, depende de su punto de aplicación. A la posición de A puede cambiarse de manera como se ve en el diagrama vectorial que se ve al punto de referencia fijo O con A , a este vector se le conoce como el vector de posición de A .¹ El vector de posición \mathbf{r} y la fuerza \mathbf{F} definen el plano mostrado en la figura 3.12a.

El momento de \mathbf{F} con respecto a O se define como el producto vectorial de \mathbf{r} y \mathbf{F} :

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (3.11)$$

De acuerdo con la definición del producto vectorial dada en la sección 3.1, el momento \mathbf{M}_O de \mathbf{F} con respecto al punto O es perpendicular al plano en el punto O y a la fuerza \mathbf{F} . El sentido de \mathbf{M}_O está definido por el sentido de la rotación que haría al vector \mathbf{r} colineal con el vector \mathbf{F} . En consecuencia, localizado en el extremo de \mathbf{M}_O , se ve a esta rotación como una rotación en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj. En consecuencia, el sentido de \mathbf{M}_O se logra por el sentido de la rotación de \mathbf{r} a \mathbf{F} por la regla de la mano derecha, como se ve en la figura 3.12b. En consecuencia, el sentido de \mathbf{M}_O se logra por el sentido de la rotación de \mathbf{r} a \mathbf{F} por la regla de la mano derecha, como se ve en la figura 3.12b. En consecuencia, el sentido de \mathbf{M}_O se logra por el sentido de la rotación de \mathbf{r} a \mathbf{F} por la regla de la mano derecha, como se ve en la figura 3.12b.

Por último, representado en θ es el ángulo entre las líneas de acción de la fuerza de posición \mathbf{r} y la fuerza \mathbf{F} . Se encuentra que la magnitud del momento de \mathbf{F} con respecto a O está dada por

$$M_O = rF \sin \theta = Fd \quad (3.12)$$

donde d es representada la distancia perpendicular desde O hasta la línea de acción de \mathbf{F} .² El sentido de \mathbf{M}_O se logra por el sentido de la rotación de \mathbf{r} a \mathbf{F} por la regla de la mano derecha, como se ve en la figura 3.12b. En consecuencia, el sentido de \mathbf{M}_O se logra por el sentido de la rotación de \mathbf{r} a \mathbf{F} por la regla de la mano derecha, como se ve en la figura 3.12b.

En el sistema de unidades del SI, donde la fuerza se expresa en newtons (N) y la distancia se expresa en metros (m), el momento de una fuerza estará expresado en newton-metro (N·m). En el sistema de unidades de uso común en Estados Unidos, donde la fuerza se expresa en libras y la distancia en pies, el momento de una fuerza se expresa en $\text{ft} \cdot \text{lb}$ o en $\text{lb} \cdot \text{ft}$.

Se puede observar que el momento \mathbf{M}_O de una fuerza con respecto a un punto depende de la magnitud, la línea de acción y el sentido de la fuerza, dicho momento no depende de la posición que como punto de aplicación de la fuerza se le da a la línea de acción. En consecuencia, el momento \mathbf{M}_O de una fuerza \mathbf{F} caracteriza a la posición del punto de aplicación de \mathbf{F} .

¹Se puede comprobar que los vectores de posición obedecen a las leyes de la adición de vectores y por tanto, tratando los vectores. Consideremos, por ejemplo, los vectores de posición \mathbf{r} y \mathbf{r}' de A con respecto a dos puntos de referencia O y O' y al vector de posición \mathbf{r}'' de O con respecto a O' (figura 3.40a, verificación 3.16). Se comprueba que el vector de posición $\mathbf{r}'' = \overrightarrow{O'O}$ puede obtenerse a partir de los vectores de posición $\mathbf{r} = \overrightarrow{OA}$ y $\mathbf{r}' = \overrightarrow{O'A}$ aplicando la regla del triángulo para la suma de vectores.



Figura 3.12



Segundo, ya que la fuerza actúa a cierta distancia r del punto O , M_O es una fuerza F de magnitud r y la fuerza asociada M_O es perpendicular a la línea de acción de F . A lo largo la línea de acción de F debe existir un plano que pasa por el punto O y es perpendicular al momento M_O . La distancia d desde la línea de acción de F hasta la línea de acción de M_O debe ser igual al cociente de las magnitudes de M_O y F ; esto es, debe ser igual a M_O/F . El sentido de M_O determina si la línea de acción debe trazarse hacia el F (el F es negativo) o hacia el M_O (el F es positivo).

Resumiendo la sección 3.3, donde se señala que el principio de transmutación establece que dos fuerzas F y F' son equivalentes si y sólo si el mismo efecto sobre el cuerpo rígido se tienen la misma magnitud, las mismas líneas de acción, y, aunque se puede expresar como la siguiente forma, *dos fuerzas F y F' son equivalentes si, y sólo si, son iguales (es decir, tienen) la misma magnitud y la misma dirección y, además, tienen momentos iguales con respecto a un punto O* . Las condiciones necesarias suficientes para que dos fuerzas F y F' sean equivalentes son:

$$F = F' \quad y \quad M_O = M'_O \quad (3.1)$$

Se señalará que el momento de una fuerza con respecto a un punto O se cumple para cierto punto O también se cumplirá para cualquier otro punto.

Problemas en dos dimensiones. Muchas aplicaciones tratan con estructuras bidimensionales, es decir, estructuras cuyo espesor es lo suficientemente pequeño como para ignorarlo. Tales estructuras soportan fuerzas contenidas en su mismo plano. Dadas estas condiciones, seales y las fuerzas que actúan sobre ellas pueden ser representadas fácilmente sobre una hoja de papel o sobre una pizarra. Por tanto, su análisis es más simple que el correspondiente a estructuras y fuerzas tridimensionales.



Figura 3.13



Figura 3.14

Considere, por ejemplo, una placa rígida sobre la que actúa una fuerza F (Figura 3.13). El momento de F con respecto al punto O se denota como M_O . El momento de la fuerza F se denota por M_O y la magnitud de M_O es perpendicular a la línea de acción de F (Figura 3.14). La fuerza F y el momento M_O son equivalentes si y sólo si $F = M_O/r$, donde r es la distancia desde la línea de acción de F hasta la línea de acción de M_O . Como se ilustra en la figura, en el primer caso, la fuerza de la figura 3.13a tiende a hacer rotar la placa en sentido horario del reloj y en el segundo caso, la fuerza de la figura 3.13b tiende a hacer rotar la placa en sentido antihorario del reloj. Por consiguiente, es natural referirse al sentido del momento M_O con respecto a O en la figura 3.13a como opuesto al del movimiento de las manecillas de reloj (antihorario) y en la figura 3.13b como sentido de la rotación del movimiento de las manecillas del reloj (horario).

Puesto que el momento de la fuerza F que actúa en el plano de la figura debe ser perpendicular a dicho plano, sólo se necesita especificar la magnitud y sentido del momento M_O con respecto a O . Esto se

puede ser asignado a la magnitud M del momento una signa positiva o negativa según el vector M apunte hacia dentro o hacia afuera del plano de papel.

3.7 TEOREMA DE VARIGNON

La propiedad distributiva de los productos vectoriales se puede cumplir para todo **vector** de la resultante de **dos** fuerzas concurrentes. Si las fuerzas \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 ,... se aplican en el mismo punto A (figura 3.14) y si se representa por \mathbf{r} el vector de posición A a partir de la ecuación (3.5) de la sección 3.4, se puede escribir:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F}_R = \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2 + \dots \quad (3.14)$$

Es decir, el momento con respecto a un punto dado O de la resultante de **varias** fuerzas concurrentes es **igual** a la suma de los momentos de las **distintas** fuerzas con respecto al mismo punto O . Esta propiedad, ya descrita formalmente en el capítulo 2, es el Teorema de Varignon (1654-1722) mucho antes de inventarse el álgebra vectorial, y es la primera ecuación como el **teorema de Varignon**.

La relación (3.14) permite reemplazar el cálculo directo del momento de una fuerza \mathbf{F} por el cálculo de los momentos de dos o más fuerzas componentes. Como se verá en la siguiente sección, por lo general la fuerza \mathbf{F} se descompone en sus componentes paralelas a los ejes coordenados. Sin embargo, será conveniente aplicar en algunos casos la descomposición \mathbf{F} en un par de ejes no paralelos a los ejes coordenados (véase el problema resuelto 3.3).

3.8. COMPONENTES RECTANGULARES DEL MOMENTO DE UNA FUERZA

En general, la determinación del momento de una fuerza en el espacio se simplifica en forma considerable si el vector **línea de acción** de la fuerza se posiciona a partir de su punto de aplicación en sus **tres** componentes rectangulares x , y y z . Por ejemplo, considere el momento M_{Ox} a respecto O de la fuerza \mathbf{F} que actúa en el punto A (fig. 3.5). Si observamos las **componentes** del vector \mathbf{r} que posibilita el momento M_{Ox} respecto a los ejes y y z del punto A , se escribirá:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (3.15)$$

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k} \quad (3.16)$$

Al sustituir a \mathbf{r} y a \mathbf{F} a partir de (3.15) y (3.16) en

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (3.17)$$

y recordar los resultados obtenidos en la sección 3.5, se puede escribir momentáneamente M_{Ox} de \mathbf{F} con respecto a O de la siguiente forma:

$$M_{Ox} = M_y\mathbf{j} + M_z\mathbf{k} \quad (3.17)$$

Las **tres** componentes escalares M_x , M_y y M_z están definidas por las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} M_x &= yF_z - zF_y \\ M_y &= zF_x - xF_z \\ M_z &= xF_y - yF_x \end{aligned} \quad (3.18)$$



Figura 3.14



Figura 3.15

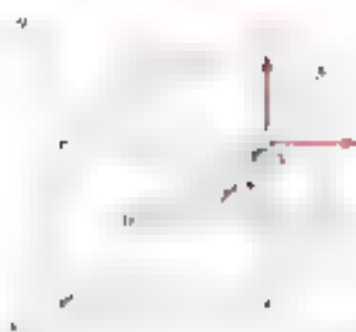


Figura 3.16

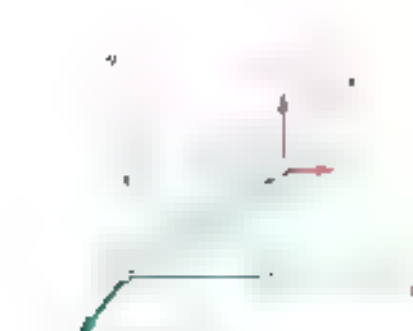


Figura 3.17



Figura 3.18

Como se vea en la sección 3.11, las componentes escalares M_x , M_y y M_z del momento M miden la tendencia de la fuerza F a impartirle a una cuerpo rígido un movimiento de rotación alrededor de los ejes x , y y z respectivamente. Sustituyendo (3.14) en (3.17), también puede escribirse a M_i en forma de determinante:

$$M_i = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (3.19)$$

Para calcular el momento M_B de una fuerza F aplicada en A con respecto a un punto arbitrario B (Figura 3.16) se le sustituye en el vector de posición r en la ecuación (3.11) por un vector $r_{A/B}$ que va de B hasta A . Este vector es el de posición de A relativo a B y se representa por $r_{A/B}$. Se observa que $r_{A/B}$ se puede obtener si se resta r_B de r_A por tanto, se escribe:

$$M_B = r_{A/B} \times F = (r_A - r_B) \times F \quad (3.20)$$

o bien, en forma determinante:

$$M_B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_A - x_B & y_A - y_B & z_A - z_B \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (3.21)$$

donde $x_{A/B}$, $y_{A/B}$ y $z_{A/B}$ representan las componentes del vector $r_{A/B}$:

$$r_{A/B} = (x_A - x_B)i + (y_A - y_B)j + (z_A - z_B)k$$

En el caso de problemas en dos dimensiones, se puede suponer que la fuerza F está actuando en el plano xy (es decir, $F_z = 0$ y $F_x = 0$ en la ecuación (3.14)). Se obtiene:

$$M_O = (xF_y - yF_x)k$$

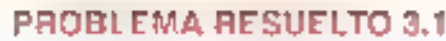
Con esto se ve que el momento de F con respecto a O es perpendicular al plano de la figura y su magnitud de momento es el escalar

$$M_{Oz} = M_z = xF_y - yF_x \quad (3.22)$$

Como se mencionó antes, un valor positivo de M_{Oz} indica que el vector M apunta hacia afuera del plano xy (es decir, la fuerza F actúa a la izquierda del eje x con respecto al eje y), un sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj y un valor negativo indica que el vector M apunta hacia adentro del plano xy (es decir, la fuerza F tiene la misma dirección que el eje x con respecto al eje y) sentido horario de rotación.

Si se quiere calcular el momento de una fuerza F actuando en un punto A con respecto a un punto B en un plano xy (Figura 3.18) se tiene $r_B = (x_B - y_B)k$ y se simplifica por el vector M_B se simplifica de la siguiente manera:

$$M_B = (x_A - x_B)F_y - (y_A - y_B)F_x \quad (3.23)$$

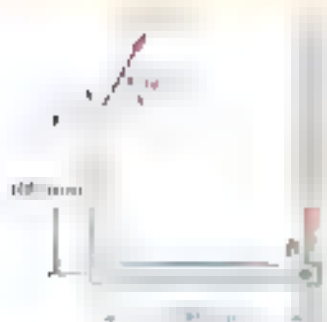


A diagram of a lever system. A horizontal beam is pivoted on a triangular fulcrum. A red arrow labeled 'Effort' points upwards from the left end of the beam. A green arrow labeled 'Load' points downwards from the right end of the beam. The beam is tilted upwards on the left side.

e) Ninguna de las fuerzas consideradas en los puntos *b*, *c* y *d* es equivalente a la resultante \mathbf{R} en el punto *a*. La fuerza \mathbf{R} en el punto *a* es distinta (módulo) con respecto a *O*, sus componentes en *x* y *y* son diferentes. Por lo tanto, no es a propósito de que sea una de las fuerzas que actúan en el punto *a* (no es \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 o \mathbf{F}_3) para que sea equivalente a \mathbf{R} en el punto *a*.

educenciavirtual.blogspot.com.co

日



PROBLEMA RESUELTO 3.2

Una fuerza de 900 N actúa sobre la manivela como se muestra en la figura. Determine el momento de la fuerza con respecto a B.

SOLUCIÓN

El momento M_B es el producto de la fuerza perpendicular al brazo momento (distancia) hasta el punto de aplicación.

$$M_B = r_{A/B} \times F$$

donde $r_{A/B}$ es el vector trazado desde B hasta A. Al descomponer a $r_{A/B}$ y a F en sus componentes cartesianas se tiene que:

$$\begin{aligned} r_{A/B} &= 0.2 \text{ m} \mathbf{i} + (0.16 \text{ m}) \mathbf{j} \\ \mathbf{F} &= (900 \text{ N}) \cos 60^\circ \mathbf{i} + (900 \text{ N}) \sin 60^\circ \mathbf{j} \\ &= (450 \text{ N}) \mathbf{i} + (783 \text{ N}) \mathbf{j} \end{aligned}$$

descomponiendo en sus componentes \mathbf{i} y \mathbf{j} para los momentos cartesianos de las fuerzas unitarias (ecuación 3.5) se obtiene:

$$\begin{aligned} M_B &= r_{A/B} \times \mathbf{F} = [- (0.2 \text{ m}) \mathbf{j} + (0.16 \text{ m}) \mathbf{i}] \times [(450 \text{ N}) \mathbf{i} + (783 \text{ N}) \mathbf{j}] \\ &= -(154.6 \text{ N} \cdot \text{m}) \mathbf{k} + (64.0 \text{ N} \cdot \text{m}) \mathbf{k} \\ &= -(90.6 \text{ N} \cdot \text{m}) \mathbf{k} \end{aligned} \quad M_B = 90.6 \text{ N} \cdot \text{m} \quad \blacktriangleleft$$

El momento M_B es un vector perpendicular al plano de la figura y apunta hacia adentro de la página del papel.



PROBLEMA RESUELTO 3.3

Una fuerza de 30 lb actúa sobre el extremo de una palanca de 0.3 m, como se muestra en la figura. Determine el momento de la fuerza con respecto a O.

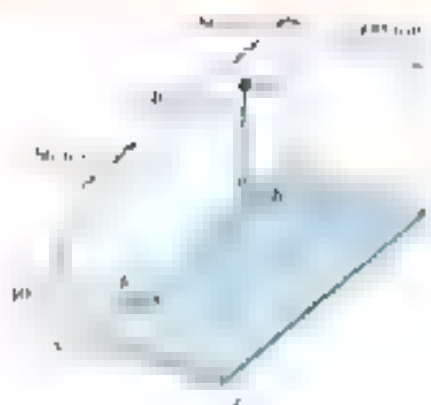
SOLUCIÓN

La fuerza se descompone por dos componentes, una componente P en la dirección de la palanca y otra componente Q perpendicular a ella. Como se encuentra en la figura de acción de P el momento de P con respecto a O es igual a cero. El momento de la fuerza de 30 lb a O tiene la acción de Q que tiene el sentido de las manecillas del reloj y por consiguiente se representa por un escalar negativo.

$$\begin{aligned} Q &= (30 \text{ lb}) \sin 20^\circ = 10.26 \text{ lb} \\ M_O &= -Q(0.3 \text{ m}) = -(10.26 \text{ lb})(0.3 \text{ m}) = -3.08 \text{ lb} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

Como el valor obtenido para el escalar M_O es negativo, el momento M_O apunta hacia adentro de la página del papel. Así se escribe:

$$M_O = 3.08 \text{ lb} \cdot \text{m} \quad \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO 3.4

Una barra rectangular es apoyada en los ejes x y z por un alambre CD . Se sabe que la tensión en el alambre es de 200 N. determine el momento con respecto a A de la fuerza ejercida por el alambre en el punto C .

SOLUCIÓN

El momento M_A de la fuerza F ejercida por el alambre en el punto C con respecto a A , se obtiene a partir del producto vectorial

$$M_A = r_{C/A} \times F \quad (1)$$

donde $r_{C/A}$ es el vector trazado desde A hasta C

$$r_{C/A} = \overline{AC} = (0.3 \text{ m})\mathbf{j} + (0.06 \text{ m})\mathbf{k} \quad (2)$$

y F es la fuerza de 200 N dirigida a lo largo de CD . Al introducir el vector unitario $\lambda = \overline{CD}/CD$ se escribe

$$F = F\lambda = (200 \text{ N}) \frac{\overline{CD}}{CD} \quad (3)$$

Al descomponer el vector \overline{CD} en sus componentes x y z correspondientes se tiene

$$\overline{CD} = (0.3 \text{ m})\mathbf{i} + (0.24 \text{ m})\mathbf{j} + (0.32 \text{ m})\mathbf{k} \quad CD = 0.36 \text{ m}$$

Si se sustituye este resultado en (3) se obtiene

$$\begin{aligned} F &= \frac{200 \text{ N}}{0.36 \text{ m}} [(0.3 \text{ m})\mathbf{i} + (0.24 \text{ m})\mathbf{j} + (0.32 \text{ m})\mathbf{k}] \\ &= (120 \text{ N})\mathbf{i} + (96 \text{ N})\mathbf{j} + (128 \text{ N})\mathbf{k} \end{aligned} \quad (4)$$

Sustituyendo $r_{C/A}$ y F en la ecuación (1) a partir de las ecuaciones (2) y (4) y reorganizando las reducciones (3.7) de la sección 3.5 se obtiene

$$\begin{aligned} M_A &= r_{C/A} \times F = (0.3\mathbf{j} + 0.06\mathbf{k}) \times (-120\mathbf{i} + 96\mathbf{j} + 128\mathbf{k}) \\ &= (0.3)(96)\mathbf{k} + (0.3)(-128)\mathbf{i} + (0.06\mathbf{k})(-120\mathbf{j}) + (0.06)(96)\mathbf{i} = 1 \end{aligned}$$

Reducción a escalar Como se mencionó en la sección 3.6, el momento M_A puede ser expresado en forma de determinante

$$\begin{aligned} M_A &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0.3 & 0.06 \\ -120 & 96 & 128 \end{vmatrix} \\ M &= (0.6 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{i} - (1.536 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j} + (2.88 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} \end{aligned}$$

THE DEPARTMENT OF THE ARMY

1. In this section we present the proof of the following theorem.

† 1992-2002 Ford. *Revised from 1992 Ford. © 1992 Ford. All rights reserved. Ford, the Ford logo, and other marks contained herein are trademarks of Ford Motor Company. All other marks contained herein are the property of their respective owners.*

34. $\Gamma \times \mathbb{F}$ 311

[illegible]

$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$

[illegible]

Esprimesi $\tau \in F$ per cui non lo sia su iperfaccie $\alpha \in \mathcal{A}$, allora α è di primo grado e il prodotto vettoriale $M_\alpha \otimes \tau \otimes F$ problema risolto [3, 2].

Desi amplasăm la \mathbf{F} o succesiune de variabile pozitive illeminate cu valori de peste tot, \mathbf{r} respectă anumite condiții de compatibilitate de pozitive illeminate contribuind la rezoluția în \mathbf{F} (problema rezolvată 3.3).

d) Usar la ecuación (3.22), $M_{C_1} = M_1 = xP_1 - yF_1$. Cuando se aplica este método, el resultado es el mismo que el obtenido al usar el método de la energía potencial. El signo negativo indica que las reacciones de apoyo por fricción en el eje C_1 son opuestas al signo atribuido al momento de torsión en el eje C_1 en la ecuación (3.22).

$$M_x = -(1.16)(10)(100) \text{ N} = -(1.26)(10)(100) \text{ N} = -202.0 \text{ N}$$

que debe ser el mismo para cualquier sistema de ejes. Se obtiene el momento de inercia por suma de los momentos de inercia de los componentes rectangulares. En el caso particular de un triángulo que debe ser el mismo para cualquier sistema de ejes. En la mayoría de los problemas es más conveniente usar el eje que pasa por el centro de masa para determinar el momento. En la mayoría de los problemas es más conveniente usar el eje que pasa por el centro de masa para determinar el momento.

[illegible]

Problemas

3.1 El perfil para un sistema mecánico se articula en B . Si se sabe que $\alpha = 25^\circ$ determine el momento de la fuerza de 40 N alrededor del punto B descomponiendo la fuerza en sus componentes horizontal y vertical.

3.2 El perfil para un sistema mecánico se articula en B . Si se sabe que $\alpha = 25^\circ$ determine el momento de la fuerza de 40 N alrededor del punto B descomponiendo la fuerza en sus componentes a lo largo de AB y perpendicular a AB .

3.3 Una fuerza de 300 N se aplica en A como se muestra en la figura. Determine $a)$ el momento de la fuerza de 300 N alrededor de D y $b)$ la fuerza infinitesimal aplicada en B que produce el mismo momento alrededor de D .



Figura P3.3 y P3.4

3.4 Una fuerza de 400 N se aplica en A como se muestra en la figura. Determine $a)$ el momento de la fuerza de 400 N alrededor de D , $b)$ la magnitud y sentido de la fuerza infinitesimal P aplicada en B que produce el mismo momento de D , $c)$ la fuerza infinitesimal aplicada en C que produce el mismo momento de D .

3.5 Una fuerza P de 8 lb se aplica a una palanca de empuje. Determine el momento de P alrededor de B cuando α es igual a 25° .

3.6 Para la palanca de empuje que se encuentra en la figura, determine la magnitud y la dirección de la fuerza infinitesimal P que tiene un momento de $2 \text{ lb}\cdot\text{ft}$ en el sentido de las manecillas del reloj alrededor de B .

3.7 Una fuerza P de 11 lb se aplica a una palanca de empuje. Determine el valor de α si se sabe que el momento de P alrededor de B es en el sentido de las manecillas del reloj y que tiene una magnitud de $250 \text{ lb}\cdot\text{ft}$.

3.8 Se sabe que es necesaria una fuerza vertical de 200 lb para remover de la tabla inclinada, el clavo que está en C . Un instante antes de que el clavo comience a moverse, determine $a)$ el momento alrededor de B de la fuerza ejercida sobre el clavo, $b)$ la magnitud de la fuerza P que genera el mismo momento alrededor de B si $\alpha = 10^\circ$ y $c)$ la fuerza P mínima que genera el mismo momento respecto de B .



Figura P3.1 y P3.2



Figura P3.5, P3.6 y P3.7



Figura P3.8



Figura P3.12



Figura P3.13

3.9 Un muelle AB se usa para tensar cables a un poste. Si se sabe que la tensión en el cable AB es de 400 N y que la longitud es de 3 m , determine la fuerza que debe aplicarse en el punto B para que el momento producido por la fuerza aplicada en el punto B sea el mismo que el momento producido por la fuerza aplicada en el punto A .

3.10 Se sabe que es necesario aplicar una fuerza que produzca un momento de $600\text{ N}\cdot\text{m}$ alrededor de D y que el cable AB puede soportar una tensión de 240 N . determine la tensión que debe desarrollarse en el cable del muelle AB para crear el momento respecto al punto D .



Figura P3.9, P3.10 y P3.11

3.11 Se sabe que es necesario aplicar una fuerza que produzca un momento de $600\text{ N}\cdot\text{m}$ alrededor de D para tensar el cable AB . Si la capacidad del muelle AB es de 240 N , determine el valor mínimo de la distancia d para generar el momento especificado respecto de D .

3.12 y 3.13 La ventanilla trasera de un automóvil se sostiene mediante el amortiguador BC que se muestra en la figura. Si para levantar la ventanilla se ejerce una fuerza F en el punto A hacia abajo y a la izquierda, determine la fuerza que debe aplicarse en el punto B para que el momento producido por la fuerza F sea el mismo que el momento producido por la fuerza F en el punto A .

3.14 Un ingeniero quiere usar un tramo de tubo AB como palanca para mover la tapa de un bote de un diámetro 10 cm . El centro del bote está a una distancia 10 cm del punto A . La fuerza F se aplica en el punto B y la fuerza G se aplica en el punto C . Si la fuerza F debe pasar por C , determine la fuerza G que debe aplicarse en el punto C para que el momento producido por la fuerza F sea el mismo que el momento producido por la fuerza G en el punto A .

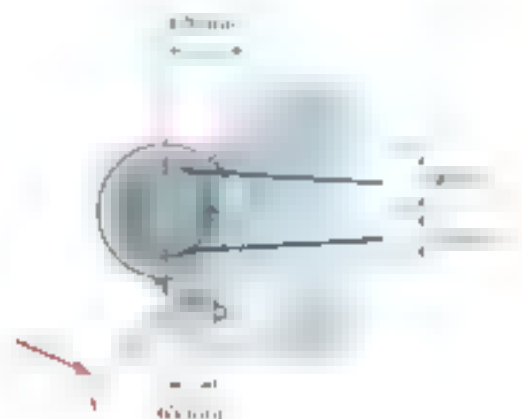


Figura P3.14

3.15 Obtenga los productos vectoriales $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ y $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$, donde $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y use los resultados obtenidos para computar la identidad

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \sin (\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \sin (\alpha - \beta)$$

3.16 Una línea pasa a través de las puntos $(20 \text{ m}, 0 \text{ m})$ y $(-4 \text{ m}, 30 \text{ m})$. Determine la ecuación de la línea y use la ecuación para determinar la distancia al origen O del sistema coordenado.

3.17 Los vectores \mathbf{P} y \mathbf{Q} son los lados adyacentes de un paralelogramo. Determine la ecuación de la línea que pasa por \mathbf{P} y \mathbf{Q} . $\mathbf{P} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{Q} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

3.18 Los vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} están contenidos en el mismo plano. Determine el vector unitario normal al plano si \mathbf{A} y \mathbf{B} son iguales, respectivamente, a a) $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ y $4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ b) $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ y $-2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

3.19 Determine el momento de la fuerza $\mathbf{F} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ que actúa en el punto A . Suponga que el vector de posición es $\mathbf{r} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ a) $\mathbf{r} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ b) $\mathbf{r} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ c) $\mathbf{r} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ d) $\mathbf{r} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

3.20 Determine el momento alrededor del origen O de la fuerza $\mathbf{F} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ que actúa en el punto A . Suponga que el vector de posición es $\mathbf{r} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ a) $\mathbf{r} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ b) $\mathbf{r} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ c) $\mathbf{r} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ d) $\mathbf{r} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

3.21 Se aplica una fuerza de 200 N sobre la ménsula ABC, como se muestra en la figura. Determine el momento de la fuerza alrededor de A.

3.22 Los cables AB y BC se sujetan al trapezo de un árbol muy grande para evitar que se caiga. Si se sabe que las tensiones en los cables AB y BC son de 555 N y 660 N, respectivamente, determine el momento respecto de O de la fuerza resultante ejercida por los cables sobre el árbol en B.



Figura P3.14



Figura P3.21



Figura P3.22



Figura P3.23

3.23 El ángulo AB de 6 m que se muestra en la figura tiene un extremo fijado al árbol en el punto A. El otro extremo se sujeta a la línea de transmisión en el punto B. La tensión en el cable es de 555 N. Determine el momento respecto de O de la fuerza resultante ejercida por el cable en B.

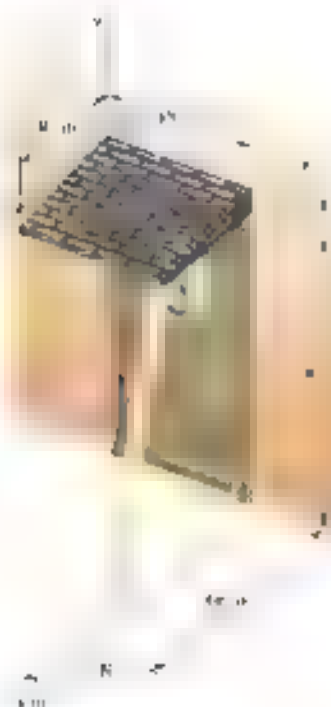


Figura P3.24

3.24 La palanca homogénea AB está apoyada en los puntos A y B y soporta una fuerza vertical hacia abajo que se muestra en la figura. Se sabe que el peso de la barra es de 50 lb y que actúa en la línea que pasa por el punto medio de la barra alrededor de E .

3.25 La palanca AB se sostiene en C y las fuerzas mostradas en la figura. Si la fuerza que se ejerce en C es unido de los cables AC y BC se tiene un momento alrededor de A de $100\text{ lb}\cdot\text{ft}$, ¿cuál es el cable BC ?

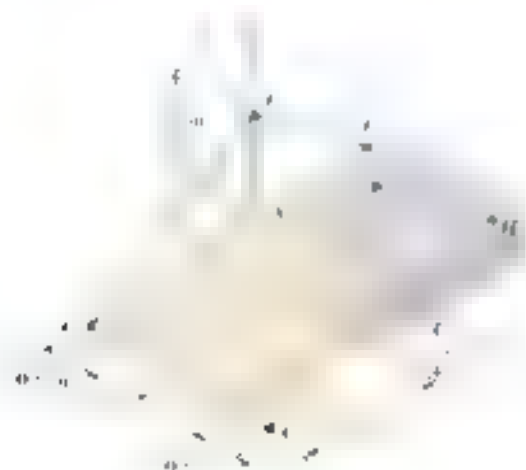


Figura P3.25

3.26 Una barra pesada cuelga de dos grúas, una de las cuales se muestra en la figura. La tensión en la línea AB es de 50 lb . Determine el momento alrededor de C de la fuerza resultante R , ejercida sobre la grúa en A .



Figura P3.26

3.27 En el problema 3.22 determine la distancia perpendicular desde el punto D hasta el cable AB .

3.28 En el problema 3.22 determine la distancia perpendicular desde el punto O hasta el cable BC .

3.29 En el problema 3.24 determine la distancia perpendicular desde el punto D hasta una línea que pasa por los puntos A y B .

3.30 En el problema 3.24 determine la distancia perpendicular desde el punto E hasta una línea que pasa por los puntos A y B .

3.31 En el problema 3.25 determine la distancia perpendicular desde el punto A hasta la posición DE del cable DEF .

3.32 En el problema 3.25 determine la distancia perpendicular desde el punto A hasta una línea que pasa por los puntos E y G .

3.33 En el problema 3.26 determine la distancia perpendicular desde el punto E hasta la posición AD de la línea $ABAD$.

3.34 Determine el valor de a que minimiza la distancia perpendicular desde el punto C hasta la sección de tubería que pasa por los puntos A y B .



Figura P3.34

3.9. PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES

El **producto escalar** de los vectores \mathbf{P} y \mathbf{Q} se define como el producto de los magnitudes de \mathbf{P} y \mathbf{Q} y el seno del ángulo θ formado por \mathbf{P} y \mathbf{Q} (figura 3.10). El producto escalar de \mathbf{P} y \mathbf{Q} se denota mediante $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$. Entonces, se escribe:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = PQ \sin \theta \quad (3.24)$$



Figura 3.10

Atención que la expresión recién definida no es un vector sino un **escalar**. El **producto escalar** puede ser **positivo**, **negativo** o **cero**. El **producto escalar** de \mathbf{P} y \mathbf{Q} también se puede escribir como **producto punto** de los vectores \mathbf{P} y \mathbf{Q} .

A partir de su propia definición, se concluye que el producto escalar de los vectores **es conmutativo**. Se escribe:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P} \quad (3.25)$$

Para demostrar que el producto escalar **es distributivo**, se debe probar la relación:

$$\mathbf{P} \cdot (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_1 + \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_2 \quad (3.26)$$



Figura 3.20

Sin pérdida de generalidad se puede suponer que \mathbf{P} está dirigido a lo largo de \mathbf{e}_1 (es decir $\theta = 0$). Y denotando Q_1 la suma de \mathbf{Q} y \mathbf{Q}_2 por Q_1 , entonces el producto escalar $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$ por el teorema de Pitágoras de (3.26) se expresa de la siguiente forma:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_1 + \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_2 = P Q_1 \cos \theta_1 = P Q_1 \quad (3.27)$$

donde Q_1 es la suma de \mathbf{Q} y \mathbf{Q}_2 . De la ecuación (3.27) el lado derecho de (3.26) se puede expresar como

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_1 + \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_2 = P(Q_1)_x + P(Q_2)_x \quad (3.28)$$

De modo que \mathbf{Q} es la suma de \mathbf{Q}_1 y \mathbf{Q}_2 , su componente y debe ser igual a la suma de las componentes y de \mathbf{Q}_1 y \mathbf{Q}_2 . Por tanto, las expresiones obtenidas en (3.27) y (3.28) son iguales, con lo que queda demostrada la ecuación (3.26).

En lo concerniente a la tercera propiedad —la propiedad asociativa— se debe señalar que no es aplicable a los productos escalares.

De hecho $\mathbf{P} \cdot (\mathbf{Q} + \mathbf{R})$ no tiene ningún sentido, puesto que $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$ no es un vector sino un escalar.

El producto escalar de dos vectores \mathbf{P} y \mathbf{Q} puede expresarse en términos de sus componentes y vectores unitarios de dichos vectores. Descomponiendo a \mathbf{P} y a \mathbf{Q} en sus componentes se escribe primero

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = (P_x \mathbf{i} + P_y \mathbf{j} + P_z \mathbf{k}) \cdot (Q_x \mathbf{i} + Q_y \mathbf{j} + Q_z \mathbf{k})$$

Con el uso de la propiedad distributiva, $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$ se expresa como la suma de productos escalares como $P_x Q_x \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + P_y Q_y \mathbf{j} \cdot \mathbf{j}$. Sin embargo, a partir de la definición de producto escalar se concluye que los productos escalares de los vectores unitarios son iguales a 1 o 0, y más:

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} &= 1 & \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} &= 1 & \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} &= 1 \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} &= 0 & \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} &= 0 & \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} &= 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

Por tanto, la expresión obtenida para $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$ se reduce a

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z \quad (3.30)$$

En el caso particular cuando \mathbf{P} y \mathbf{Q} son iguales

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 = P^2 \quad (3.31)$$

Aplicaciones

Ángulo formado por dos vectores dados Consideremos que los dos vectores están dados en términos de sus componentes y

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= P_x \mathbf{i} + P_y \mathbf{j} + P_z \mathbf{k} \\ \mathbf{Q} &= Q_x \mathbf{i} + Q_y \mathbf{j} + Q_z \mathbf{k} \end{aligned}$$

Para determinar el ángulo formado por estos dos vectores, se igualan las expresiones obtenidas para el producto escalar en (3.26) y (3.30), y se escribe

$$PQ \cos \theta = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z$$

Despejando $\cos \theta$, se tiene

$$\cos \theta = \frac{P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z}{PQ} \quad (3.32)$$

- **Proyección de un vector sobre un eje dado.** Considerar un vector \mathbf{P} que forma un ángulo θ con un eje, o línea dirigida, OL (figura 3.21). La proyección de \mathbf{P} sobre el eje OL se define como el escalar

$$P_{OL} = P \cos \theta \quad (3.31)$$

Se observa que la proyección P_{OL} es igual en valor absoluto al valor de la longitudinal del segmento OA . Esta será positiva si OA tiene el mismo sentido que el eje OL , esto es, si θ es agudo y negativa en caso contrario. Si \mathbf{P} y OL forman un ángulo recto, la proyección de \mathbf{P} sobre OL es 0.

Considere ahora un vector \mathbf{Q} dirigido a lo largo de OL , con el mismo sentido que OL (figura 3.22). El producto escalar de \mathbf{P} y \mathbf{Q} puede expresarse como

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = PQ \cos \theta = P_{OL} Q \quad (3.32)$$

por lo que se concluye que

$$P_{OL} = \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}}{Q} = \frac{P_x i_x + P_y i_y + P_z i_z}{Q} \quad (3.33)$$

En el caso particular cuando el vector \mathbf{Q} es perpendicular a los ejes de OL es el vector unitario λ (figura 3.23), se escribe

$$P_{OL} = \mathbf{P} \cdot \lambda \quad (3.34)$$

Al descomponer \mathbf{P} y λ en sus componentes rectangulares y recordar, de la sección 2.12, que las componentes de λ a lo largo de los ejes coordenados son iguales, respectivamente, a los cosenos directores de OL , la proyección de \mathbf{P} sobre OL se expresa como

$$P_{OL} = P_x \cos \theta_x + P_y \cos \theta_y + P_z \cos \theta_z \quad (3.35)$$

donde θ_x , θ_y y θ_z representan los ángulos que el eje OL forma con los ejes coordenados.



Figura 3.21

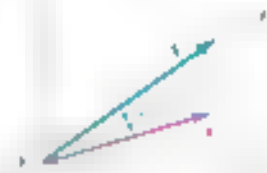


Figura 3.22



Figura 3.23

3.10 PRODUCTO TRIPLE MIXTO DE TRES VECTORES

Se define el **producto triple mixto** y **producto triple mixto de tres vectores** $\mathbf{S} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ como la expresión escalar

$$\mathbf{S} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} \quad (3.36)$$

donde \mathbf{S} se define como el **producto escalar** de \mathbf{S} con el **momento vectorial** de \mathbf{P} y \mathbf{Q} .

*En el capítulo 45 se presentará otro tipo de producto triple vectorial: el **producto triple vectorial** $\mathbf{S} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}$.



Figure 3.24



Figure 3.25



Figure 3.26

Al producto triple escalar de S , P y Q se le puede dar una interpretación geométrica simple (párrafo 3.34). En primer lugar, recordemos de la sección 3.4 que el vector $P \times Q$ es perpendicular al plano que contiene a P y a Q (párrafo 3.32); es igual a una vez el área del paralelogramo que tiene por lados a P y a Q . Por otro lado, la ecuación (3.34) indica que el producto triple escalar de S , P y Q se puede interpretar aplicando la definición de $P \times Q$ a este mismo paralelogramo formado por P y Q (párrafo 3.32), como el volumen S sobre el plano $P \times Q$ sobre el plano que contiene a P y Q sobre el mismo plano que contiene al paralelogramo. Por tanto, el producto triple escalar es igual en valor absoluto al volumen del cuboide simple que tiene por lados a los vectores S , P y Q (figura 3.25). Se debe señalar que el signo del producto triple escalar será positivo si S , P y Q forman una triada a mano derecha, y será negativo si es a mano izquierda (figura 3.26). El signo del producto triple escalar será negativo si se observa desde el extremo terminal de S , por la rotación que hace a P colinear con Q en el sentido de las agujas del reloj. El producto triple escalar será igual a cero si S , P y Q son coplanarios.

Como el paralelepípedo definido en el párrafo anterior es tridimensional, los tres vectores S , P y Q pueden ser reemplazados por los tres vectores triples escalares que se pueden formar con S , P y Q (párrafo 3.32), pero no el mismo signo. Se puede demostrar fácilmente que

$$S \cdot (P \times Q) = P \cdot (Q \times S) = Q \cdot (S \times P) = -S \cdot (Q \times P) = -P \cdot (S \times Q) = -Q \cdot (P \times S) \quad (3.36)$$

Ordenando las letras que representan a los tres vectores en el mismo sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj (figura 3.26), se observará que el signo del producto triple escalar permanece inalterado si se intercambian los vectores en cualquier ciclo. Se dice que una permutación de un tipo es una permutación cíclica. La figura 3.26 puede ser interpretada como la permutación cíclica de los tres vectores triples escalares, se puede ver que el producto triple escalar de S , P y Q se puede definir tan bien con $S \cdot (P \times Q)$ como con $(S \times P) \cdot Q$.

El producto triple escalar de los vectores S , P y Q puede ser expresado en términos de las componentes rectangulares de estos vectores. Si se define a $P \times Q$ con V con la fórmula (3.32) para expresar el producto cruz de S y V se escribe:

$$S \cdot (P \times Q) = S \cdot V = S_x V_x + S_y V_y + S_z V_z$$

Si se sustituyen las componentes de V a partir de la ecuación (3.32), se obtiene:

$$S \cdot (P \times Q) = S_x (P_y Q_z - P_z Q_y) + S_y (P_z Q_x - P_x Q_z) + S_z (P_x Q_y - P_y Q_x) \quad (3.38)$$

Esta expresión se puede escribir de una manera compacta si se observa que representa la expansión de un determinante:

$$S \cdot (P \times Q) = \begin{vmatrix} S_x & S_y & S_z \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \quad (3.39)$$

Apartando las r que aparecen en la permutación de renglones en un determinante, pueden verificarse fácilmente las relaciones (3.38) que fueron derivadas a partir de consideraciones geométricas.

3.11 MOMENTO DE UNA FUERZA CON RESPECTO A UN EJE DADO

Antes, por se le ha mencionado, el concepto del momento de una fuerza con respecto a un eje. Considerémoslo nuevamente la fuerza \mathbf{F} que actúa sobre un punto en posición el momento M_O de la fuerza \mathbf{F} con respecto al eje OL es $M_O = \lambda \cdot M_{OL}$. Si M_O es el momento M_{OL} de \mathbf{F} con respecto a OL , se define como la proyección OC del momento M_{OL} sobre el eje OL . Tal como se ilustra en la sección anterior, los ángulos α de OL con \mathbf{A} y \mathbf{r} en la figura 3.27 son λ_x y λ_r respectivamente. Las expresiones (3.41) y (3.42) obtenidas para el momento M_O con respecto al eje fijo OL para el momento M_{OL} de una fuerza \mathbf{F} se escribe

$$M_O = \lambda \cdot M_{OL} = \lambda \cdot \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (3.42)$$

donde λ es el escalar $\lambda = \cos \alpha$ de OL con \mathbf{F} con respecto al eje OL y M_{OL} es el momento de \mathbf{F} con respecto al eje OL . El producto $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ es el \mathbf{A} y \mathbf{F} . Expresando a M_{OL} en forma de determinante se tiene

$$M_{OL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (3.43)$$

donde $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z =$ cosenos directores del eje OL .

$x, y, z =$ coordenadas del punto de aplicación de \mathbf{F}

$F_x, F_y, F_z =$ componentes de la fuerza \mathbf{F}

El significado físico del momento M_{OL} de una fuerza \mathbf{F} con respecto al eje fijo OL se vuelve más evidente si se descompone a \mathbf{F} en las componentes rectangulares \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 con \mathbf{F}_1 paralelo a OL y \mathbf{F}_2 contenido en el plano P perpendicular a OL (Fig. 3.28). En forma similar, descomponiendo a \mathbf{r} en dos componentes \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 y substituyendo a \mathbf{F} y a \mathbf{r} en (3.42), se escribe

$$\begin{aligned} M_{OL} &= \lambda \cdot (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) \\ &= \lambda \cdot (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1) + \lambda \cdot (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_2) + \lambda \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_1) + \lambda \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2) \end{aligned}$$

Con excepción del último término del lado derecho, todos los paréntesis triplicados escalares son iguales a cero, puesto que \mathbf{r}_1 y \mathbf{F}_1 son vectores que son coplanarios cuando se trazan a partir del mismo origen como se ilustra en la Fig. 3.29.

$$M_{OL} = \lambda \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2) \quad (3.44)$$

El producto escalar $\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2$ es perpendicular al plano P y, por lo tanto, el momento de la componente \mathbf{F}_2 de \mathbf{F} con respecto al punto Q donde OL interseca a P . Por tanto, el escalar M_{OL} , el cual será positivo si $\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2$ y OL tienen el mismo sentido y negativo en caso contrario, mide la tendencia de \mathbf{F} a hacer girar el cuerpo rígido de acuerdo con la Fig. 3.29. Como la fuerza \mathbf{F} es la suma de \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 , el momento M_{OL} de \mathbf{F} con respecto a OL mide la tendencia de la fuerza \mathbf{F} de impartirle al cuerpo rígido un movimiento de rotación alrededor del eje fijo OL .

www.geocienciasvirtua.blogspot.com.co



Figura 3.27



Figura 3.28

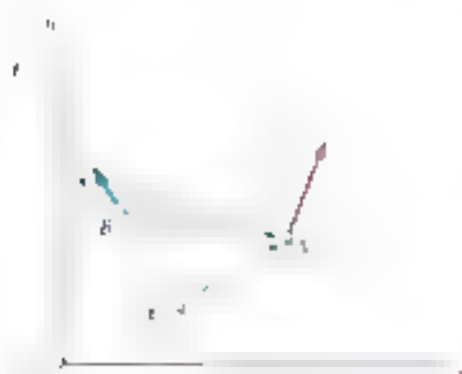


Figura 3.28

A partir de la definición del momento de una fuerza con respecto a un eje, se concluye que el momento de \mathbf{F} con respecto a un eje coincide matemáticamente con el momento de \mathbf{M}_O a lo largo de dicho eje. Al considerar \mathbf{A} de acuerdo con la figura 3.28, por cada uno de los vectores unitarios \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} se observa que las expresiones asociadas para los momentos de \mathbf{F} con respecto a \mathbf{i} , \mathbf{j} o \mathbf{k} se obtienen al considerar los componentes de \mathbf{F} paralelos a los ejes y o z o x y la sección perpendicular que contiene al momento \mathbf{M}_O de \mathbf{F} con respecto a O :

$$\begin{aligned} M_x &= yF_z - zF_y \\ M_y &= zF_x - xF_z \\ M_z &= xF_y - yF_x \end{aligned} \quad (3.18)$$

Se observa que de la misma forma que las componentes F_x , F_y y F_z de una fuerza \mathbf{F} que actúa sobre un cuerpo rígido hacen, respectivamente, el momento de \mathbf{F} a mover el cuerpo rígido en las direcciones de x , y y z , los momentos M_x , M_y y M_z de \mathbf{F} con respecto a los ejes coordenados hacen, respectivamente, la tendencia de \mathbf{F} a impartirle al cuerpo rígido un movimiento de rotación alrededor de los ejes x , y y z .

En general, el momento de una fuerza \mathbf{F} aplicada en A con respecto a un eje λ , que no pasa a través del origen, se obtiene seleccionando un punto cualquiera B sobre dicho eje (Figura 3.29) y determinando la proyección sobre el eje BL del momento \mathbf{M}_B de \mathbf{F} con respecto a B . Entonces, se escribe:

$$M_{BL} = \lambda \cdot \mathbf{M}_B = \lambda \cdot (\mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{F}) \quad (3.19)$$

Por lo $\mathbf{r}_{AB} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B$ representa a vector trazado desde B hasta A . Expresando a M_{BL} en forma de los cosenos directores, se tiene:

$$M_{BL} = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ \mathbf{r}_{AB} & r_{ABx} & r_{ABy} & r_{ABz} \\ \mathbf{F} & F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (3.46)$$

donde λ_x , λ_y , λ_z = cosenos directores del eje BL .

$$\begin{aligned} r_{ABx}, r_{ABy}, r_{ABz} &= r_{AB} \cos \theta_{ABx}, \theta_{ABy}, \theta_{ABz} \quad r_{AB} = |\mathbf{r}_{AB}| \\ F_x, F_y, F_z &= \text{componentes de la fuerza } \mathbf{F} \end{aligned}$$

Se debe observar que el resultado obtenido es independiente del punto B seleccionado sobre el eje dado. De hecho, denotando con M_{BL} el resultado obtenido con un punto C diferente, se tiene:

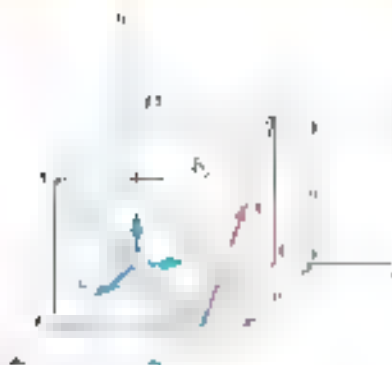
$$\begin{aligned} M_{BL} &= \lambda \cdot [(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_C) \times \mathbf{F}] \\ &= \lambda \cdot [(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F}] + \lambda \cdot [(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C) \times \mathbf{F}] \end{aligned}$$

Pero como los vectores λ y $\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C$ son colineales, el volumen del paralelepípedo que tiene por lados a los vectores λ , $\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C$ y \mathbf{F} es igual a cero, es igual que el producto triple escalar de dichos vectores sea igual a 0. Entonces, la expresión obtenida para M_{BL} se reduce a su primer término, el cual es la expresión completa anteriormente dada para definir a M_{BL} . De manera adicional, a partir de la sección 3.6 se concluye que cuando se calcula el momento de \mathbf{F} con respecto a un eje dado, A puede ser cualquier punto a lo largo de la línea de acción de \mathbf{F} .



PROBLEMA RESUELTO 3.5

Sobre el cubo de lado a actúa una fuerza \mathbf{P} como se muestra en la figura. Determine el momento de \mathbf{P} a) con respecto a A , b) con respecto a la arista AB , c) con respecto a la diagonal AC de una de las caras del cubo, y d) determine la distancia perpendicular entre AC y EF .



SOLUCIÓN

a) **Momento con respecto a A.** El momento de \mathbf{P} con respecto a A es igual a $\mathbf{r}_{PA} \times \mathbf{P}$, donde \mathbf{r}_{PA} es el vector posición de P con respecto a A . El vector \mathbf{r}_{PA} se puede expresar en términos de los ejes de coordenadas.

$$\mathbf{r}_{PA} = a\mathbf{i} - a\mathbf{j} = a(\mathbf{i} - \mathbf{j})$$

$$\mathbf{P} = (P/\sqrt{2})\mathbf{j} - (P/\sqrt{2})\mathbf{k} = (P/\sqrt{2})(\mathbf{j} - \mathbf{k})$$

El momento de \mathbf{P} con respecto a A es igual a

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_{PA} \times \mathbf{P} = a(\mathbf{i} - \mathbf{j}) \times (P/\sqrt{2})(\mathbf{j} - \mathbf{k})$$

b) **Momento con respecto a AB.** Proyectando a \mathbf{M}_A sobre AB , se escribe

$$\mathbf{M}_{AB} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{M}_A = (-aP/\sqrt{2})(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

$$M_{AB} = aP/\sqrt{2}$$

Se verifica que, como AB es paralela al eje x , \mathbf{M}_{AB} también es la componente del momento \mathbf{M}_A .

c) **Momento con respecto a la diagonal AC.** El momento de \mathbf{P} con respecto a AC se obtiene proyectando a \mathbf{M}_A sobre AC . Denotando con \mathbf{u} al vector unitario a lo largo de AC , se tiene

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{r}_{AC}}{r_{AC}} = \frac{a\mathbf{i} + a\mathbf{j} + a\mathbf{k}}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

$$M_{AC} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{M}_A = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot (-aP/\sqrt{2})(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

$$M_{AC} = -aP/\sqrt{6}$$

Método alternativo. El momento de \mathbf{P} con respecto a AC también se puede expresar en forma de determinante:

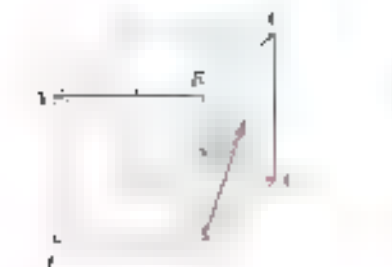
$$M_{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & 0 \\ a & P/\sqrt{2} & -P/\sqrt{2} \end{vmatrix} = aP/\sqrt{6}$$

d) **Distancia perpendicular entre AC y EF.** Como \mathbf{P} es perpendicular a la diagonal AC , esto se puede comprobar con el producto escalar $\mathbf{P} \cdot \mathbf{u} = 0$.

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{u} = (P/\sqrt{2})(\mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (1/\sqrt{3})(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) = (P\sqrt{6})(0 - 1 + 1) = 0$$

Entonces, el momento M_{AC} puede ser expresado como $-Pd$, donde d es la distancia perpendicular entre AC y EF . El signo negativo se debe a que el momento M_{AC} es negativo en el sentido de las manecillas del reloj. Reconvirtiendo el valor encontrado para M_{AC} en el inciso c), se tiene

$$M_{AC} = -Pd = -aP/\sqrt{6} \quad d = a/\sqrt{6}$$



El momento de la fuerza \mathbf{F} es el producto vectorial de \mathbf{r} y \mathbf{F} . Se debe recordar que \mathbf{r} y \mathbf{F} son perpendiculares \mathbf{F} de la fuerza. P es la perpendicular a \mathbf{r} que el cuerpo ejerce con respecto al eje OM (figura 5b). Entonces se cumple que:

$$M_{eq} = Fd$$

donde M_{eq} es el momento de \mathbf{F} respecto del eje OM y d es la distancia perpendicular entre OM y la línea de acción de \mathbf{F} . Esta es una ecuación proporcional a la fuerza y al perpendículo d . Podemos suponer que d es el momento de la fuerza \mathbf{F} con respecto al eje OM de una línea de acción de \mathbf{F} que pasa por P y es perpendicular a \mathbf{F} . Después viene el momento M_{eq} de la fuerza \mathbf{F} con respecto a la segunda línea con el eje OM que se representa en los párrafos anteriores como el momento paralelo a \mathbf{F} y \mathbf{F} sustituye al vector \mathbf{r} en la ecuación:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F} \times \mathbf{A}$$

El valor de F_2 se determina a partir de

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$$

Por último se sustituye los valores de M_{eq} y d en la ecuación $M_{eq} = Fd$ y se resuelve para d .

Ahora se puede comprender que el denominador d es la distancia perpendicular en el momento d del momento de \mathbf{F} y se simplifica obteniendo que P es la perpendicular a la dirección OM . Como en general las dos líneas de acción son perpendiculares la ecuación resultante se puede simplificar más se desea determinar la distancia perpendicular entre ellas.

Problemas

Figura P3.35

3.35 Dados los vectores $\mathbf{P} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{Q} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{S} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, obtenga los productos escalares $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$, $\mathbf{P} \cdot \mathbf{S}$ y $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{S}$.

3.36 Obtenga los productos escalares $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$ y $\mathbf{B}' \cdot \mathbf{C}$, donde $\mathbf{B} = \mathbf{B}'$ y utilice los resultados obtenidos para demostrar la identidad:

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos (\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cos (\alpha - \beta)$$

3.37 La sección AB de una tubería se encuentra en el plano yz y forma un ángulo de 37° con el eje z. Las líneas rectas CD y EF se sitúan a AB como se muestra en la figura. Determine el ángulo que forman las líneas AB y CD.

3.38 La sección AB de una tubería se encuentra en el plano yz y forma un ángulo de 37° con el eje z. Las líneas rectas CD y EF se sitúan a AB como se muestra en la figura. Determine el ángulo que forman las líneas AB y EF.

3.39 Determine el ángulo formado por los tirantes AB y AC de la red de voladizo que se muestra en la figura.

Figura P3.37 y P3.38

Figura P3.39 y P3.40

3.40 Determine el ángulo formado por los tirantes AC y AD de la red de voladizo que se muestra en la figura.

3.41 Si se sabe que la tensión en el cable AC es de 1 260 N, determine el ángulo que forma el cable AB con el eje x. Además, determine la fuerza ejercida por el cable AC en el punto A.

3.42 Si se sabe que la tensión en el cable AD es de 405 N, determine el ángulo que forma el cable AB con el eje x. Además, determine la fuerza ejercida por el cable AD en el punto A.

Figura P3.41 y P3.42

3.43 El collarín P se puede mover a lo largo de la barra OA . Una cuerda elástica PC está unida al collarín y al elemento vertical BC . Se sabe que la distancia del punto O al punto P es de 5 m , y que la tensión en la cuerda es 4 kN . Determine el valor de la fuerza ejercida por la cuerda PC en el punto P .

3.44 El collarín P se puede mover a lo largo de la barra OA . Una cuerda elástica PC está unida al collarín y al elemento vertical BC . Determine la distancia OP si la fuerza ejercida por la cuerda PC en el punto P es 4 kN .

3.45 Determine el volumen del paralelepípedo de la Figura 3.28 si $\mathbf{P} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{Q} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{S} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{P} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{Q} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{S} = -3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

3.46 Dados los vectores $\mathbf{P} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{Q} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, y $\mathbf{S} = S_1\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, determine el valor de S_1 para el cual los tres vectores son coplanares.

3.47 La tapa ABC (D de un lado) de $0.6\text{ m} \times 1.00\text{ m}$ tiene bisagras a lo largo de AB y se mantiene abierta mediante una cuerda DEC que pasa sobre la guarnición E situada en D . Se le ejerce una fuerza de 50 N perpendicular al momento de la fuerza ejercida por la cuerda en D respecto de AB . Determine el momento de la fuerza ejercida por la cuerda en D respecto de AB .



Figura P3.43 y P3.44



Figura P3.47 y P3.48

3.48 La tapa ABC (D de un lado) de $0.6\text{ m} \times 1.00\text{ m}$ tiene bisagras a lo largo de AB y se mantiene abierta mediante una cuerda DEC que pasa sobre la guarnición E situada en D . Se le ejerce una fuerza de 50 N perpendicular al momento de la fuerza ejercida por la cuerda en C respecto de AB . Determine el momento de la fuerza ejercida por la cuerda en C respecto de AB .



Figura P3.49 y P3.50



Figura P3.51



Figura P3.55

3.49 Para levantar una caja pesada, un hombre usa un bloque y un polipasto a los que se aplica la fuerza mostrada en la figura. Se sabe que los momentos de los ejes y y z de la fuerza ejercida en B por el tramo AB de la cuerda son, respectivamente, de $120 \text{ N} \cdot \text{m}$ y $-400 \text{ N} \cdot \text{m}$. Determine la distancia a .

3.50 Para levantar una caja pesada, un hombre usa un bloque y un polipasto a los que se aplica la fuerza mostrada en la figura. Se sabe que el hombre aplica una fuerza de 115 N a lo largo AB y que el momento de esa fuerza alrededor del eje y es de $132 \text{ N} \cdot \text{m}$, determine la distancia a .

3.51 Una jaula pequeña cuelga de dos grúas, una de las cuales se muestra en la figura. Se sabe que el momento alrededor del eje y de la fuerza resultante R , ejercida sobre la grúa en A no debe exceder $270 \text{ lb} \cdot \text{ft}$ en valor absoluto. Determine la máxima distancia a cuando la fuerza F es de 400 lb cuando $x = 8 \text{ ft}$.

3.52 Para la grúa del problema 3.51, determine la máxima distancia a cuando la fuerza F es de 400 lb y $x = 8 \text{ ft}$.

3.53 Para alinear una viga, un cable se aplica como se muestra en la figura. Se sabe que el momento de F alrededor del eje y es de $10 \text{ lb} \cdot \text{ft}$. Si se sabe que $\theta = 30^\circ$ y $M_x = 10 \text{ lb} \cdot \text{ft}$, determine ϕ .



Figura P3.53 y P3.54

3.54 Cuando se aplica una fuerza F sobre la manivela de la válvula mostrada en la figura, los momentos alrededor de los ejes x y z son $M_x = -77 \text{ lb} \cdot \text{ft}$ y $M_z = -91 \text{ lb} \cdot \text{ft}$, respectivamente. Si $d = 27 \text{ in.}$, determine el momento M_y de F alrededor del eje y .

3.55 El marco ACD está articulado en A y D y se sostiene por medio de un cable el cual pasa a través de un anillo en B y está anclado a las ganchos en C y H . Si se sabe que la tensión en el cable es de 450 N , determine el momento respecto al eje y causado por la fuerza ejercida sobre el marco por el tramo BH del cable.

3.55 En el problema 3.55 determine el momento respecto de la diagonal AD de la fuerza ejercida sobre el mástil por el cable BC . Los cables

3.57 La placa triangular ABC se sostiene mediante soportes de rótula en B y D y se mantiene en la posición mostrada mediante los cables AE y CF . Si la fuerza ejercida por el cable AE en A es de 55 N , determine el momento de esa fuerza respecto de la línea que une los puntos D y B .

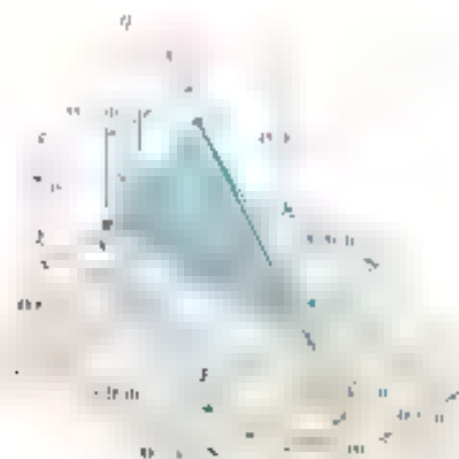


Figura P3.57 y P3.58

3.58 La placa triangular ABC se sostiene mediante soportes de rótula en B y D y se mantiene en la posición mostrada mediante los cables AE y CF . Si la fuerza ejercida por el cable CF en C es de 33 N , determine el momento de esa fuerza respecto de la línea que une los puntos D y B .

3.59 Un tetraedro regular tiene seis lados de longitud a . Si una fuerza \mathbf{P} se aplica a lo largo del borde BC como se muestra en la figura. Determine el momento de la fuerza \mathbf{P} alrededor del borde OA .

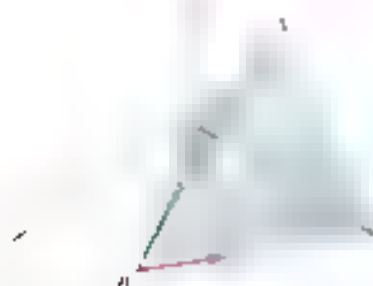


Figura P3.59 y P3.60

3.60 Un tetraedro regular tiene seis lados de longitud a . a) Demuestre que los segmentos que unen el centro A y B con el centro del triángulo opuesto C y D se cruzan en un punto G y que $AG = \frac{1}{4}AC$. b) Use esta propiedad y encuentre el momento de la fuerza \mathbf{P} alrededor del eje OA para determinar la distancia perpendicular entre los bordes OA y BC .

3.61 Un letrero en ángulo sobre suelo irregular se sostiene mediante los cables atados a los puntos E y F en S . La fuerza ejercida por el cable EF en F es de 54 lb. Determine el momento de esa fuerza alrededor de la línea que une los puntos A y D .

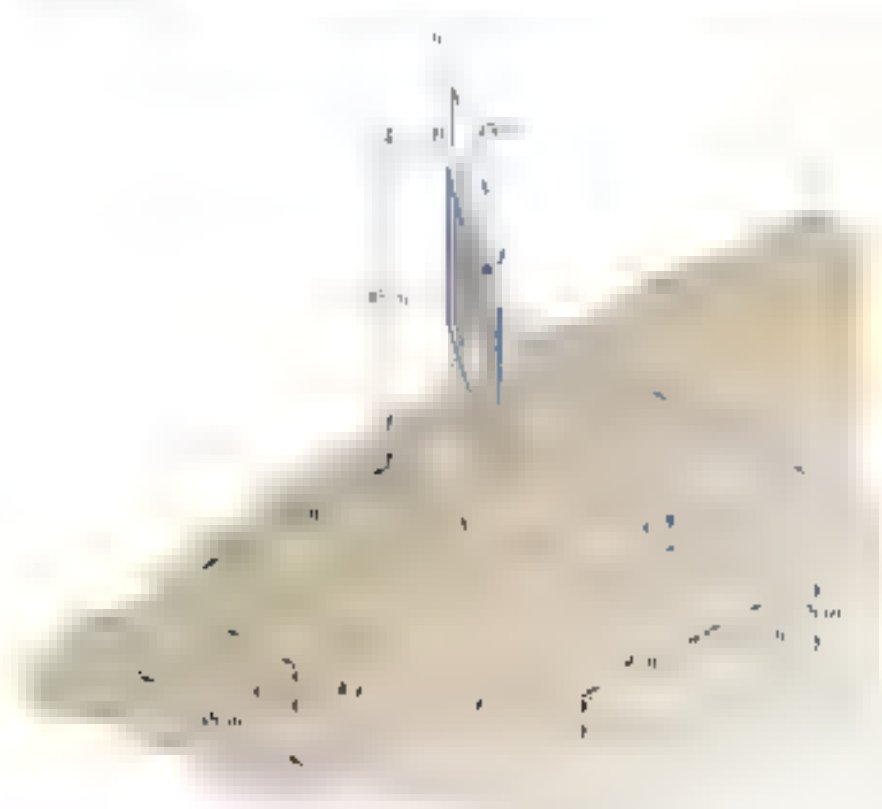


Figura P3.61 y P3.62

3.62 Un letrero en ángulo sobre suelo irregular se sostiene mediante los cables atados a los puntos E y F en S . La fuerza ejercida por el cable EF en F es de 54 lb. Determine el momento de esa fuerza alrededor de la línea que une los puntos A y D .

3.63 Dos fuerzas F_1 y F_2 en el espacio tienen la misma magnitud F . Demuestre que el momento resultante de F_1 y F_2 alrededor de la línea que une los puntos A y D es igual al momento de la fuerza resultante $F_1 + F_2$ alrededor de la línea AD .

3.64 En el problema 3.53 determine la distancia perpendicular entre el punto BH del cable y la diagonal AD .

3.65 En el problema 3.56 determine la distancia perpendicular entre el punto BC del cable y la diagonal AD .

3.66 En el problema 3.57 determine la distancia perpendicular entre el cable AE y la línea que une los puntos D y B .

3.67 En el problema 3.58 determine la distancia perpendicular entre el cable EF y la línea que une los puntos D y B .

3.68 En el problema 3.59 determine la distancia perpendicular entre el cable EF y la línea que une los puntos A y D .

3.69 En el problema 3.62 determine la distancia perpendicular entre el cable EF y la línea que une los puntos A y D .

3.12 MOMENTO DE UN PAR

Se dice que dos fuerzas \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$ que tienen la misma magnitud, líneas de acción paralelas y sentidos opuestos forman un par (figura 3.30).

Obviamente, la suma de las componentes de las dos fuerzas en cualquier dirección es igual a cero. Sin embargo, la suma de los momentos de las dos fuerzas con respecto a un punto dado no es cero. Aunque las dos fuerzas no originan movimiento neto, el sistema sobre el que están actuando sí que se puede hacer girar.

Al representar con \mathbf{r}_A y \mathbf{r}_B respectivamente a los vectores de posición de los puntos de aplicación de \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$ (figura 3.31), se obtiene que la suma de los momentos de las dos fuerzas con respecto a O es

$$\mathbf{r}_A \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_B \times (-\mathbf{F}) = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F}$$

Si se define $\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B = \mathbf{r}$ donde \mathbf{r} es el vector que une los puntos de aplicación de las dos fuerzas se tiene, según la suma de los momentos de \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$ con respecto a O está representado por el vector

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (3.47)$$

El vector \mathbf{M} se conoce como el **momento del par**; se trata de (a) vector perpendicular al plano que contiene las dos fuerzas y su magnitud está dada por

$$M = rF \sin \theta = Fd \quad (3.48)$$

donde d es la distancia perpendicular entre las líneas de acción de \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$ ($d = F \sin \theta$), θ es el ángulo entre \mathbf{r} y \mathbf{F} y \mathbf{M} está definido por la regla de la mano derecha.

Cuando el vector \mathbf{r} en (3.47) es perpendicular a la dirección de origen O de los ejes coordenados, se observa que se obtendría el mismo momento si los momentos de \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$ se hubieran calculado con respecto a algún punto O' . Por tanto, el momento \mathbf{M} de un par es una **cantidad libre vectorial** (2.3) que puede ser aplicada en cualquier punto (figura 3.32).

A partir de la definición del momento de un par también se concluye que dos pares, uno constituido por las fuerzas \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$ y el otro constituido por las fuerzas \mathbf{F}' y $-\mathbf{F}'$ (figura 3.33) están en equilibrio si

$$F d = F' d' \quad (3.49)$$

y si los dos pares se encuentran en planos paralelos o en el mismo plano (figura 3.34).

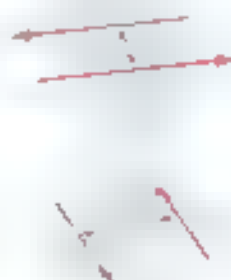


Figura 3.33

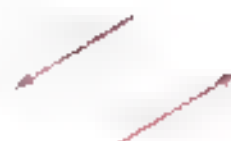


Figura 3.30

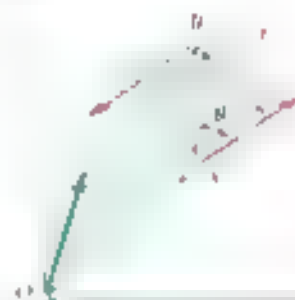


Figura 3.31

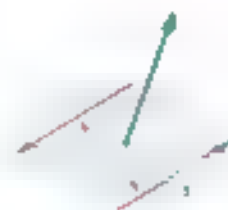
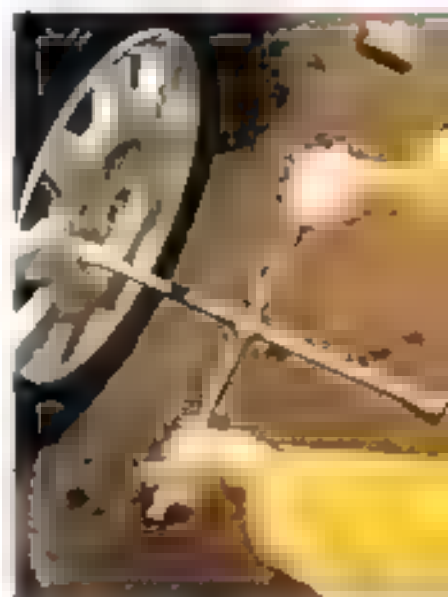


Figura 3.32



Fotografía 3.1 Las fuerzas paralelas de igual magnitud ejercidas hacia arriba y hacia abajo sobre los brazos de la cruzeta son ejemplo de un par.



En consecuencia, si tenemos las condiciones $\vec{v} \perp \vec{A}$ y $\vec{B} \perp \vec{A}$, como se indica en la figura 3.35b. Entonces, la fuerza \vec{F} , se descompone en una componente \vec{P} a lo largo de la línea AB y una componente \vec{Q} perpendicular a AB . En consecuencia, la fuerza \vec{P} se descompone en $\vec{P} = P_1 \vec{u}_1 + P_2 \vec{u}_2$ y en $\vec{Q} = Q_1 \vec{u}_3 + Q_2 \vec{u}_4$. Las fuerzas \vec{P} y \vec{Q} tienen la misma magnitud, la misma línea de acción y sentidos opuestos. Los dos fuerzas poseen una misma longitud de $\frac{1}{2} \sqrt{2}$ de acuerdo con el teorema de Pitágoras. Las fuerzas \vec{P} y \vec{Q} se pueden considerar como un par constituido por \vec{Q} y $-\vec{Q}$.

[illegible]

$$G_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta} - F_{\beta\alpha} \quad \text{with} \quad U = I$$

Los tipos cartesianos $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$ son iguales a respecto a un \sim cualquier $\mathbf{P} \times \mathbf{T}$ es representado por $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ es equivalente al producto $\{a, b\} \times \{c, d\}$

Considere ahora dos pares contenidos en planos paralelos P_1 y P_2 , a continuación se ilustra una posible configuración de los pares en los dos planos considerando el caso de la figura 2. Se supone que se puede suponer que ambos pares están distribuidos uniformemente en los dos planos, la igualdad $F_1 = F_2$ que se obtiene al integrar las ecuaciones (1) y (2) sobre \mathcal{A} se puede escribir como $F_1 = F_2$ donde F_i denota el área de la proyección de P_i sobre el plano \mathcal{A} y F denota el área de la proyección de \mathcal{A} sobre el plano P_i .

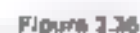
[illegible]



Figura 3.37

dos y opuestas \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$ se obtiene el par de sentido en el plano P' en la figura 3.36c. Por lo tanto se puede suponer que los pares que actúan en los planos P y P' son equivalentes al estar contenidos en el mismo plano o en planos paralelos.

La propiedad que se desea de establecer es muy importante para comprender ciertas de las propiedades de los cuerpos rígidos. Estas propiedades se establecen para el caso de un cuerpo rígido y se demuestran por medio de las propiedades de los cuerpos rígidos. En el caso de un cuerpo rígido, se puede demostrar que las propiedades de los cuerpos rígidos se demuestran por medio de las propiedades de los cuerpos rígidos. La única propiedad que se demuestran por medio de las propiedades de los cuerpos rígidos es el momento de par de un cuerpo rígido. Los pares con el mismo momento tendrían el mismo efecto sobre el cuerpo rígido.

3.14. ADICIÓN O SUMA DE PARES

Considérense dos pares P y P' que se intersecan y los pares que actúan respectivamente en P y P' . Se desea saber si existe una propiedad que el par P de las fuerzas \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$ perpendicular a AB y el par P' de las fuerzas \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$ perpendicular a BC y que actúan exactamente en P y P' (figura 3.37). En forma similar se supone que el par en P' consta de dos fuerzas \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$ perpendicular a BC y que actúan respectivamente en A y B . Es obvio que las fuerzas \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$ y \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 y la resultante $-\mathbf{R}$ de $-\mathbf{F}_1$ y $-\mathbf{F}_2$ forman un par. Si se representa con \mathbf{r} el vector que une a B con A y si recordamos la definición de par (sección 3.12) el momento \mathbf{M} del par P se puede expresar como sigue:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} + \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

y por el teorema de Varignon,

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} + \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

Pero el primer término en la expresión obtenida representa al momento \mathbf{M}_1 del par en P_1 y el segundo término representa al momento \mathbf{M}_2 del par en P_2 . Así se tiene:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 \quad (3.50)$$

y se concluye que la suma de dos pares cuyos momentos son iguales a $\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_2 = \mathbf{M}$ por lo tanto \mathbf{M} igual a la suma vectorial de \mathbf{M}_1 y \mathbf{M}_2 (figura 3.37b).

3.15. LOS PARES PUEDEN REPRESENTARSE POR MEDIO DE VECTORES

Como se vio en la sección 3.1, los pares de fuerzas en un cuerpo rígido se pueden representar por medio de un vector en un plano perpendicular al plano de las fuerzas. En la figura 3.38a se muestra un cuerpo rígido con un par de fuerzas \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$ que actúan en los puntos A y B y se muestra el vector \mathbf{r} que une a B con A . El momento \mathbf{M} del par P se puede representar por medio de un vector \mathbf{M} que actúa en el punto A y se muestra el vector \mathbf{r} que une a B con A . En la figura 3.38b se muestra un cuerpo rígido con un par de fuerzas \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$ que actúan en los puntos A y B y se muestra el vector \mathbf{r} que une a B con A . En la figura 3.38c se muestra un cuerpo rígido con un par de fuerzas \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$ que actúan en los puntos A y B y se muestra el vector \mathbf{r} que une a B con A . En la figura 3.38d se muestra un cuerpo rígido con un par de fuerzas \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$ que actúan en los puntos A y B y se muestra el vector \mathbf{r} que une a B con A . En la figura 3.38e se muestra un cuerpo rígido con un par de fuerzas \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$ que actúan en los puntos A y B y se muestra el vector \mathbf{r} que une a B con A . En la figura 3.38f se muestra un cuerpo rígido con un par de fuerzas \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$ que actúan en los puntos A y B y se muestra el vector \mathbf{r} que une a B con A . En la figura 3.38g se muestra un cuerpo rígido con un par de fuerzas \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$ que actúan en los puntos A y B y se muestra el vector \mathbf{r} que une a B con A . En la figura 3.38h se muestra un cuerpo rígido con un par de fuerzas \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$ que actúan en los puntos A y B y se muestra el vector \mathbf{r} que une a B con A . En la figura 3.38i se muestra un cuerpo rígido con un par de fuerzas \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$ que actúan en los puntos A y B y se muestra el vector \mathbf{r} que une a B con A . En la figura 3.38j se muestra un cuerpo rígido con un par de fuerzas \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$ que actúan en los puntos A y B y se muestra el vector \mathbf{r} que une a B con A . En la figura 3.38k se muestra un cuerpo rígido con un par de fuerzas \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$ que actúan en los puntos A y B y se muestra el vector \mathbf{r} que une a B con A . En la figura 3.38l se muestra un cuerpo rígido con un par de fuerzas \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$ que actúan en los puntos A y B y se muestra el vector \mathbf{r} que une a B con A . En la figura 3.38m se muestra un cuerpo rígido con un par de fuerzas \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$ que actúan en los puntos A y B y se muestra el vector \mathbf{r} que une a B con A . En la figura 3.38n se muestra un cuerpo rígido con un par de fuerzas \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$ que actúan en los puntos A y B y se muestra el vector \mathbf{r} que une a B con A . En la figura 3.38o se muestra un cuerpo rígido con un par de fuerzas \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$ que actúan en los puntos A y B y se muestra el vector \mathbf{r} que une a B con A . En la figura 3.38p se muestra un cuerpo rígido con un par de fuerzas \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$ que actúan en los puntos A y B y se muestra el vector \mathbf{r} que une a B con A . En la figura 3.38q se muestra un cuerpo rígido con un par de fuerzas \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$ que actúan en los puntos A y B y se muestra el vector \mathbf{r} que une a B con A . En la figura 3.38r se muestra un cuerpo rígido con un par de fuerzas \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$ que actúan en los puntos A y B y se muestra el vector \mathbf{r} que une a B con A . En la figura 3.38s se muestra un cuerpo rígido con un par de fuerzas \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$ que actúan en los puntos A y B y se muestra el vector \mathbf{r} que une a B con A . En la figura 3.38t se muestra un cuerpo rígido con un par de fuerzas \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$ que actúan en los puntos A y B y se muestra el vector \mathbf{r} que une a B con A . En la figura 3.38u se muestra un cuerpo rígido con un par de fuerzas \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$ que actúan en los puntos A y B y se muestra el vector \mathbf{r} que une a B con A . En la figura 3.38v se muestra un cuerpo rígido con un par de fuerzas \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$ que actúan en los puntos A y B y se muestra el vector \mathbf{r} que une a B con A . En la figura 3.38w se muestra un cuerpo rígido con un par de fuerzas \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$ que actúan en los puntos A y B y se muestra el vector \mathbf{r} que une a B con A . En la figura 3.38x se muestra un cuerpo rígido con un par de fuerzas \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$ que actúan en los puntos A y B y se muestra el vector \mathbf{r} que une a B con A . En la figura 3.38y se muestra un cuerpo rígido con un par de fuerzas \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$ que actúan en los puntos A y B y se muestra el vector \mathbf{r} que une a B con A . En la figura 3.38z se muestra un cuerpo rígido con un par de fuerzas \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$ que actúan en los puntos A y B y se muestra el vector \mathbf{r} que une a B con A .

El vector \mathbf{r} que representa un par recibe el nombre de **vector de par**. El sistema que está a mano izquierda se usa para definir la regla para determinar el sentido de par: *siendo \mathbf{r} el vector de posición del par y \mathbf{F} la fuerza que actúa sobre el cuerpo, el sentido del par se define en sentido horario*. Nótese también que se ha agregado el símbolo $\hat{\mathbf{z}}$ a esta flecha roja con el fin de evitar la confusión sobre cuál de los vectores \mathbf{r} o \mathbf{F} es la fuerza \mathbf{F} y cuál el vector de par \mathbf{r} que actúa sobre el cuerpo libre. En tanto su punto de aplicación puede ser en la línea de acción del sistema de ejes cartesianos, denotamos su acción sobre el cuerpo libre por \mathbf{M} . Así mismo, el vector \mathbf{r} que denota \mathbf{M} se puede descomponer en componentes vectoriales M_x , M_y y M_z , las cuales están dirigidas a lo largo de los ejes cartesianos. Como lo ilustra la figura 3.18, las tres componentes vectoriales M_x , M_y y M_z que actúan respectivamente en los planos yz , xz y xy .

3.18. Descomposición de una fuerza dada en una fuerza en $\hat{\mathbf{O}}$ y un par



Figura 3.18

3.18. DESCOMPOSICIÓN DE UNA FUERZA DADA EN UNA FUERZA EN $\hat{\mathbf{O}}$ Y UN PAR

Consideremos una fuerza \mathbf{F} que actúa sobre un cuerpo rígido en un punto A definido por el vector de posición \mathbf{r} (figura 3.18a). Si se mueve el punto A a $\hat{\mathbf{O}}$, se puede decir que la fuerza actúa en el punto $\hat{\mathbf{O}}$. Aunque \mathbf{F} se puede mover a lo largo de su línea de acción (principio de transferibilidad), no se puede mover al punto $\hat{\mathbf{O}}$ que no se encuentra sobre la línea de acción original de la fuerza. Sin embargo, se sabe que \mathbf{F} tiene sobre el cuerpo rígido

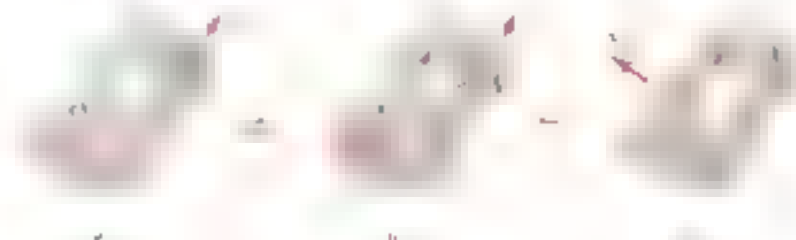


Figura 3.19

Así mismo, pueden moverse las fuerzas al punto $\hat{\mathbf{O}}$ considerando \mathbf{F} y trasladando a $\hat{\mathbf{O}}$ sus componentes referidos a la fuerza original actuando sobre el cuerpo rígido (figura 3.19b). Como se ha observado a lo largo de esta lección, cuando una fuerza \mathbf{F} se aplica en $\hat{\mathbf{O}}$, las tres componentes



Figura 3.29 (repetido)

forman un par con el momento $M_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. Por tanto, cualquier fuerza \mathbf{F} que actúe sobre un cuerpo rígido puede ser trasladada a un punto arbitrario O del cuerpo y cuando se agrega un par cuyo momento sea igual al momento de \mathbf{F} en O , es decir $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, se obtiene un sistema equivalente al original. Así, el momento de una fuerza \mathbf{F} con respecto a un punto O puede ser calculado trasladando \mathbf{F} a O y agregando un par cuyo momento sea igual al momento de \mathbf{F} en O . El par se representa por el vector de par \mathbf{M}_O que es perpendicular al plano que contiene a \mathbf{r} y a \mathbf{F} . Como \mathbf{M}_O es un vector libre, puede ser aplicado en cualquier lugar sin embargo, por conveniencia, usualmente el vector de par se fija en O y se denota \mathbf{F} y \mathbf{M}_O como el sistema fuerza-par en O que es equivalente a un sistema fuerza-par libre (Fig. 3.29).

Si la fuerza \mathbf{F} se hubiera trasladado del punto A a un punto diferente O' (Figura 3.40) se tendrían por cada una de las fuerzas $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ de \mathbf{F} con respecto a O' y se le hubiera fijado a O' un nuevo sistema fuerza-par constituido por \mathbf{F} y por el vector de par $\mathbf{M}_{O'}$. La relación que existe entre los momentos de \mathbf{F} con respecto a O y a O' se obtiene

$$\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{r}' \times \mathbf{F} = (\mathbf{r} + \mathbf{s}) \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} + \mathbf{s} \times \mathbf{F}$$

$$\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{M}_O + \mathbf{s} \times \mathbf{F} \quad (3.51)$$

donde \mathbf{s} es el vector que une a O' con O . De esta manera, el momento $\mathbf{M}_{O'}$ de \mathbf{F} con respecto a O' se obtiene sumándole al momento \mathbf{M}_O de \mathbf{F} con respecto a O el producto vectorial $\mathbf{s} \times \mathbf{F}$ que representa el momento con respecto a O de la fuerza \mathbf{F} aplicada en O .

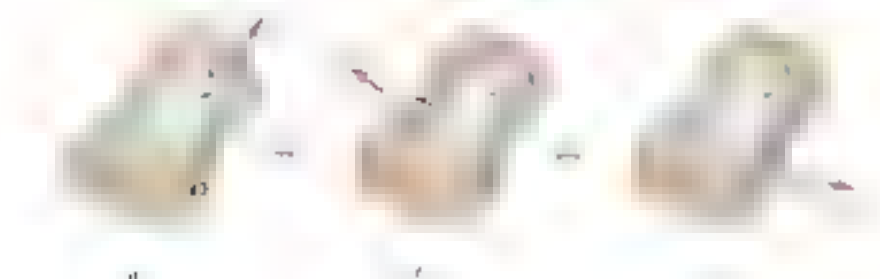


Figura 3.40



Fotografía 3.2 La fuerza ejercida por cada mano sobre el eje puede reemplazarse por un sistema equivalente fuerza-par que actúa sobre la fuerza

Este resultado también pudo obtenerse observando que para trasladar a O' al sistema fuerza-par unido a O (Figura 3.40) y el vector de par \mathbf{M}_O , se puede mover libremente a O' sin embargo, para mover la fuerza \mathbf{F} de O a O' es necesario agregar a \mathbf{F} un vector de par cuyo momento sea igual al momento con respecto a O de la fuerza \mathbf{F} aplicada en O . Por tanto, el vector de par $\mathbf{M}_{O'}$ debe ser igual a la suma de \mathbf{M}_O y el vector $\mathbf{s} \times \mathbf{F}$.

Como ya se ha mencionado, el sistema fuerza-par obtenido a partir de trasladar una fuerza \mathbf{F} de un punto A a un punto O consta de la fuerza \mathbf{F} y de un vector de par \mathbf{M}_O perpendicular a \mathbf{F} . Por el contrario, cualquier sistema fuerza-par que consista en una fuerza \mathbf{F} y un vector de par \mathbf{M}_O que sean mutuamente perpendiculares puede ser reemplazado por una sola fuerza \mathbf{F} cuyo valor sea $|\mathbf{F}|$ y se le haya fijado el punto perpendicular a \mathbf{M}_O hacia que se momento de \mathbf{F} con respecto a O sea igual al momento de \mathbf{F} con respecto a O .

PROBLEMA RESUELTO 3.7

Desplazarse el par y la fuerza mostrados en la figura por una sola fuerza equivalente aplicable en cualquier punto de la estructura, de modo que el efecto sea el mismo que el producido por el punto de aplicación de esta fuerza equivalente.



SOLUCION

Primero se reemplaza la fuerza y el par dados por un sistema equivalente fuerza-par en O. La fuerza $F = -400 \text{ N j}$ se mueve a O y al mismo tiempo se genera un momento M_O igual al momento producido por la fuerza en la fuerza en su posición original.



$$M_O = \vec{r}_O \times \vec{F} = (0.150 \text{ m}) \times (0.250 \text{ m}) \times (-400 \text{ N j}) \\ = -60 \text{ N} \cdot \text{m k}$$

Este par se suma al par formado por las dos fuerzas de 200 N, cuyo par de momento es $\vec{M} = 1 \text{ N} \cdot \text{m k}$ y se obtiene un momento resultante de $-59 \text{ N} \cdot \text{m k}$. Este momento se genera por la fuerza F en el punto B, a una distancia de 0.120 m.



$$-59 \text{ N} \cdot \text{m k} = \vec{r}_{OB} \times \vec{F} \\ = (0.150 \text{ m}) \times (0.250 \text{ m}) \times (-400 \text{ N j}) \times (-0.120 \text{ m}) \\ = -59 \text{ N} \cdot \text{m k}$$

Entonces, se concluye:

$$\vec{r}_{OB} = (0.150 \text{ m}) \times (0.250 \text{ m}) \times (-0.120 \text{ m})$$

Solución alternativa. Como el efecto de un par no depende de su posición, se puede eliminar el par y se obtiene un sistema fuerza-par en B. Ahora el par puede ser eliminado reemplazando la fuerza F en el punto C, a una distancia de 0.120 m.



$$-59 \text{ N} \cdot \text{m k} = \vec{r}_{BC} \times \vec{F} \\ \vec{r}_{BC} = (0.150 \text{ m}) \times (0.250 \text{ m}) \times (-0.120 \text{ m})$$

Así se concluye que:

$$\vec{r}_{BC} = (0.150 \text{ m}) \times (0.250 \text{ m}) \times (-0.120 \text{ m}) \quad \vec{r}_{BC} = (0.120 \text{ m}) \\ \vec{r}_{OC} = \vec{r}_{OB} + \vec{r}_{BC} = (0.150 \text{ m}) + (0.120 \text{ m}) \quad \vec{r}_{OC} = (0.270 \text{ m})$$



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se se **Labor** las propiedades de los **pares**. Para resolver las problemas que se presenten a continuación es necesario recordar que el **momento** de un par de fuerzas produce un momento **M**. Como el **momento** es el producto de punto con respecto al cual se calcula **M** es un **vector libre** y por tanto permanece inalterado cuando que se mueva un punto a otro. Además, los pares **equivalentes** sobre cualquier línea que sea o no el soporte de un cuerpo rígido dado, si producen el mismo momento.

Al determinar el **momento** de un par sin necesidad de aplicarse todas las técnicas vistas anteriormente para calcular momentos. Además, el **momento** de un par es un **vector libre** de ser determinado a cualquier punto que esté en las líneas de acción.

Existen algunas propiedades de los pares que producen **momento** es posible representar un par por medio de un **vector** **vector de par** que es igual al **momento** de un par. El **vector** de par es un **vector libre** y será representado por un símbolo especial para distinguirlo de los vectores de fuerza.

Al resolver los problemas o preguntas de esta lección se tendrán que llevar a cabo las siguientes operaciones:

1. **Sumar dos momentos** Este es el primer paso que se debe hacer cuando se debe encontrar la suma vectorial de los momentos de los pares dados (problema número 3.6)

2. **El momento de una fuerza con respecto a un punto** Este es el segundo paso que se debe hacer. Como se explicó en la sección 3.16, la **momento** de un sistema de fuerzas es igual a la **fuerza** original, mientras que el **momento** de un punto es igual al **momento** de la fuerza original con respecto al mismo punto. Además, es importante señalar que a la fuerza y al vector de par son perpendiculares entre sí. Por lo contrario se puede encontrar el **momento** de una fuerza que se puede reducir a una sola fuerza sobre su **fuerza** y el **vector** de par son mutuamente perpendiculares, véase el siguiente párrafo.

3. **El momento de una fuerza con respecto a un punto** Este es el tercer paso que se debe hacer. Obsérvese que el requisito de que **F** y **M** sean mutuamente perpendiculares se cumple en los casos de los pares de fuerzas mutuamente perpendiculares. La fuerza equivalente única es igual a **F** y se aplica en forma tal que su **momento** respecto al punto original de aplicación es igual a **M** (véase la sección 3.17).

Problemas

3.70 Dos fuerzas paralelas de 60 N se aplican sobre la tridiente que se muestra en la figura. Determine el momento de par formado por las dos fuerzas \mathbf{F} sumando los momentos de los dos pares que se producen al descomponer las fuerzas en sus componentes horizontales y verticales. La sumatoria de los momentos de las dos fuerzas alrededor de A



Figura P3.70

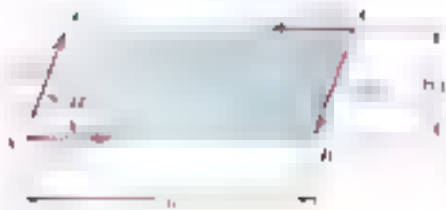


Figura P3.71

3.71 Una placa en forma de paralelogramo se somete a la acción de dos pares. Determine el momento de par formado por las dos fuerzas de 12 lb \mathbf{F} actuando a lo largo de la diagonal AC para el valor de θ si el es igual a 42 in. y el par resultante es de 2.3 lb \cdot in. El sentido de las manecillas de \mathbf{F} es

3.72 Una fuerza \mathbf{M} en un momento de 15 N \cdot m se aplica sobre el mango de un desarmador para apretar un tornillo en el bloque de madera mostrada. Determine los momentos de las fuerzas \mathbf{F} y \mathbf{G} alrededor de \mathbf{M} si se aplican en las esquinas A y D de las esquinas B y C en cualquier sentido necesario para equilibrar \mathbf{M} .

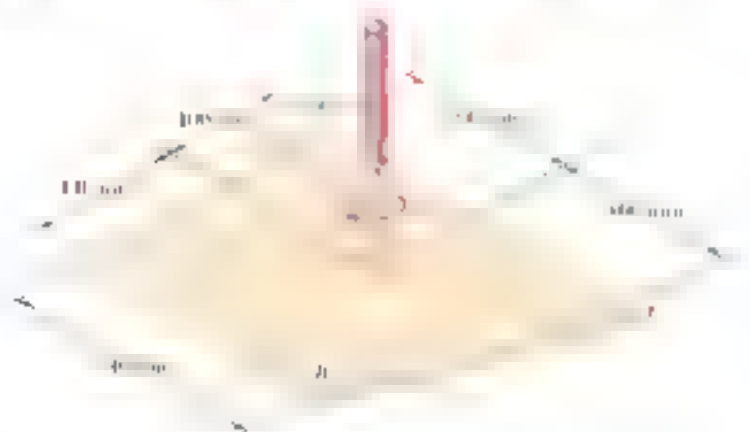


Figura P3.72

3.73 Cuatro clavijas de 1 in. de diámetro están montadas sobre una tabla de madera como se muestra en la figura. Dos cuerdas se pasan alrededor de las clavijas superior y inferior a las 10 o'clock y 2 o'clock, respectivamente, para aplicar una fuerza de 80 lb sobre la tabla. Determine el valor de esta tensión mínima?

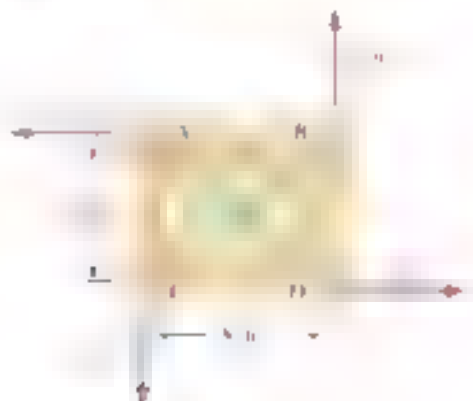


Figura P3.73 y P3.74

3.74 Cuatro clavijas del mismo diámetro están montadas sobre una tabla de madera como se muestra en la figura. Dos cuerdas se pasan alrededor de las clavijas superior y superior a las 10 o'clock y 2 o'clock, respectivamente, para aplicar una fuerza de 80 lb sobre la tabla. Determine el valor de esta tensión mínima?

3.75 Los ejes de una transmisión en ángulo están sometidos a la acción de los dos pares que se muestran en la figura. Reemplace ambos pares por un solo par equivalente y especifique su magnitud y la dirección de su eje.

3.76 y 3.77 Si $P = 11$, reemplace los dos pares restantes por un solo par equivalente, especifique su magnitud y la dirección de su eje.



Figura P3.77 y P3.78

3.78 Si $P = 20$ lb, reemplace los tres pares por un solo par equivalente, especifique su magnitud y la dirección de su eje.

3.79 Si $P = 20$ N, reemplace los tres pares por un solo par equivalente, especifique su magnitud y la dirección de su eje.



Figura P3.76

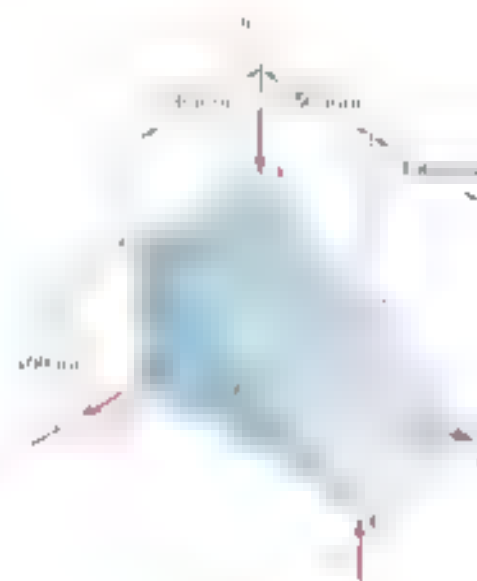


Figura P3.76 y P3.79



Figura P3.80

3.80 Las ejes A y B conectan la caja de engranes a las casquillas de un tractor, y el eje C la conecta con el motor. Las ejes A y B se encuentran en el plano vertical y, mientras que el eje C se dirige a lo largo del eje x . Determine la magnitud y la dirección de su eje.

3.81 La tensión en el cable unido al extremo C de un aguilón ajustable ABC es de 360 lb. Reemplace la fuerza ejercida por el cable en C por un sistema fuerza-par a) en A y b) en B .



Figura P3.81



Figura P3.82

3.82 Una fuerza P de 160 lb se aplica en el punto A de un elemento estructural. Reemplace P a) por un sistema equivalente: fuerza-par en C b) por un sistema equivalente con una fuerza vertical en B y una segunda fuerza en C .

3.83 Una fuerza P de 50 N se aplica sobre la manivela ABC como se muestra en la figura. a) Reemplace P por un sistema fuerza-par equivalente en B . b) Encuentre las dos fuerzas verticales en C y D que sean equivalentes al par obtenido en el inciso a).



Figura P3.84

3.84 Un dirigible se amarra mediante un cable sujeto a la columna en B . Se aplica una fuerza P de 400 N en el punto A . Reemplace la fuerza ejercida por el cable en B por un sistema equivalente formado por dos fuerzas paralelas aplicadas en A y C .



Figura P3.83

3.85 La fuerza P tiene una magnitud de 250 N y se aplica al extremo C de una varilla AC de 300 mm , la cual se une a la ménsula en A y en B . Se supone que $\alpha = 30^\circ$ y $\beta = 60^\circ$. Reemplace P por $a)$ un sistema fuerza-par que $b)$ en B $b)$ en A sea una resultante. Determine para los dos casos, las fuerzas aplicadas en A y en B .

3.86 Retorne el problema 3.85, para ello suponga que $\alpha = \beta = 25^\circ$.

3.87 Una fuerza y un par se aplican al extremo de una viga en voladizo como se muestran en la figura. $a)$ Reemplace este sistema por una sola fuerza F aplicada en el punto C , y determine la distancia d desde C hasta el punto A que pasa por el punto F . $b)$ $F = 4\text{ kN}$ y $d = 3\text{ m}$, reemplazelo por se intercambia las direcciones de las dos fuerzas de 300 N .

3.88 Las fuerzas cortantes ejercidas sobre la sección transversal de un eje de la máquina pueden representarse mediante una fuerza de 400 N y dos fuerzas tangenciales de 250 N , como se muestran en la figura. Reemplace esta fuerza y par con una sola fuerza F aplicada en el punto C y determine la distancia d desde C hasta el punto A que pasa por el punto F , y el par, cortante de la sección.

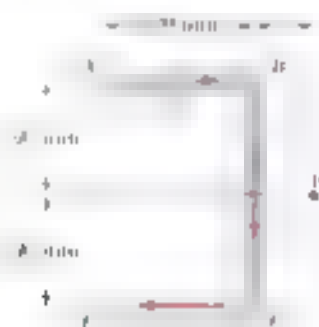


Figura P3.88

3.89 Tres tiras de resaca de la palanca ABC como se muestran. Aplicar la palanca del material las fuerzas horizontales mostradas en la figura. Demuestre que estas fuerzas son equivalentes a una sola fuerza resultante y determine, si es posible, el punto de aplicación de la fuerza resultante sobre la palanca.

3.90 Tres varillas de control unidas a la palanca ABC ejercen sobre ésta las fuerzas mostradas en la figura. $a)$ Reemplace las tres fuerzas por un sistema fuerza-par equivalente en B . $b)$ Determine la fuerza única que es equivalente al sistema fuerza-par obtenido en el inciso $a)$, y especifique el punto de aplicación sobre la palanca.



Figura P3.90



Figura P3.85



Figura P3.87



Figura P3.89



Figura P3.91



Figura P3.93

3.91 Una placa rectangular está sometida a la fuerza P y al par que se muestran en la figura. Determine la magnitud y la dirección de la fuerza equivalente P en la que el sistema se puede sustituir por una sola fuerza aplicada en D .

3.92 Una placa rectangular está sometida a la fuerza y al par que se muestran en la figura. Determine la magnitud y la dirección de la fuerza equivalente P en la que el sistema se puede sustituir por una sola fuerza aplicada en D . Especifique el valor de α si la línea de acción de la fuerza equivalente debe ser perpendicular a la línea CD . 300 mm a la derecha de D .



Figura P3.92

3.93 Una fuerza excéntrica, compresiva P de 1.220 N se aplica al extremo de una viga en su extremo. Reemplaza P por un sistema de fuerza-par equivalente en C .

3.94 Para mantener cerrada una puerta, se usa una tabla de madera como se muestra en la figura. Reemplaza la fuerza P aplicada en el punto A por un sistema equivalente fuerza-par en C .

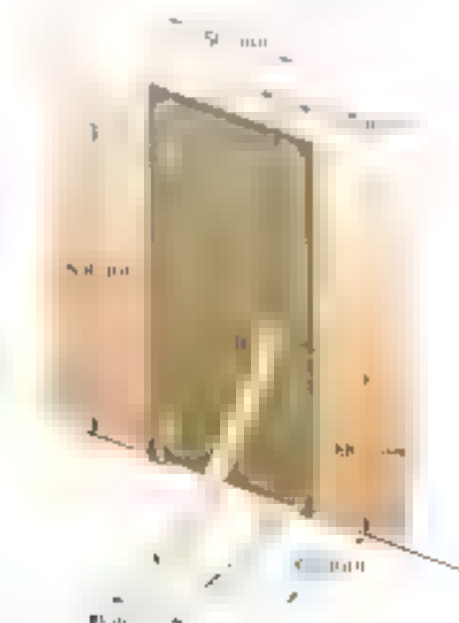


Figura P3.94

3.95 Tres cables atornillados sostienen una antena, como se muestra en la figura. Si se sabe que la tensión en el cable AB es de 285 N , reemplazar la fuerza ejercida por el cable AD en A con un sistema fuerza-par equivalente en el centro O de la base de la antena.



Figura P3.95 y P3.96

3.96 Tres cables atornillados sostienen una antena, como se muestra en la figura. Si se sabe que la tensión en el cable AC es de 270 N , reemplazar la fuerza ejercida por el cable AD en A con un sistema fuerza-par equivalente en el centro O de la base de la antena.

3.97 Reemplazar la fuerza de 150 N por un sistema fuerza-par equivalente en A .

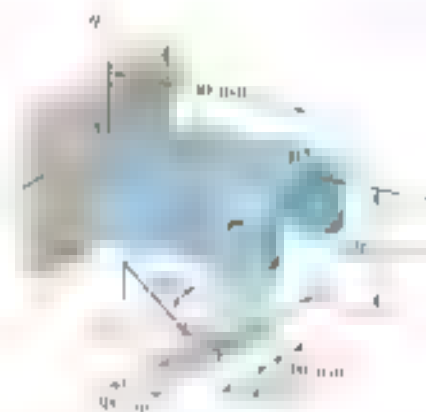


Figura P3.97

3.98 Una fuerza \mathbf{F} de 77 N y un par \mathbf{M}_1 de $31\text{ N}\cdot\text{m}$ se aplican en el punto C de la placa laminada que se muestra en la figura. Si $\mathbf{F} + \mathbf{M}_1$ debe ser reemplazado por un sistema equivalente de una fuerza \mathbf{F}' y un par \mathbf{M}'_1 en el punto B y si $\mathbf{M}'_1 = 0$, determinar la magnitud de \mathbf{F}' y \mathbf{M}_1 .

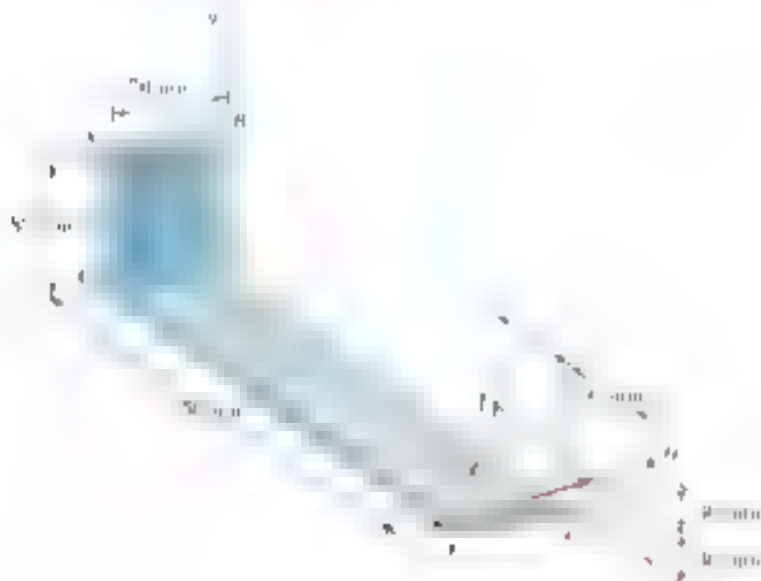


Figura P3.98



3-99 Uma força F de 46 lb é aplicada ao ponto M de 120 lb. Se a força F é aplicada ao ponto M de 120 lb, a força F é aplicada ao ponto M de 120 lb.



3.700. Se muestra una barra homogénea, ahora en estado de equilibrio, en la figura. La barra tiene una longitud de 10 m y un peso de 100 N. El extremo A está apoyado en un punto fijo y el extremo B está apoyado en un punto fijo. La barra está horizontal y el ángulo de inclinación es de 35° con la dirección x. Muestre que el peso del polvorín en el extremo B es de 100 N. Además, si se supone que $M_1 = 0.65 \text{ lb} \cdot \text{m}$ y $M_2 = 0.65 \text{ lb} \cdot \text{m}$, determine la magnitud de la fuerza de reacción en el punto de apoyo B.

3.17 REDUCCION DE UN SISTEMA DE FUERZAS A UNA FUERZA Y UN PAR

Consideremos un sistema de fuerzas F_1, F_2, F_3, \dots , que actúan sobre un cuerpo rígido en los puntos A_1, A_2, A_3, \dots , definidos por las coordenadas de posición r_1, r_2, r_3 , etc. (figura 3.4.a). Como se vio en la sección anterior, F_1 puede ser trasladada de A_1 a un punto dado O si se agrega al sistema original de fuerzas un par de momento M_1 , igual al momento $r_1 \times F_1$ de F_1 con respecto a O . Si se repite este procedimiento para F_2, F_3, \dots , se obtiene un sistema equivalente a la figura

4.4. *El* \vec{F}_1 que resulta de la suma de los vectores \vec{F}_1 y \vec{F}_2 actúa en el punto A y es perpendicular a la superficie S que pasa por A y es paralela a \vec{F}_3 . Los vectores \vec{F}_1 y \vec{F}_2 son concurrentes en A y pueden ser sustituidos vectorialmente y reemplazados por su resultante \vec{R} . Deseamos ahora los vectores \vec{F}_1 , \vec{F}_2 y \vec{F}_3 pueden reemplazarse vectorialmente y ser reemplazados por un solo vector \vec{F} de magnitud M_F . Los puntos A y cualquier otro punto B de las fuerzas \vec{F}_1 y \vec{F}_2 que actúan en A y B son sustituidos por el punto C y el vector \vec{F} que actúa en C es perpendicular a la superficie S que pasa por C y es paralela a \vec{F}_3 . El punto C es el punto de intersección de las líneas que pasan por A y B y son paralelas a \vec{F}_3 . Se puede observar que el punto C es el punto de intersección de las líneas que pasan por A , B y \vec{F}_3 y son perpendiculares a la fuerza \vec{F} que corresponde a la resultante de las fuerzas resultantes. El vector \vec{F} que por resultado M_F en la figura 3.41e no será perpendicular a S .

El sistema equivalente de fuerzas por esta definición por las ecuaciones

$$\mathbf{R} = \sum \mathbf{F} \quad \mathbf{M}_O^R = \sum \mathbf{M}_i = \sum \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (3.52)$$

las componentes de la fuerza \mathbf{R} se obtienen sumando las componentes de las fuerzas del sistema, mientras que el momento del vector de par resultante \mathbf{M}_O^R de momento de momento del sistema, se obtiene sumando los momentos de las las fuerzas de sistema con respecto a O .

Una vez que el sistema de fuerzas dado se reduce a una fuerza \mathbf{R} y un par de momento \mathbf{M}_O^R en un punto O cualquier sistema puede reducirse a una fuerza con un momento cualquiera del punto O . Mientras que la fuerza resultante \mathbf{R} permanece igual, llevada al nuevo punto de reducción \mathbf{M}_O^R se agrega a la suma de \mathbf{M}_O^R y momento con respecto a O de la fuerza \mathbf{R} aplicada a O (Figura 3.42). Por tanto se tiene

$$\mathbf{M}_O^R = \mathbf{M}_O^R + \mathbf{s} \times \mathbf{R} \quad (3.53)$$

Es la práctica la reducción de un sistema de fuerzas dado a una sola fuerza \mathbf{R} actuando en O y un vector de par \mathbf{M}_O^R se lleva a cabo en términos de las componentes. Descomponiendo cada vector \mathbf{r} y cada fuerza \mathbf{F} del sistema en sus componentes rectangulares, se escribe

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (3.54)$$

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k} \quad (3.55)$$

Al sustituir \mathbf{r} y \mathbf{F} en (3.52) y factorizar a los vectores unitarios \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} se obtiene la siguiente expresión para \mathbf{R} y \mathbf{M}_O^R :

$$\mathbf{R} = R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} + R_z\mathbf{k} \quad \mathbf{M}_O^R = M_O^R\mathbf{i} + M_O^R\mathbf{j} + M_O^R\mathbf{k} \quad (3.56)$$

Las componentes R_x , R_y , R_z representan respectivamente las sumas de las componentes x , y y z de las fuerzas dadas con respecto a la referencia del sistema a un punto al cuerpo rígido en consideración. Las sumas en la ecuación de x , y y z representan las componentes M_O^R , M_O^R , M_O^R y representan a su vez los momentos de las fuerzas dadas con respecto a respectivamente los ejes x , y y z y miden la tendencia del sistema a girar alrededor de un eje rígido en consideración. La rotación alrededor de los ejes x , y y z .

Al ser la suma de los momentos de la fuerza \mathbf{R} estas se suman obteniendo el vector de las componentes R_x , R_y y R_z por lo tanto las ecuaciones (3.56) y (3.57) de la sección 3.2.2, al ser sumadas proporcionarán la magnitud y la dirección del vector de par \mathbf{M}_O^R .

3.18. SISTEMAS EQUIVALENTES DE FUERZAS

En la sección anterior se vio que cualquier sistema de fuerzas puede reducirse a un punto dado O a un sistema fuerza-par. Este sistema es equivalente a cualquier otro sistema de fuerzas que actúa sobre el cuerpo rígido. Por tanto, dos sistemas de fuerzas son equivalentes si pueden ser reducidos al mismo sistema fuerza-par en un punto dado O . Es decir, si el sistema fuerza-par O se reduce a un punto de las ecuaciones (3.52) se obtienen los valores de \mathbf{F} y \mathbf{F} .



Figura 3.42



Fotografía 3.3 En la imagen se analiza el movimiento del carro de la fotografía. Las fuerzas ejercidas sobre éste por el niño pueden reemplazarse por un sistema fuerza-par equivalente.

F_1, \dots, F_n y F'_1, F'_2, F'_3, \dots , que actúan sobre el mismo cuerpo rígido, son equivalentes si y sólo si, respectivamente, la suma de las fuerzas y las sumas de los momentos con respecto a un punto dado O de las fuerzas de los dos sistemas son iguales. Expresadas en forma matemática, las condiciones necesarias y suficientes para que los dos sistemas de fuerzas sean equivalentes son las siguientes:

$$\sum F = \sum F' \quad \text{y} \quad \sum M_O = \sum M'_O \quad (3.57)$$

Obsérvese que para demostrar que dos sistemas de fuerzas son equivalentes, no se necesita demostrar que los momentos se deben establecer con respecto a un solo punto O . Sólo es necesario establecerlo con respecto a cualquier punto si los dos sistemas de fuerzas son equivalentes.

Al demostrar que las fuerzas y los momentos de (3.57) en sus expresiones vectoriales pueden expresarse las condiciones en varias y diferentes formas a partir de una de los sistemas de fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= \sum F'_x & \sum F_y &= \sum F'_y & \sum F_z &= \sum F'_z \\ \sum M_x &= \sum M'_x & \sum M_y &= \sum M'_y & \sum M_z &= \sum M'_z \end{aligned} \quad (3.58)$$

Estas relaciones tienen una interpretación física simple: expresan que dos sistemas de fuerzas son equivalentes si producen el mismo efecto sobre un cuerpo rígido: 1) la misma traslación en las direcciones de x , y y z y 2) la misma rotación alrededor de los ejes x , y y z respectivamente.

3.19 SISTEMAS EQUIVALENTES DE VECTORES

Cuando dos sistemas de vectores satisfacen las ecuaciones (3.57) o (3.58) esto es, cuando respectivamente sus resultantes y sus momentos respecto a un punto arbitrario O son iguales, se dice que los dos sistemas son equivalentes. Por tanto, el resultado que se acaba de establecer en la sección anterior se puede enunciar como sigue: si un sistema de fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido son equivalentes, entonces ambos también son equivalentes.

Es importante señalar que este enunciado no se aplica a cualquier sistema de vectores. Considérese, por ejemplo, un sistema de fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido, el momento de cada una de ellas no tiene efecto alguno. En consecuencia, el sistema de fuerzas tiene un efecto que actúa sobre las partes más pequeñas, así como se equiparó al momento. Esto es, que dicho sistema tenga la misma resultante y el mismo momento resultante. Si se cambia, como ahora actuarán diferentes fuerzas sobre cada una de las partículas, los efectos de dichas fuerzas sobre esas partículas serán diferentes. En consecuencia, aunque los dos sistemas de fuerzas sean equivalentes, no son equivalentes.

3.20 OTRAS REDUCCIONES DE UN SISTEMA DE FUERZAS

En la sección 3.17 se vio que cualquier sistema de fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido puede ser reducido a un sistema equivalente fuerza-par en O que consta de una fuerza R igual a la suma de las fuerzas

zas. El sistema viene a ser el vector de par M_G^R cuyo momento es igual al momento resultante del sistema.

Cuando $R = 0$, el sistema fuerza-par se reduce a un vector de par M_G^R e incluso el sistema de fuerzas coplanares puede ser reducido a un solo par, que recibe el nombre de *par resultante* del sistema.

A continuación se procede a investigar las reducciones necesarias para reducir un sistema dado de fuerzas planas a un vector de fuerza. A partir de la sección 3.16 se concluye que un sistema fuerza-par en O puede ser reemplazado por una sola fuerza R que actúa a lo largo de una nueva línea de acción si $R \times M_G^R$ son de sentido perpendicular a \vec{i} . En este caso se dice que las fuerzas coplanares pueden ser reducidas a una sola fuerza *resultante*. Son aplicables estos resultados para los casos en los que la fuerza R y el vector de par M_G^R son mutuamente perpendiculares. Aunque no se trata de esta reducción en sí, también puede suceder que las fuerzas coplanares se reduzcan a un *momento* para ciertos casos de reducciones por fuerzas concurrentes,¹ fuerzas coplanares² o fuerzas paralelas.³ Estos tres casos se estudiarán en forma separada.

1. Las *fuerzas concurrentes* están aplicadas en el mismo punto y por lo tanto pueden ser sumadas directamente para obtener su resultante R . Por consiguiente, éstas siempre se reducen a una sola fuerza y las fuerzas concurrentes se analizan en detalle en el capítulo 2.
2. Las *fuerzas coplanares* actúan en el mismo plano, el cual se puede suponer que es el plano de la figura (figura 3.43a). La suma R de las fuerzas del sistema obtiene el vector resultante de la figura, mientras que el momento de cada fuerza en respecto al O , por consiguiente, el momento resultante M_G^R , serán mutuamente perpendiculares a dicho plano. De esta forma, el sistema fuerza-par en O está constituido por una fuerza R y por un vector de par M_G^R que son mutuamente perpendiculares (figura 3.43b).⁴ Estas fuerzas pueden reducirse a una sola fuerza R actuando R a lo largo de la figura línea que sus momentos en respecto a O son iguales a M_G^R . La distancia desde O a lo largo de la línea de acción de R es $d = M_G^R/R$ (figura 3.43c).



Figura 3.43

Cuando el vector M_G^R es perpendicular al plano de la figura, éste se ha representado por el símbolo \hat{k} . Un par que actúa en el sentido contrario al sentido positivo de las manecillas del reloj \hat{k} requiere ser representado por el símbolo $-\hat{k}$.

⁴ El momento M_G^R es perpendicular al plano de la figura y el vector R es coplanario.



Figura 3.44

Como se señaló en la sección 3.17, la reducción de un sistema de fuerzas se simplifica considerablemente si las fuerzas se descomponen en sus componentes rectangulares. De esta manera, el sistema fuerza-par en O está caracterizada por las componentes (figura 3.44a).

$$R_x = \sum F_x \quad R_y = \sum F_y \quad M_O^R = M_O^F = \sum M_O^F \quad (3.22)$$

Para reducir el sistema a la fuerza R y un solo vector de par M_O^R , se requiere que el momento de R con respecto a O debe ser igual a M_O^R . Supóngase que R actúa a una distancia h del punto de aplicación de la resultante y teniendo en cuenta la fórmula 3.22 de la sección 3.8, se escribe

$$xR_y - yR_x = M_O^R$$

la cual representa la ecuación de la línea de acción de R en O . También pueden determinarse en forma directa las intersecciones con el eje x y con el eje y de la línea de acción de la resultante. Se observa que M_O^R debe ser igual al momento con respecto a O de la componente y de R cuando R está unida a A (figura 3.44b) y, también al momento de la componente x cuando R está unida a C (figura 3.44c).

Las líneas paralelas en las figuras 3.44b y 3.44c pueden no tener el mismo sentido. Suponga que las fuerzas son perpendiculares al eje y (figura 3.45a). Se observa que su suma R también será paralela al eje y . Por otra parte, como el momento de una fuerza dada debe ser perpendicular a dicha fuerza, el momento con respecto a O de cada una de las fuerzas del sistema y, por consiguiente, el momento resultante M_O^R , estará en el plano xz . De esta forma el sistema fuerza-par en O está constituido por una fuerza R y un vector de par M_O^R , mutuamente



Figura 3.45

dependientes (Figura 3.45b). Estas fuerzas se pueden reducir a una sola fuerza \mathbf{R} (Figura 3.45c) si $\mathbf{R} = \mathbf{F}$ y un solo par cuyo momento sea igual a M^P .

En la práctica, el sistema fuerza-par en O está caracterizado por las componentes

$$R_{ij} = \sum F_i \quad M^P = \sum M_i \quad M^Q = \sum M_j \quad (3.60)$$

La reducción del sistema a una sola fuerza puede efectuarse moviendo \mathbf{R} a un punto cualquiera A y $O \rightarrow A$ sobre el plano de momentos que el momento de \mathbf{R} con respecto a O sea igual a M^P (Figura 3.45d) si se cumple

$$\mathbf{r} \times \mathbf{R} = M^P \mathbf{k}$$

$$x\mathbf{i} + z\mathbf{k} \times R_y\mathbf{j} = M^P_x\mathbf{i} + M^P_z\mathbf{k}$$

Al calcular los productos vectoriales e igualar los coeficientes de los vectores unitarios correspondientes \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} , las ecuaciones de reducción se obtienen. Las ecuaciones resultantes que definen las coordenadas de A

$$x = R_{ij} / M^P \quad z = M^Q / M^P$$

Estas ecuaciones expresan que los momentos de \mathbf{R} con respecto a los ejes x e z deben ser iguales a M^P y M^Q respectivamente.



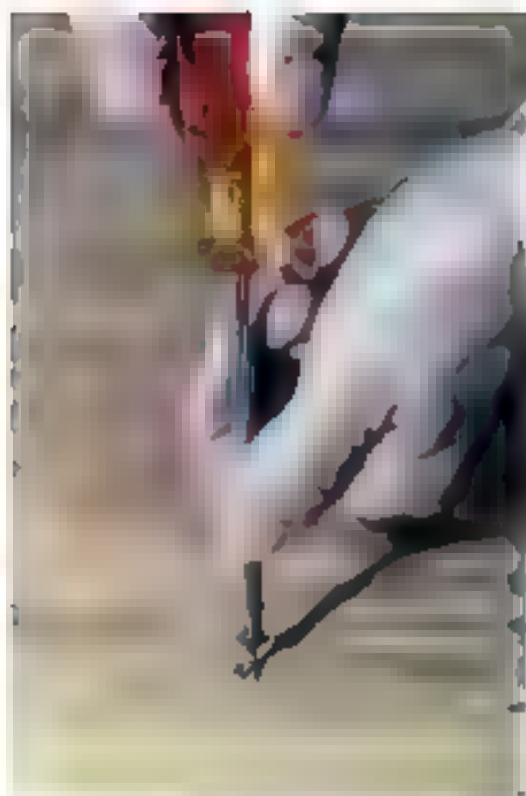
Fotografía 3.4 Las fuerzas paralelas distribuidas que actúan sobre los carriles de una carretera pueden reducirse a una sola fuerza equivalente. La determinación de esta fuerza puede simplificar el análisis de las fuerzas que actúan sobre los soportes del muelle que sostienen los semáforos.

3.21. REDUCCIÓN DE UN SISTEMA DE FUERZAS A UNA LLAVE DE TORSIÓN O TORSOR

En el caso general de un sistema de fuerzas en el espacio, el sistema equivalente fuerza-par en O consta de una fuerza \mathbf{R} y un vector de par M^P cuyo momento es de tal manera que \mathbf{R} y M^P son perpendiculares entre sí (Figura 3.46a). Por tanto, el sistema de fuerzas de punto se reduce a una sola fuerza \mathbf{R} en un punto A . Sin embargo, el vector de momento se reemplazó por uno de los vectores de momento. Al describirlo por M^P en un eje OP (Figura 3.46b) se define \mathbf{R} y una línea de acción de M^P como par perpendicular a \mathbf{R} (Figura 3.46c). Entonces el vector de par M^P y la fuerza \mathbf{R} pueden reemplazarse por una sola fuerza \mathbf{R} que actúa a lo largo de una nueva línea de acción. Por tanto, el sistema original de fuerzas se reduce a \mathbf{R} y al par vector M^P (Figura 3.46d). En esta forma, el sistema se reduce a \mathbf{R} y un par que actúa en el plano perpendicular a \mathbf{R} . A este sistema fuerza-par el particular se le conoce como *llave de torsión* debido a que la combinación resultante de ene-



Figura 3.46



Fotografía 3.6 La acción de empujar y tirar asociadas con la operación de apretar. En forma ilustrativa las líneas de acción poligonales de la fuerza y el vector de $\rho \mathbf{R}$ que constituyen una llave de torsión o torque.

para la torsión es la misma que produciría una llave de torsión real. A la línea de acción de \mathbf{R} se le conoce como *eje de la llave de torsión* y a la $\rho = M/R$ se le conoce como *peralte de la llave de torsión*. Con esta notación, la llave de torsión está asociada con los escalar y los lineales, específicamente, una fuerza \mathbf{R} y un vector de par

$$\mathbf{M} = \rho \mathbf{R} \quad (3.61)$$

Reunir la ecuación (3.61) con la ecuación (3.47) da la llave de torsión en el sistema de referencia de parámetros de los vectores se simplifica que la llave de torsión \mathbf{M}_C^H sobre el eje de torsión de \mathbf{R}_C es que

$$\mathbf{M}_C^H = \frac{\mathbf{R}_C \times \mathbf{M}_C^H}{R}$$

Por tanto el eje de una llave de torsión puede ser expresado como

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{M}_C^H}{H} = \frac{\mathbf{R}_C \times \mathbf{M}_C^H}{H} \quad (3.62)$$

Para definir el eje de una llave de torsión se puede escribir una ecuación por momento y el vector de posición \mathbf{r} en un punto arbitrario P momento sobre dicho eje. fijando la fuerza resultante \mathbf{R} y el vector de par \mathbf{M} en P (figura 3.47) y expresando que el momento con respecto a O de este sistema fuerza-par, es igual al momento con respecto a O de este sistema fuerza-par, se escribe

$$\mathbf{M}_O + \mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O^H \quad (3.63)$$

o de acuerdo con la ecuación (3.61)

$$\rho \mathbf{R} + \mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O^H \quad (3.64)$$



Figura 3.47

El momento sobre el eje de torsión \mathbf{M}_O^H es el momento sobre el eje de torsión \mathbf{M}_O^H en el sistema de referencia de parámetros de los vectores se simplifica que la llave de torsión \mathbf{M}_C^H sobre el eje de torsión de \mathbf{R}_C es que

$$\mathbf{M}_C^H = \frac{\mathbf{R}_C \times \mathbf{M}_C^H}{R}$$

Por tanto el eje de una llave de torsión se puede escribir como

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{M}_C^H}{H} = \frac{\mathbf{R}_C \times \mathbf{M}_C^H}{H}$$

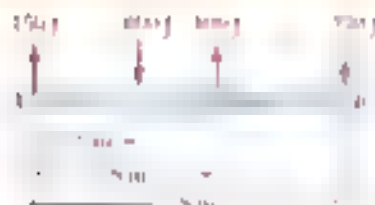
Por tanto el eje de una llave de torsión se puede escribir como



PROBLEMA RESUELTO 3.8

Una viga de 4.50 m de longitud está sujeta a las fuerzas mostradas en la figura. Redúzcase el sistema de fuerzas dado a a) un sistema equivalente formado por una fuerza y un sistema equivalente de momentos en B. b) una sola fuerza equivalente.

Añó: Conduzca ecuaciones en los apoyos de estas incluídas en el sistema de fuerzas dado y sistema equivalente con los valores pedidos.



SOLUCION

a) Sistema fuerza-par en A. El sistema fuerza-par en A equivalente al sistema de fuerzas dados es el momento R y momento M^A en A, es:

$$R = \sum F$$

$$50 \text{ N}j - (100 \text{ N})j + (100 \text{ N})j - (250 \text{ N})j = -(100 \text{ N})j$$

$$M^A = \sum r \times F$$

$$(0) \times (50)j + (1.00) \times (100)j + (2.00) \times (100)j + (4.50) \times (-250)j = -1.550 \text{ N} \cdot \text{m}k$$

El momento equivalente en A por el sistema de fuerza

$$R = -100 \text{ N}j$$

$$M^A = -1.550 \text{ N} \cdot \text{m}k$$

b) Sistema fuerza-par en B. Se pretende encontrar un sistema fuerza-par en B que dé la misma reacción en A como el sistema dado. La fuerza R permanece inalterada, pero se debe determinar un momento M^B en B, que equivale al momento de cada respecto a B. El sistema fuerza-par en B está en A, es decir, es el sistema:



$$M_B^B = M_A^B + \overrightarrow{BA} \times R$$

$$= -(1.550 \text{ N} \cdot \text{m}k) + (-4.50 \text{ m}) \times (-100 \text{ N}j)$$

$$= -(1.550 \text{ N} \cdot \text{m}k) + (450 \text{ N} \cdot \text{m}k) = +448.50 \text{ N} \cdot \text{m}k$$

El sistema fuerza-par en B está en A, es decir, es el sistema:

$$R = -100 \text{ N}j$$

$$M^B = +448.50 \text{ N} \cdot \text{m}k$$

c) Fuerza única o resultante. La resultante del sistema de fuerza dado es igual a R y su punto de aplicación debe ser tal que el momento M^A con respecto a A sea igual a M^A . El cual se resuelve:

$$r \times R = M^A$$

$$i \times (-100 \text{ N}j) = -1.550 \text{ N} \cdot \text{m}k$$

$$= x(100 \text{ N})k = -1.550 \text{ N} \cdot \text{m}k$$

Se concluye que $x = 1.55 \text{ m}$. Por tanto, la fuerza única equivalente al sistema dado está definida como:

$$F = -100 \text{ N}j$$



PROBLEMA RESUELTO 3.9

Se le han aplicado a un cuerpo rígido cuatro fuerzas coplanares como se muestra. Cada remolcador ejerce una fuerza de 5 000 lb en la dirección mostrada en la figura. Determine el sistema equivalente fuerza-par en el punto O y la magnitud de F y M_O^F que el sistema de fuerzas coplanares es estáticamente equivalente al sistema de fuerzas que se muestra. El sistema es un cuerpo rígido de 200 lb.

SOLUCIÓN

a) Sistema fuerza-par en O. Cada una de las fuerzas se descompone en sus componentes x e y en los ejes cartesianos. Las magnitudes de las componentes x e y de cada fuerza en O, F_x y F_y , se muestran en la figura. El sistema de fuerzas coplanares en O puede ser reemplazado por un sistema de una fuerza R y de un par M_O^R , definidos como sigue:

$$\begin{aligned} R &= \sum F \\ &= (2.50k - 4.37j) + (3.00k - 4.00j) + (-5.00j) + (3.54i + 3.34j) \\ &= 6.04i - 9.70j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_O^R &= \sum r \times F \\ &= (-90k + 50j) \times (2.50i - 4.37j) \\ &\quad + (100k + 70j) \times (3.00i - 4.00j) \\ &\quad + (-100k + 70j) \times (-5.00j) \\ &\quad + (300k - 70j) \times (3.54i + 3.34j) \\ &= 1.22i - 40k - 1.17i + 2.00k + 1.06i2 + 2.45k \\ &= -1.35k \end{aligned}$$

Por tanto, el sistema equivalente fuerza-par en O está dado por

$$R = (6.04 \text{ kips})i - (9.70 \text{ kips})j \quad M_O^R = -1.035 \text{ kips} \cdot \text{ft} \cdot \text{k}$$

$$c) \quad R = (6.04 \text{ kips})i - (9.70 \text{ kips})j \quad M_O^R = -1.035 \text{ kips} \cdot \text{ft} \cdot \text{k}$$

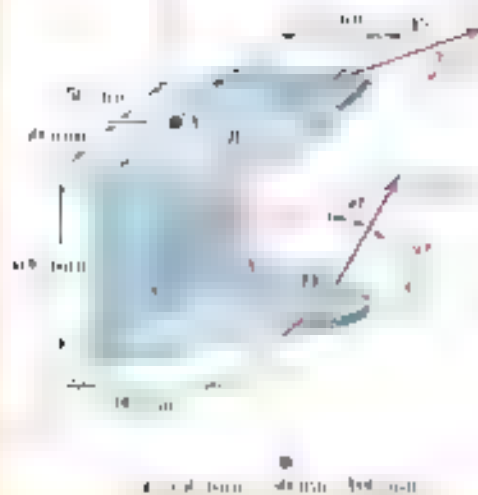
Comentario: Como se han dado las condiciones de equilibrio en la figura, podría haberse usado cualquiera de las ecuaciones de equilibrio para determinar la dirección y magnitud de la fuerza R . Como se sabe que el momento de una fuerza respecto a un punto puede obtenerse como el producto del brazo momentáneo por la fuerza perpendicular a la línea que pasa por el punto y es perpendicular a la fuerza, por lo tanto, la dirección de la fuerza R puede ser determinada perpendicularmente hasta O y luego le asigne a este punto el signo positivo o negativo según el sentido del momento.

• **El momento de una fuerza** La fuerza R paralela por el solo momento debe estar perpendicular a R y su punto de aplicación A debe ser tal que el momento de R con respecto a O sea igual a M_O^R . Si se observa que el vector de posición de A es

$$r = (-100)j$$

se escribe

$$\begin{aligned} r \times R &= M_O^R \\ (-100j) \times (6.04i - 9.70j) &= -1.035k \\ (-100j) \times 6.04i &= -1.035k \end{aligned}$$



PROBLEMA RESUELTO 3.10

Two cables are attached to a cantilever, as shown in the figure. Replace the forces that exert the cables by an equivalent force-couple system at A.

SOLUCION

Primero se determinan los vectores de posición relativos trazados desde el punto A hasta los puntos de aplicación de las fuerzas. Luego se descomponen las fuerzas en sus componentes rectangulares. Observe que $\mathbf{F}_B = (700 \text{ N})\lambda_{BC}$ donde:

$$\lambda_{BC} = \frac{\overline{BF}}{\overline{BE}} = \frac{75^2 + 150^2 + 30^2}{175}$$

Con el uso de metros y newtons se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{B/A} &= \overline{AB} = 0.075\mathbf{i} + 0.050\mathbf{k} & \mathbf{F}_B &= 700\mathbf{N} = 600\mathbf{j} + 300\mathbf{k} \\ \mathbf{r}_{C/A} &= \overline{AC} = 0.075\mathbf{i} - 0.050\mathbf{k} & \mathbf{F}_C &= 707\mathbf{i} - 707\mathbf{k} \\ \mathbf{r}_{D/A} &= \overline{AD} = 0.100\mathbf{i} + 0.100\mathbf{j} & \mathbf{F}_D &= 600\mathbf{i} + 1.000\mathbf{j} \end{aligned}$$

El momento resultante de las fuerzas aplicadas en los puntos B, C y D con respecto al punto A se encuentra $\mathbf{M}^A = \sum \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. La fuerza \mathbf{F}_B se descompone fácilmente al sumar, respectivamente, las componentes x y z de las fuerzas:

$$\mathbf{F}_B = \sum \mathbf{F} = 1.000\mathbf{N}\mathbf{i} + 1.500\mathbf{N}\mathbf{j} - 300\mathbf{N}\mathbf{k}$$

El momento \mathbf{M}^A se calcula, los momentos de las fuerzas se calculan a partir de determinantes, según (3.8):

$$\mathbf{r}_{B/A} \times \mathbf{F}_B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.075 & 0 & 0.050 \\ 100 & -600 & 300 \end{vmatrix} = 30\mathbf{i} - 45\mathbf{k}$$

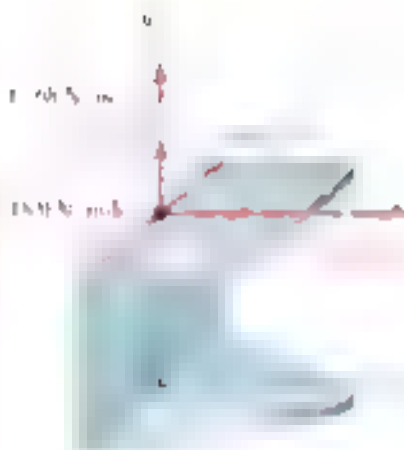
$$\mathbf{r}_{C/A} \times \mathbf{F}_C = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.075 & 0 & -0.050 \\ 707 & 0 & -707 \end{vmatrix} = 17.68\mathbf{j}$$

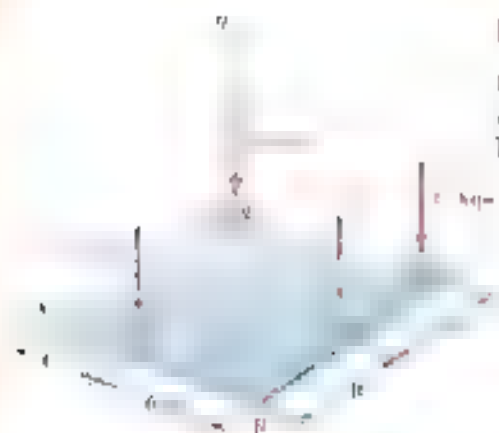
$$\mathbf{r}_{D/A} \times \mathbf{F}_D = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.100 & 0.100 & 0 \\ 600 & 1.000 & 0 \end{vmatrix} = 100.0\mathbf{k}$$

Con la suma de las expresiones obtenidas, se tiene

$$\mathbf{M}^A = \sum \mathbf{r} \times \mathbf{F} = 30\mathbf{N} \cdot \text{m}\mathbf{i} + 17.68\mathbf{N} \cdot \text{m}\mathbf{j} + 135.0\mathbf{N} \cdot \text{m}\mathbf{k}$$

Las componentes rectangulares de la fuerza \mathbf{R} de equivalencia \mathbf{M}^A se encuentran al conjugar adjuntos.





PROBLEMA RESUELTO 3.11

Una barra que soporta una carga estática soporta las cargas estáticas mostradas en la figura. Reduzca el sistema de fuerzas a un sistema fuerza-par en el origen de las coordenadas. Las cuatro cargas.

SOLUCION

Primero, el sistema de fuerzas se reduce a un sistema fuerza-par en el origen de las coordenadas. Este sistema se define por una fuerza R y un vector de par M^0 que se definen de la siguiente forma:

$$R = \sum F \quad M^0 = \sum r \times F$$

Se determinan los vectores de posición de los puntos de aplicación de cada una de las fuerzas y los cálculos se arrojan en forma tabular.



r ft	F kips	$r \times F$ kip-ft
$10\mathbf{i}$	$120\mathbf{j}$	$1200\mathbf{k}$
$10\mathbf{i} - 5\mathbf{k}$	$80\mathbf{j}$	$-800\mathbf{k}$
$1\mathbf{i} - 7\mathbf{k}$	$50\mathbf{j}$	$-350\mathbf{k}$
	$R = 50\mathbf{j}$	$M^0 = 120\mathbf{k}$

Cuando la fuerza R y el vector de par M^0 son mutuamente perpendiculares, el sistema de fuerzas está en equilibrio. Esto se puede verificar calculando el producto vectorial de R y M^0 . Si el resultado es cero, el sistema está en equilibrio. En este caso, el producto vectorial de R y M^0 es igual a cero, lo que indica que el sistema está en equilibrio.

$$r \times R = M^0$$

$$10\mathbf{i} \times (-80\mathbf{j}) = -800\mathbf{k} - 800\mathbf{k}$$

$$-800\mathbf{k} - 800\mathbf{k} = -1600\mathbf{k} - 800\mathbf{k}$$

o por lo escrito, se encuentra que

$$-800\mathbf{k} = -1600\mathbf{k} \quad 800\mathbf{k} = 800\mathbf{k}$$

$$x = 3.50 \text{ ft} \quad z = 3.00 \text{ ft}$$

Se concluye que la resultante del sistema de fuerzas dado es igual a



PROBLEMA RESUELTO 3.12

Das fuerzas de la misma magnitud P actúan sobre un cuadrado con aristas de longitud a , como se muestra en la figura. Reemplaza las dos fuerzas por una llave de torsión equivalente y determine: a) la magnitud y dirección de la fuerza resultante R , b) el eje de la llave de torsión y c) el punto donde el eje de la llave de torsión interseca al plano xy .

SOLUCION

Sistema equivalente fuerza-par en O . Primero se determina el sistema equivalente fuerza-par en el origen O . Se observa que los vectores posición de los puntos de aplicación E y D de las dos fuerzas dadas son: el vector $r_E = a\mathbf{j}$ y $r_D = a\mathbf{k}$. La sustitución R de las dos fuerzas dadas por el mismo resultado M_O^R de las dos fuerzas es equivalente a R en el origen por

$$\begin{aligned} R &= F_1 + F_2 = P\mathbf{i} + P\mathbf{j} = P(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \\ M_O^R &= r_E \times F_1 + r_D \times F_2 = (a\mathbf{i} + a\mathbf{j}) \times P\mathbf{i} + (a\mathbf{j} + a\mathbf{k}) \times P\mathbf{j} \\ &= Pa\mathbf{k} - Pa\mathbf{i} = -Pa(\mathbf{i} - \mathbf{k}) \end{aligned}$$

a) **Fuerza resultante R .** A partir de la ecuación (1) y del triángulo formado por la fuerza R y los vectores $P\mathbf{i}$ y $P\mathbf{j}$, se encuentra en el plano xy y forma ángulo de 45° con los ejes x y y . Cunto.

b) **Eje de la llave de torsión.** De acuerdo con la fórmula (3.62) la dirección de M es la dirección de M_O^R . Se encuentra la ecuación de la línea

$$\frac{M}{M} = \frac{M_O^R}{M} = \frac{-Pa(\mathbf{i} - \mathbf{k})}{Pa\sqrt{2}} = \frac{P}{\sqrt{2}}(-\mathbf{i} + \mathbf{k})$$

el Eje de la llave de torsión. A partir de los resultados anteriores de la ecuación (3.61), se concluye que la llave de torsión consta de la fuerza R encontrada en (1) y del vector de par

$$M = \frac{a}{2}P(\mathbf{i} + \mathbf{j}) = \frac{Pa}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$$

Para determinar el punto donde el eje de la llave de torsión interseca al plano xy se expresa que el momento de la llave de torsión con respecto a O iguala al momento producido M_O^R del sistema original

$$M = r \times R = M_O^R$$

El momento por $r = a\mathbf{j} + k$ sustituir $R = M_O^R = M$ en la ecuación (3.61) da

$$\begin{aligned} \frac{Pa}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j}) + a\mathbf{j} \times \mathbf{k} &= \frac{Pa}{2}(-\mathbf{i} + \mathbf{k}) + Pa(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \\ \frac{Pa}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j}) + Pa\mathbf{k} &= Pa(-\mathbf{i} + \mathbf{k}) + Pa(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \end{aligned}$$

Si se cancelan los términos de k en los dos miembros de k , se encuentra que

REDUCCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

Esta lección es una deducción a la reducción y simplificación de sistemas de fuerzas. Al mismo tiempo, se da a los puntos las propiedades más útiles que se llevan a cabo las operaciones que se describen a continuación:

1. *Reducción de un sistema de fuerzas a un punto* O . Sea un sistema de fuerzas F_1, F_2, \dots, F_n que actúan sobre un cuerpo rígido. Se define la **resultante** R como la fuerza única que produce el mismo efecto que el sistema de fuerzas. El momento del par es el **momento resultante** del sistema y se obtiene sumando los momentos con respecto a O de las fuerzas que lo constituyen. Así, se tiene que:

$$R = \sum F_i \quad M_O^R = \sum r_i \times F_i$$

donde el vector de posición r_i se traza desde O hacia cualquier punto a lo largo de la línea de acción de F_i .

2. *Transferencia de una fuerza a un punto arbitrario*. Sea una fuerza F que actúa sobre un cuerpo rígido. Si se quiere transferir la fuerza a un punto B que no está en la línea de acción de F , se debe añadir un momento M_B que sea igual al momento de F con respecto a B . La resultante R permanece igual a F , pero el nuevo momento resultante M_B se puede calcular como el momento M_A con respecto a B de la fuerza R aplicada en A (problema resuelto 3.8). Si se representa con r el vector trazado desde B hasta A , se puede escribir:

$$M_B^R = M_A^R + r \times R$$

3. *Reducción de un sistema de fuerzas a un punto arbitrario*. Sea un sistema de fuerzas F_1, F_2, \dots, F_n que actúan sobre un cuerpo rígido. Se define la **resultante** R como la fuerza única que produce el mismo efecto que el sistema de fuerzas. El momento del par es el **momento resultante** del sistema y se obtiene sumando los momentos con respecto a O de las fuerzas que lo constituyen. Así, se tiene que:

$$\sum F_i = \sum F_i^R \quad \sum M_O^R = \sum M_O^i$$

Se debe tener en cuenta que si se simplifica la fuerza de dos ecuaciones, estas y sus derivadas se reducen a cero si la resultante R es cero. Si los sistemas no dependen de la posición, por tanto, no hay necesidad de verificar si se cumplen las siguientes ecuaciones:

4. *Reducción de un sistema de fuerzas a un punto arbitrario*. Sea un sistema de fuerzas F_1, F_2, \dots, F_n que actúan sobre un cuerpo rígido. Se define la **resultante** R como la fuerza única que produce el mismo efecto que el sistema de fuerzas. El momento del par es el **momento resultante** del sistema y se obtiene sumando los momentos con respecto a O de las fuerzas que lo constituyen. Así, se tiene que:

vector de par M_A^R son mutuamente perpendiculares. Con todo, siguiendo este procedimiento se pueden reducir los sistemas de fuerzas constituidos por fuerzas que son mutuamente perpendiculares. En este sentido, a la reducción se le puede considerar como un procedimiento de obtener el mismo modo que se hizo con otros problemas de la reducción anterior, moviendo R hasta que su momento con respecto a A sea igual a M_A^R . La más formalidad se puede escribir que el vector de posición r trazado desde A hasta cualquier punto a lo largo de la línea de acción de R debe satisfacer la ecuación

$$r \times R = M_A^R$$

Este procedimiento fue utilizado en los problemas 3.5.10, 3.5.11 y 3.11.

En el problema 3.5.11 se reducen los sistemas de fuerzas que son mutuamente perpendiculares a un sistema de fuerzas lineales y se reducen por fuerzas que son vectoriales coplanarias o paralelas a un sistema equivalente fuerza-par en el punto O consistente de una fuerza R y de un vector de par M_O^R que en general actúan sobre otro punto por perpendicularidad. En la verificación $R \times M_O^R$ son mutuamente perpendiculares y se forma su producto escalar. Si el resultado es igual a cero, entonces los vectores R y M_O^R son mutuamente perpendiculares y de lo contrario no son perpendiculares. En este caso $R \times M_O^R$ son cero, lo que indica que el sistema de fuerzas dado puede reducirse a una sola fuerza. Si no es así, el sistema se puede reducir a una llave de torsión —la combinación de una fuerza R y un vector de par M_O^R perpendiculares a la línea de acción de R —, acción equivalente que se conoce como el *paso p de la llave de torsión* (figura 3.47). El cociente $p = M_O^R/R$ es el *torsión* en el punto de la llave de torsión.

Para reducir un sistema de fuerzas dado a una llave de torsión, se deben seguir los siguientes pasos:

- Reducir el sistema de fuerzas dado a un sistema equivalente fuerza-par (R, M_O^R) localizado, convenientemente, en el origen O .
- Determinar el paso p a partir de la ecuación (3.62).

$$p = \frac{M_O^R}{R} = \frac{R \times M_O^R}{R^2} \quad (3.62)$$

y el vector de par a partir de $M_O = pR$

Expresar que el momento con respecto a O de la llave de torsión es igual al momento resultante M_O^R del sistema fuerza-par en O :

$$M_O + r \times R = M_O^R \quad (3.63)$$

Esta ecuación permite determinar el paso p como la línea de acción de la llave de torsión debe ser en el punto especificado puesto que el vector de posición r es el vector desde O hasta dicho punto.

Estos pasos se muestran en el problema 3.5.12. Aunque podría parecer difícil reducir un sistema de una llave de torsión a un punto dado, su punto resulta a veces demasiado simple y simplemente a la combinación de varias de las llaves y torsiones en las situaciones dadas en este capítulo. Por tanto, en la medida que se va continuando completamente toda la relación sobre la llave de torsión, se puede confiar en que se ha comprendido una buena parte del capítulo 3.

Problemas

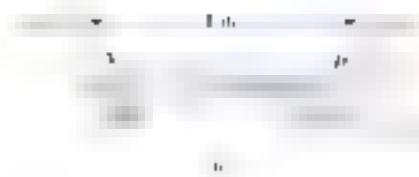


Figura P3.101



Figura P3.102

3.101 Una viga de 4 m de longitud se somete a una variedad de cargas, a) Reemplace cada tipo de carga por un sistema equivalente fuerza-par en el extremo A de la viga y b) Compare los sistemas equivalentes.

3.102 Una viga de 4 m de longitud se carga de la forma mostrada en la figura. Determine qué carga del problema 3.101 es equivalente a esta carga.

3.103 Determine la fuerza sencilla equivalente y la distancia desde el punto A hasta su línea de acción para cada una de las cargas del problema 3.101. Los sistemas A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z.

3.104 Cuatro sistemas fuerza-par diferentes actúan en las esquinas de una placa de metal, que se ha modelado en la forma que se muestra en la figura. Determine cuál de estos sistemas es equivalente a una fuerza $F = 100 \text{ lb}$ que pasa por el punto A y el punto B.

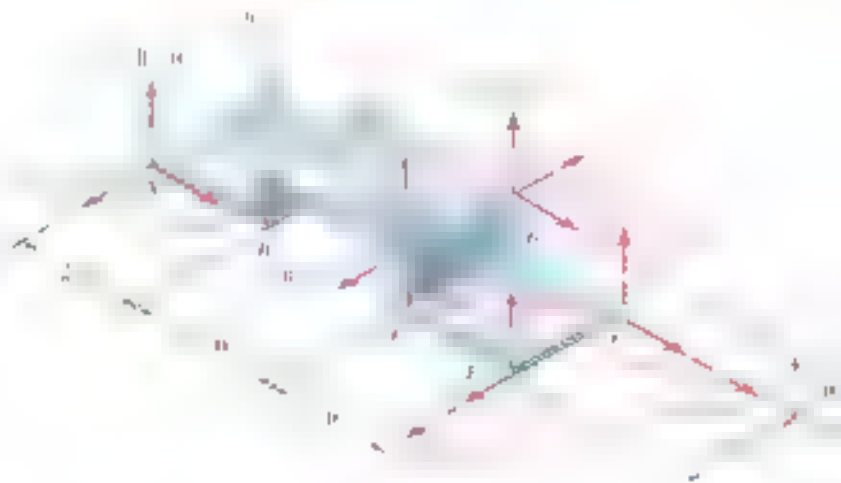


Figura P3.104

3.105 Los pesos de los niños se indican en los diagramas A y B de la izquierda. Si el niño A pesa 34 lb y el niño B pesa 64 lb, respectivamente. Determine dónde debe sentarse el niño C para que los tres niños estén en equilibrio. La longitud de la cuerda debe pasar por C y si se sabe que el peso de la cuerda puede ser de 100 lb.

3.106 Tres lámparas de peso uniforme están suspendidas de una estructura en la figura. El peso de las lámparas en A y B es de 4.1 lb, mientras que la lámpara en C pesa 2.5 lb. Si $d = 25$ in, determine la distancia desde D hacia la izquierda al punto de aplicación de una fuerza de las lámparas en A y B. Determine el valor de d si la resultante de los pesos debe pasar por el punto de aplicación C.



Figura P3.105



Figura P3.106

3.107 Una viga soporta tres cargas de magnitud dada y una cuarta carga cuya magnitud está en función de la posición. Si $b = 1.5$ m y las cargas se deben reemplazar por una sola fuerza equivalente, determine: a) la fuerza equivalente y su posición sobre el soporte. b) la magnitud de la fuerza equivalente y su posición de aplicación sobre la viga.



Figura P3.107

2.108 El engrane C está rigidamente unido al brazo AB. Si las fuerzas y los pesos de los radios se muestran en la figura, determine la magnitud de la fuerza P que debe aplicarse en el punto A para que el sistema esté en equilibrio.



Figura P3.108



Figura P3.109 y P3.110

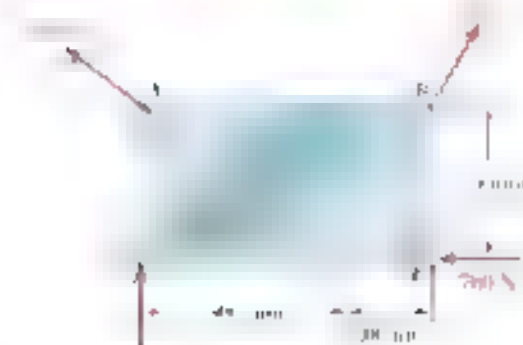


Figura P3.111

3.109 Un par de magnitud $M = 54 \text{ lb} \cdot \text{ft}$ y las tres fuerzas mostradas en la figura se aplican a una mémbula angular. a) Encuentre la resultante de este sistema de fuerzas. b) Localice los puntos donde la línea de acción de la resultante interseca a la línea AB y a la línea BC .

3.110 Un par M y las tres fuerzas mostradas en la figura se aplican a una mémbula angular. a) Encuentre el punto de intersección de la línea de acción de la resultante del sistema de fuerzas con la línea AB y b) el punto de intersección de la resultante con la línea BC .

3.111 Cuatro fuerzas actúan sobre la placa rectangular mostrada en la figura. a) Encuentre la resultante de estas fuerzas. b) Localice las líneas que dividen a la placa en tres partes iguales en el sentido de la placa.

3.112 Resuelva el problema 3.111 y ahora suponga que la fuerza de 700 N actúa hacia abajo en su punto.

3.113 Una armadura resiste las cargas mostradas en la figura. Determine la fuerza equivalente a las fuerzas que actúan sobre la estructura y el punto a partir del cual la línea de acción de la fuerza equivalente pasa por los puntos A y C .



Figura P3.113

3.114 Las poleas A y B se montan sobre la mémbula $CDEF$. La tensión en cada una de las tres cuerdas es 100 N que se muestra en la figura. Reemplace las cuatro fuerzas por una sola fuerza equivalente y determine el punto a partir del cual la línea de acción de la fuerza equivalente debe pasar.

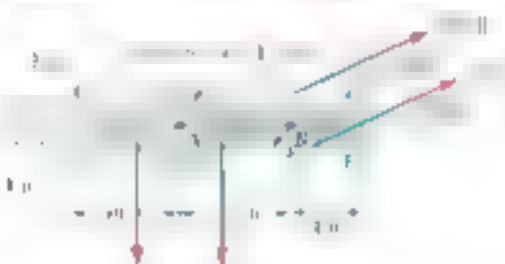


Figura P3.114



Figura P3.115

3.115 Una armadura plana de truss puede ser vista como un sistema de fuerzas coplanares en la figura. b) Encuentre el punto de intersección de la línea de acción de la fuerza equivalente con la línea AB y c) el punto de intersección de la fuerza equivalente con la línea BC .

3.116 Resuelva el problema 3.115 y ahora suponga que $P = 60 \text{ N}$.

3.117 Un motor eléctrico mueve un eje horizontal a velocidad constante v a lo largo del peso w y las fuerzas equilibran sobre la horquilla a velocidad constante v , haciendo la horquilla moverse hacia la izquierda a la misma velocidad v .

3.118 Cuando el seguidor AB rueda a lo largo de la superficie del elemento C , ejerce una fuerza F constante y perpendicular a la superficie q . Reemplaza F por un sistema equivalente fuerza-par en el punto D obteniendo el lugar a lo largo del cual se mueve D para que el sistema equivalente P sea $P_x = 0$, $P_y = 0$, $P_z = 0$, $M_x = 0$, $M_y = 0$, $M_z = 0$. Para el caso $v = 0$, el momento del sistema equivalente fuerza-par en D es máximo.

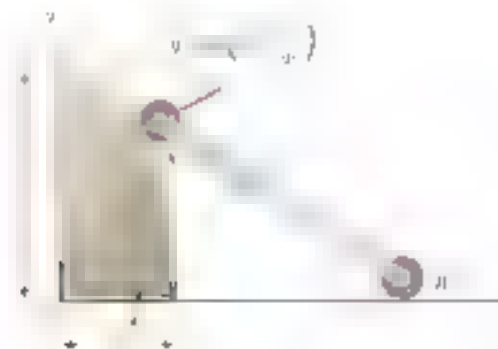


Figura P3.118

3.119 Una fuerza se aplica al extremo de la barra AB en el punto A como se muestra en la figura. Las aplicaciones de las fuerzas producen el mismo valor de fuerza-par en A .

3.120 Dos poleas de 150 mm de diámetro se montan sobre el eje en la figura. Las poleas B y C están situadas en el mismo eje que por debajo del diámetro se muestran las fuerzas de las cintas transportadoras por las que pasa la cinta por el eje A .

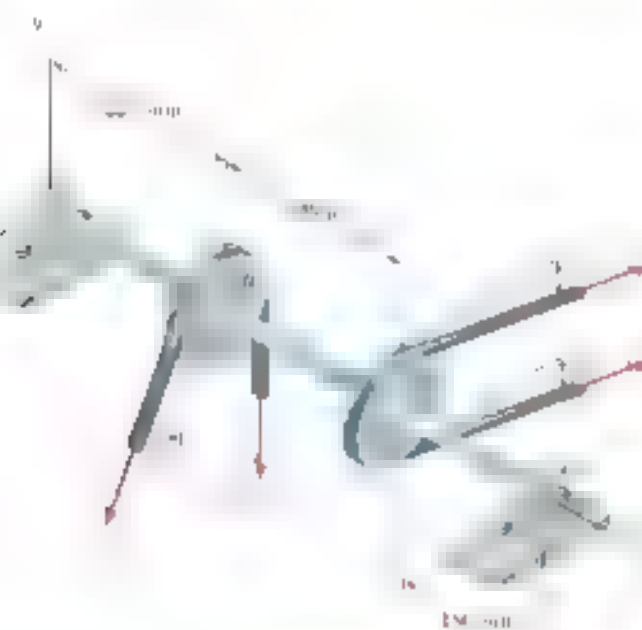


Figura P3.120

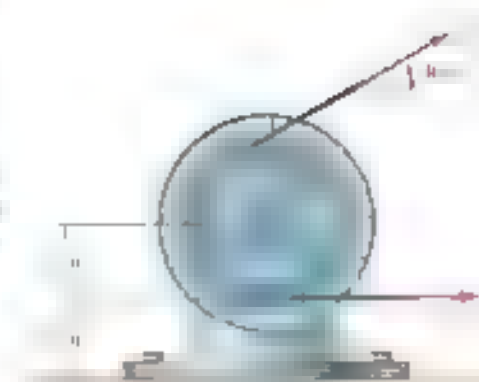


Figura P3.117

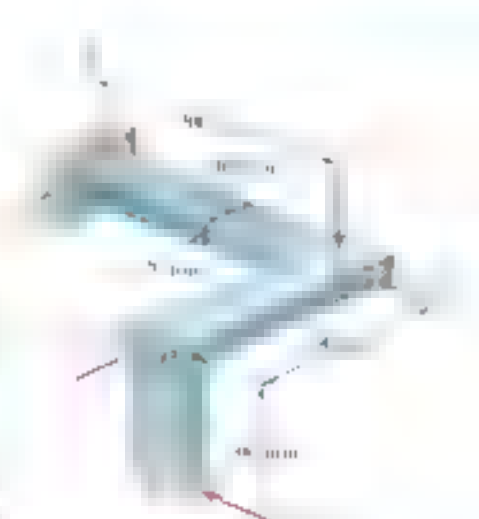


Figura P3.119

3.121 Al usar un sacapuntas manual un estudiante ejerce sobre éste las fuerzas \mathbf{F} y \mathbf{P} que se muestran en la figura. Se conocen las fuerzas ejercidas en B y en C al presionar que las fuerzas y el par son equivalentes a un sistema fuerza-par en A que consta de la fuerza $\mathbf{R} = (2.6 \text{ lb})\mathbf{i} + (0.7 \text{ lb})\mathbf{k}$ y el par $\mathbf{M}_A^R = M_1\mathbf{i} + (1.0 \text{ lb} \cdot \text{ft})\mathbf{j} + (0.72 \text{ lb} \cdot \text{ft})\mathbf{k}$. Encuentre los valores correspondientes de R_1 y M_1 .



Figura P3.121

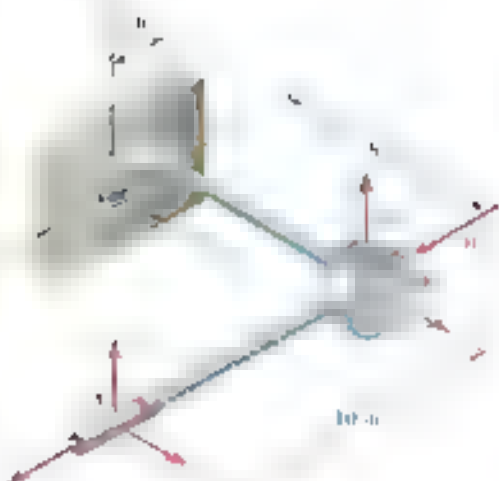


Figura P3.122

3.122 Un mecanismo como el que se muestra en la figura puede utilizarse para mover un objeto en B. Se conocen las fuerzas ejercidas en A y B que ejercen sobre el mecanismo y el par $\mathbf{M}_C = (360 \text{ lb} \cdot \text{in})\mathbf{k}$. Se sabe que estas fuerzas son equivalentes a un sistema fuerza-par en C que consta de la fuerza $\mathbf{C} = -(8 \text{ lb})\mathbf{i} + (4 \text{ lb})\mathbf{k}$ y el par $\mathbf{M}_C = (360 \text{ lb} \cdot \text{in})\mathbf{k}$. Determine las fuerzas aplicadas en A y B cuando $A_2 = 2 \text{ lb}$.

3.123 Un puntal ajustable BC se utiliza para colocar una pared en posición vertical. Si el sistema fuerza-par que se ejerce sobre la pared es tal que $\mathbf{R} = 21.2 \text{ lb}$ y $\mathbf{M} = 13.25 \text{ lb} \cdot \text{ft}$, encuentre un sistema fuerza-par equivalente en A.

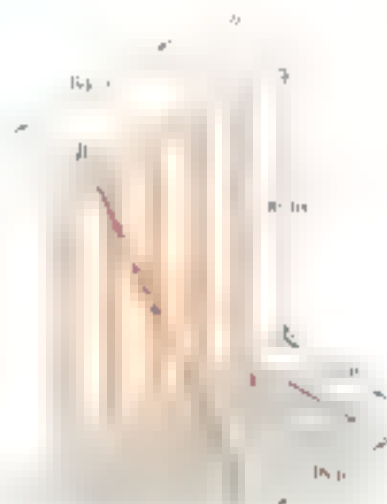


Figura P3.123

3.124 Los mecánicos reemplazan el sistema de escape de un automóvil al agregar un freno de mano. El tubo EF, que se muestra en la figura P3.124, se usa para desviar la salida de la cámara de la bomba de gasolina los puntos A y B. El tubo EF puede girar en el sentido de las manecillas del reloj o en el sentido inverso en relación con el eje DE, según lo observa el mecánico.

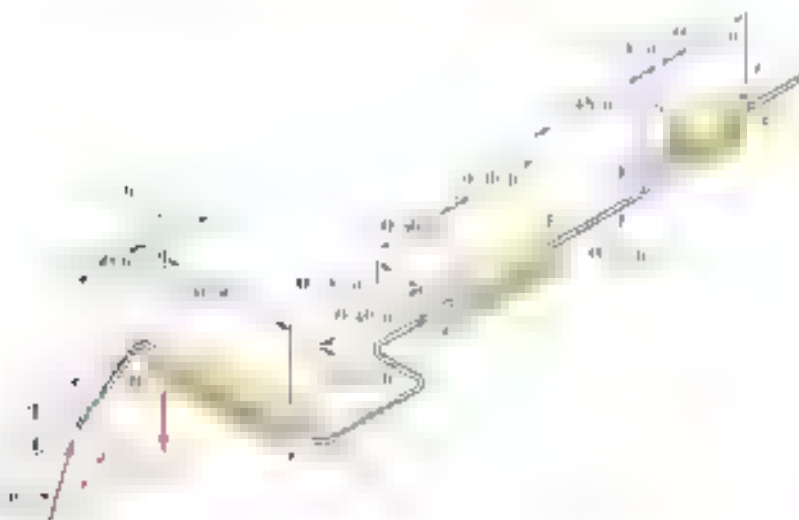


Figura P3.124

3.125 Para el sistema de escape del problema 3.124, a) reemplace el sistema de tuberías con un tubo de sección transversal constante en el punto A. El tubo EF puede girar en el sentido de las manecillas del reloj o en el sentido inverso en relación con el eje DE, según lo observa el mecánico.

3.126 El cabezal del tubo radial originalmente estaba conectado con el tubo A. Después de un tiempo, se descubrió que el tubo A estaba conectado con el tubo B. El tubo A se mide 25 m por encima de la línea de referencia y el tubo B se mide 20 m por encima de la línea de referencia. El tubo A se mide 25 m por encima de la línea de referencia y el tubo B se mide 20 m por encima de la línea de referencia. El tubo A se mide 25 m por encima de la línea de referencia y el tubo B se mide 20 m por encima de la línea de referencia.

3.127 Tres niños se encuentran parados en la balza de 3×3 m. Se conocen los pesos que están parados en A, B y C en 150 N, 200 N y 300 N, respectivamente. Determine la magnitud y el punto de aplicación de la resultante de los tres pesos.

3.128 Tres niños se encuentran parados en la balza de 5×5 m. Los pesos de los niños que están parados en A, B y C son de 375 N, 260 N y 400 N, respectivamente. Si un cuarto niño que pesa 425 N se sube a la balza, determine el punto de aplicación de la resultante de los cuatro pesos. ¿Dónde debe estar parado el cuarto niño para que la resultante de los cuatro pesos pase por el centro de la balza?



Figura P3.126



Figura P3.127 y P3.128

3.129 Cuatro señalamientos se montan en un marco que está sobre la parte trasera de un vagón de ferrocarril. Las fuerzas horizontales que ejercen por actuar sobre los señales son las que se muestran en la figura. Determine la magnitud y el punto de aplicación de la resultante de las cuatro fuerzas horizontales cuando $a = 1$ ft y $b = 12$ ft.

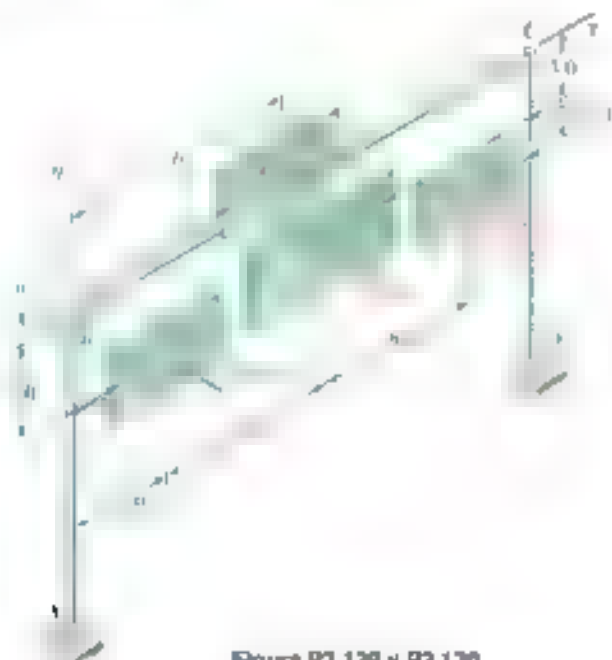


Figura P3.129 y P3.130

3.130 Cuatro señalamientos se montan en un marco que está sobre la parte trasera de un vagón de ferrocarril. Las fuerzas horizontales que ejercen por actuar sobre los señales son las que se muestran en la figura. Determine a y b tales que el punto de aplicación de la resultante de las cuatro fuerzas se encuentre en el punto C .

***3.131** Un grupo de estudiantes carga la plataforma de un tráiler de 3×3.3 m con dos cajas de $0.90 \times 0.60 \times 0.60$ m y con una caja de $0.60 \times 0.60 \times 1.2$ m. Cada una de las cajas se coloca en la parte posterior del tráiler, de tal forma que quedará el mismo espacio libre con los estudiantes como se muestra en la figura. Determine que los estudiantes lo han colocado en una posición tal que el centro de masa de la carga esté en la línea de acción de la fuerza de tracción que se aplica en la parte superior del tráiler. Asuma que cada caja está cargada uniformemente y que la línea de acción de la fuerza de tracción pasa por la línea que divide a las cajas en dos partes iguales. ¿Es posible que la carga se coloque sobre sus extremos o sobre sus centros?



Figura P3.131

***3.132** Retorne el problema 3.131 si los estudiantes desean calcular todo el peso posible en una cuarta raja y que al menos uno de los costados de la raja coincida con un ejeado ($\phi = 0^\circ$ o 90°).

***3.133** Un cubo de lado a está sometido a tres fuerzas de la misma magnitud P en las direcciones mostradas en la figura. Reemplace las tres fuerzas por una sola fuerza P en el origen O la que produzca la misma fuerza resultante R y el mismo momento torsional T al eje de la llave de torsión.

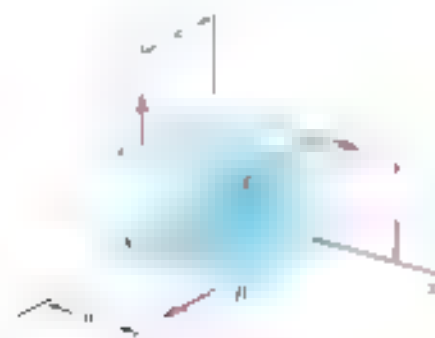


Figura P3.133

***3.134** Sometida a tres fuerzas una pieza de metal laminada se dobla en la forma que se muestra en la figura. Si las fuerzas tienen la misma magnitud P , reemplazuelas por una llave de torsión equivalente y determine (a) la magnitud de la fuerza resultante R y (b) el paso de la llave de torsión y el eje de la llave de torsión.

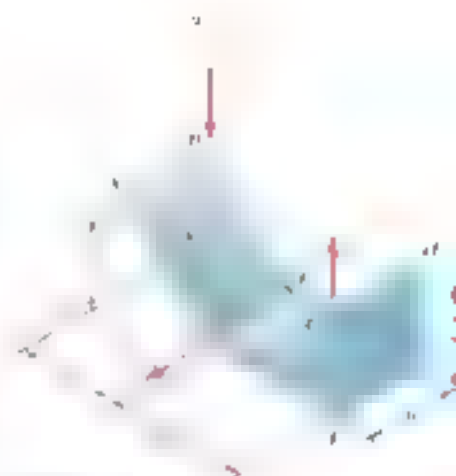


Figura P3.134

***3.135 y *3.136** Las fuerzas y los pares mostrados se aplican sobre dos tornillos mediante los que se sujeta una placa de metal a un bloque de madera. Determine (a) la fuerza resultante R , (b) el paso de la llave de torsión y el punto donde el eje de la llave de torsión interseca al plano xy .



Figura P3.135



Figura P3.136

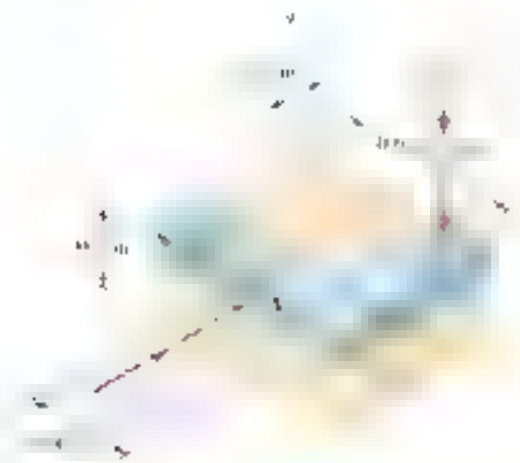


Figura P3.137

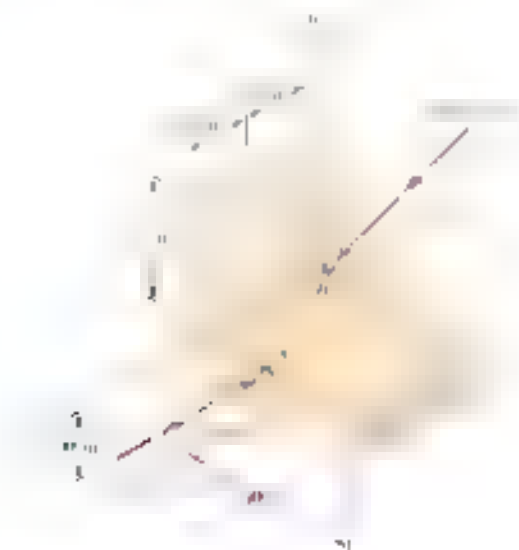


Figura P3.138



Figura P3.139

*3.137 y *3.138 Dos cables A y B se unen en un punto central. Las fuerzas se muestran en la figura. Reemplaze las dos fuerzas de tensión por una sola llave de torsión equivalente y determine a) la resultante \mathbf{R} , b) el punto en la llave de torsión en el plano xz a partir del cual el eje de la llave de torsión interseca al plano xz .

*3.139 Dos cables atados en A y B se usan para mover el tronco de un árbol caído como se muestra en la figura. Reemplaze las fuerzas ejercidas por los cables por una sola llave de torsión equivalente y determine a) la resultante \mathbf{R} , b) el punto en la llave de torsión en el plano xz a partir del cual el eje de la llave de torsión interseca al plano xz .

*3.140 Un asta horizontal se sostiene mediante tres cables atados a los extremos y a un punto central. Las fuerzas se muestran en la figura. Reemplaze las tres fuerzas de tensión por una sola llave de torsión equivalente y determine a) la resultante \mathbf{R} , b) el punto en la llave de torsión en el plano xz a partir del cual el eje de la llave de torsión interseca al plano xz .

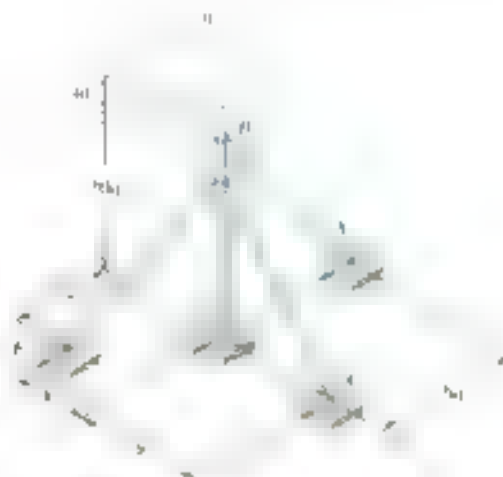


Figura P3.140

***3.141 y *3.142** Determine si el sistema fuerza-par mostrado en la figura puede reducirse a una sola fuerza equivalente \mathbf{R} . Si esto es posible, determine \mathbf{R} y el momento de \mathbf{R} con respecto al punto Q . Si la reducción no es posible, determine el sistema dado por una fuerza equivalente \mathbf{R} y el momento \mathbf{M}_Q de \mathbf{R} con respecto al punto Q , donde \mathbf{R} interseca al plano yz .

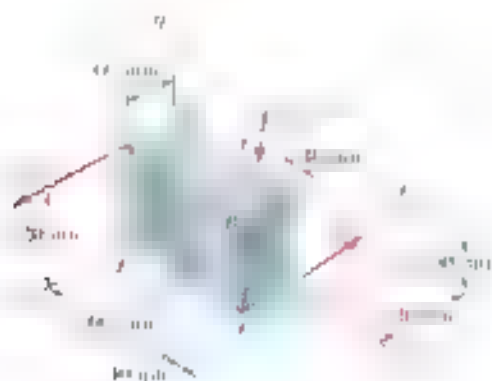


Figura P3.141



Figura P3.142

***3.143** Reemplace la llave de torsión mostrada en la figura por un sistema equivalente que consista de dos fuerzas perpendiculares a yz que actúan en A y en B .



Figura P3.143

***3.144** Demuestre que, en general, una llave de torsión puede ser reemplazada por un sistema equivalente de n fuerzas que actúan en n puntos, donde n es cualquier número entero positivo, pero n no debe ser menor que 2.

***3.145** Demuestre que una llave de torsión puede reemplazarse por dos fuerzas mutuamente perpendiculares aplicadas en un punto fijo.

***3.146** Demuestre que una llave de torsión puede reemplazarse por dos fuerzas mutuamente perpendiculares aplicadas en dos puntos fijos.

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 3

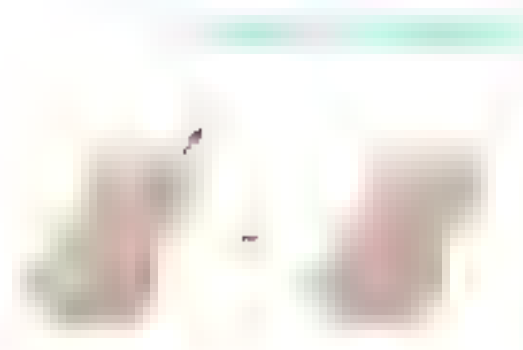


Figura 3.48

Producto vectorial de dos vectores

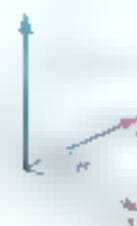


Figura 3.49



Figura 3.50

En este capítulo se estableció el teorema de las tres fuerzas sobre un cuerpo rígido. También se aplicaron a distintos cuerpos fuerzas externas e internas (sección 3.2) y se vio que, de acuerdo con el principio de la simultaneidad, el estado de un cuerpo externo sobre un cuerpo rígido permanece inalterado si la fuerza se mueve a lo largo de su línea de acción. Se demostró que, en otros casos, las fuerzas \mathbf{F} y \mathbf{F}' que actúan sobre un cuerpo rígido en los puntos extremos tienen el mismo efecto sobre dicho cuerpo si tienen la misma magnitud, la misma dirección y la misma línea de acción (figura 3.15). Se dice que dos fuerzas como éstas son *equivalentes*.

Antes de proceder con el estudio de *sistemas equivalentes de fuerzas*, se presentó el concepto del *producto vectorial de dos vectores* (sección 3.4). El producto vectorial

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}$$

de dos vectores \mathbf{P} y \mathbf{Q} se define como el vector perpendicular al plano que contiene a \mathbf{P} y a \mathbf{Q} (figura 3.49), cuya magnitud es (igual a)

$$V = PQ \sin \theta \quad (3.1)$$

y que está dirigida en una o en la otra dirección, a lo largo de la parte terminal de \mathbf{V} determinada a través de la regla de la mano derecha: el vector \mathbf{P} colorea con el vector \mathbf{Q} como contraria al movimiento de las manecillas del reloj. Se dice que los tres vectores \mathbf{P} , \mathbf{Q} y \mathbf{V} —considerados en ese orden— forman una *triada de mano derecha*. Se debe recordar que los productos vectoriales $\mathbf{Q} \times \mathbf{P}$ y $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ están representados por vectores iguales y opuestos. Así, se tiene que

$$\mathbf{Q} \times \mathbf{P} = -\mathbf{P} \times \mathbf{Q} \quad (3.2)$$

Además, a partir de la definición del producto vectorial de dos vectores, las notaciones combinadas que los productos vectoriales de los vectores unitarios \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} están dados por

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = 0 \quad \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \quad \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$$

y así sucesivamente. El signo del producto vectorial de dos vectores unitarios puede determinarse definiendo las tres direcciones representadas por los vectores unitarios en un círculo, en un sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj (figura 3.50). El resultado vectorial de dos vectores unitarios se obtiene al seguir el siguiente camino: el primer vector unitario se toma como el primer vector unitario, el segundo vector unitario se toma como el segundo vector unitario, y el tercer vector unitario se sigue uno al otro en el sentido de las manecillas del reloj.

Las **componentes rectangulares del producto vectorial** \mathbf{V} de dos vectores \mathbf{P} y \mathbf{Q} fueron expresadas como sigue [sección 3.5]

$$\begin{aligned} V_x &= P_y Q_z - P_z Q_y \\ V_y &= P_z Q_x - P_x Q_z \\ V_z &= P_x Q_y - P_y Q_x \end{aligned} \quad (3.9)$$

Con el uso de un determinante también se escribió

$$\mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \quad (3.10)$$

El **momento de una fuerza \mathbf{F} con respecto a un punto O** se definió [sección 3.6] como el producto vectorial

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (3.11)$$

donde \mathbf{r} es el **vector de posición** (trazado desde O hasta el punto de aplicación A de la fuerza \mathbf{F} (figura 3.51)). Si se representa con θ el **ángulo entre las líneas de acción** de \mathbf{r} y \mathbf{F} , se puede escribir la **magnitud del momento de \mathbf{F} con respecto a O** como sigue (ver fig. 3.51)

$$M_O = rF \text{ con } \theta = Fd \quad (3.12)$$

donde d representa la **distancia perpendicular** entre el eje de acción de \mathbf{F} y la **línea de acción** de \mathbf{F} .

Las **componentes rectangulares del momento \mathbf{M}_O de una fuerza \mathbf{F}** se expresaron [sección 3.8] como

$$\begin{aligned} M_x &= yF_z - zF_y \\ M_y &= zF_x - xF_z \\ M_z &= xF_y - yF_x \end{aligned} \quad (3.13)$$

donde x , y y z son las **componentes del vector de posición \mathbf{r}** (figura 3.52) expresado en términos de **coordenadas cartesianas** arbitrarias.

$$\mathbf{M}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (3.14)$$

La **ecuación general de momento en una fuerza \mathbf{F} aplicada en A con respecto a un punto arbitrario B** , se obtuvo que

$$\mathbf{M}_B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (3.15)$$

donde $x_{A/B}$, $y_{A/B}$ y $z_{A/B}$ son las **componentes del vector $\mathbf{r}_{A/B}$**

$$x_{A/B} = x_A - x_B \quad y_{A/B} = y_A - y_B \quad z_{A/B} = z_A - z_B$$

Componentes rectangulares del producto

Momento de una fuerza con respecto a un punto

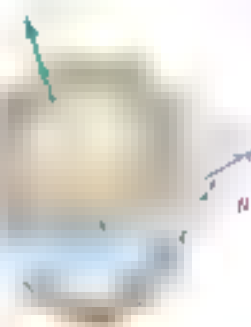


Figura 3.51

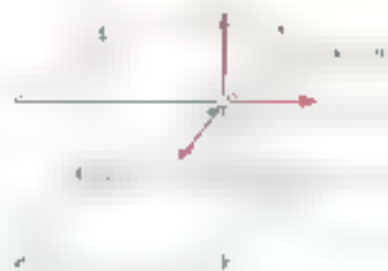


Figura 3.52

En el caso de problemas que involucran únicamente a dos dimensiones, se puede suponer que la fuerza \mathbf{F} se encuentra en el plano xy . Su momento M_H en respecto al punto H en el eje z es el escalar M_H que puede ser positivo o negativo, según la figura 3.53) y está completamente definido por el escalar

$$M_H = (x_A - x_H)F_y - (y_A - y_H)F_x \quad (3.23)$$



Figura 3.53

Producto escalar de dos vectores



Figura 3.54

En los problemas que involucran a tres dimensiones, se postularon algunos principios para definir el momento de un vector en un punto, los cuales son:

El **producto escalar** de dos vectores \mathbf{P} y \mathbf{Q} [sección 3.9] se denotó por $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$ y se definió como la cantidad escalar

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = PQ \cos \theta \quad (3.24)$$

donde θ es el ángulo entre \mathbf{P} y \mathbf{Q} en $0 \leq \theta \leq \pi$. Se expresó el momento escalar de \mathbf{P} y \mathbf{Q} en términos de las componentes escalares de los dos vectores, se determinó que

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z \quad (3.30)$$

La **proyección de un vector \mathbf{P} sobre un eje OL** (Figura 3.55) se puede obtener sumando el producto escalar de \mathbf{P} y el vector unitario \mathbf{e}_L a lo largo de OL . Así, se tiene que

$$P_{eL} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_L \quad (3.36)$$

o, con las componentes rectangulares,

$$P_{eL} = P_x \cos \theta_1 + P_y \cos \theta_2 + P_z \cos \theta_3 \quad (3.37)$$

donde θ_1, θ_2 y θ_3 representan los ángulos que hace el eje OL con los ejes coordenados.

El **producto triple escalar** de los tres vectores \mathbf{S}, \mathbf{P} y \mathbf{Q} se define como la expresión escalar

$$\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \quad (3.38)$$

que se obtiene formando el producto escalar de \mathbf{S} con el producto vectorial de \mathbf{P} y \mathbf{Q} [sección 3.10]. Se mostró que

$$\mathbf{S} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} = \begin{vmatrix} \mathbf{S}_x & \mathbf{S}_y & \mathbf{S}_z \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \quad (3.41)$$

donde los elementos de la tercera fila son los componentes vectoriales de los tres vectores.

El momento de una fuerza \mathbf{F} con respecto a un eje Ol , según se define en el capítulo 3, se define como la proyección Ol sobre Ol del momento \mathbf{M}_O de la fuerza \mathbf{F} (figura 3.56); esto es, se define como el producto escalar según la ecuación $\lambda = \text{vector } Ol \cdot \text{momento } \mathbf{M}_O$ y la fuerza \mathbf{F}

$$M_{Ol} = \lambda \cdot \mathbf{M}_O = \lambda \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \quad (3.42)$$

En el caso de la fuerza \mathbf{F} de tener una acción perpendicular al eje Ol , se tiene

$$M_{Ol} = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda_y & \lambda_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (3.43)$$

donde $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z = \text{cosenos directores del eje } Ol$.

$x, y, z = \text{componentes de } \mathbf{r}$

$F_x, F_y, F_z = \text{componentes de } \mathbf{F}$

Por el momento, se asume que se puede tomar como la dirección normal del momento de una fuerza es perpendicular a la línea de acción.

Se dice que dos fuerzas \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$ que tienen la misma magnitud, líneas de acción paralelas y sentidos opuestos, forman un par, sea del λ y $1/\lambda$. Se debe mostrar que el momento de los pares es independiente de la posición de los puntos de aplicación del momento y el momento de un par es un vector \mathbf{M} perpendicular al plano de las fuerzas y su magnitud es el producto de la magnitud de las fuerzas F y la distancia perpendicular d entre sus líneas de acción (figura 3.57).

Los pares que tienen el mismo momento \mathbf{M} son *equivalentes*, esto es, los dos pares tienen el mismo efecto sobre un cuerpo rígido (figura 3.58). Las líneas de los pares \mathbf{M} y $-\mathbf{M}$ forman un par, sea del $1/\mathbf{M}$ y \mathbf{M} como el \mathbf{M} en el que resultante se puede obtener si se añade vectorialmente los momentos \mathbf{M} y $-\mathbf{M}$ de los pares originales, así como se muestra en la figura 3.59. Por lo tanto, se concluye que un par puede ser representado por un vector conocido como el vector de par, igual a $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. El vector \mathbf{M} es el momento \mathbf{M} en el que se define $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. Un vector de par es un vector libre, ya que si se desea se puede trasladar al origen O , se puede descomponer en componentes (figura 3.60).



Figura 3.58

Sistema fuerza-par

un sistema de fuerza-par



Figura 3.60



Figura 3.59

Cualquier fuerza F que actúa en un punto A de un cuerpo rígido puede ser reemplazada por un sistema fuerza-par en un punto arbitrario O del cuerpo. La fuerza F aplicada en O es un par de momento M igual al momento de la fuerza F respecto al punto O . La fuerza F y el vector de par M son mutuamente perpendiculares (ver figura 3.59).

Se concluye que [sección 3.17] cualquier sistema de fuerzas puede ser reemplazado por un sistema fuerza-par en un punto arbitrario O del cuerpo. El sistema fuerza-par resultante R y el vector de par resultante M^R son mutuamente perpendiculares (ver figura 3.60). Obsérvese que el sistema fuerza-par resultante R y el vector de par M^R no son mutuamente perpendiculares entre sí.



Con base en lo anterior se concluye [sección 3.18] que en lo que respecta a los cuerpos rígidos, dos sistemas de fuerzas F_1, F_2, \dots, F_n y G_1, G_2, \dots, G_n son equivalentes si y sólo si:

$$\sum F_i = \sum G_i \quad \text{y} \quad \sum M_i = \sum M_i \quad (3.5)$$

Si la fuerza resultante R y el vector de par resultante M^R son mutuamente perpendiculares entre sí, el sistema fuerza-par en O puede reducirse a una única fuerza resultante R [sección 3.2]. Esto es el caso para sistemas que sean constituidos por (a) fuerzas concurrentes, (b) los sistemas considerados en el artículo 2.1 (fuerzas coplanarias [problemas resueltos 3.8 y 3.9] o en fuerzas paralelas [problemas resueltos 3.11]). Si el sistema R y el vector de par M^R no son mutuamente perpendiculares entre sí, el sistema no puede ser reducido a una única fuerza. Este sistema puede ser reducido a un tipo especial de sistema fuerza-par que se lo conoce como el *sistema de torsión*, el cual consta de la resultante R y un vector de par M , perpendicular al vector de R [sección 3.2]. Véase el artículo 3.2.

Problemas de repaso

P. 147 Una caja de manija de 80 kg de masa se sostiene en la posición mostrada en la figura. Determine a) el momento alrededor de E generado por el peso W de la manija de manija y b) la fuerza en el cable que produce un momento alrededor de E de igual magnitud pero con sentido opuesto.

P. 148 Se sabe que la cuerda AB ejerce sobre la manivela BC una fuerza de 150 N dirigida hacia abajo en la perpendicular a la línea central de AB. Determine el momento de esa fuerza alrededor de C.

P. 149 Una caja de pescar AB de 6 ft se ancla de manera segura en la arena de una playa. Después de que un pez pica en el anzuelo, la fuerza resultante en la línea es de 6 lb. Determine el momento alrededor de A de la fuerza ejercida por la línea en B.

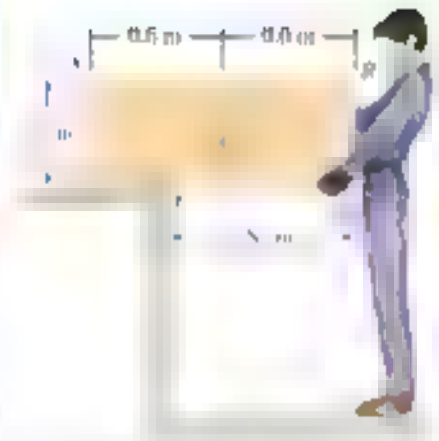


Figura P3.147



Figura P3.148



Figura P3.149

P. 150 Las cuerdas AB y BC son dos de las cuerdas usadas para sostener una carga. Las dos cuerdas están atadas a una estaca en B. Si la tensión en la cuerda AB es de 340 N, determine a) el ángulo entre la cuerda AB y la estaca y b) la proyección sobre la estaca de la fuerza ejercida por la cuerda AB en el punto B.



Figura P3.150



Figura P3.151

3.151 Un granjero emplea cables para sujetar firmemente uno de los patos de un granero pequeño a los tensores B y E . Si se sabe que la suma de los momentos, respecto del eje x , de las fuerzas ejercidas por los cables sobre el punto A es de $1000 \text{ lb} \cdot \text{ft}$ y la tensión en el cable AB es de 125 lb , determine la tensión en el cable AE cuando $T_{AB} = 255 \text{ lb}$.

3.152 Retome el problema 3.151 si la tensión en el cable AB es de 300 lb .

3.153 Un arnés de aluminio se fabrica al enrollar dos o tres alambres alrededor de clavijas de 2 in. de diámetro montadas sobre una hoja de madera. Si la fuerza en cada alambre es de 1 lb , determine el par resultante que actúa sobre la madera cuando $\theta = 18^\circ$, y ϕ sólo se colocan los alambres AB y CD , lo se colocan los tres alambres.

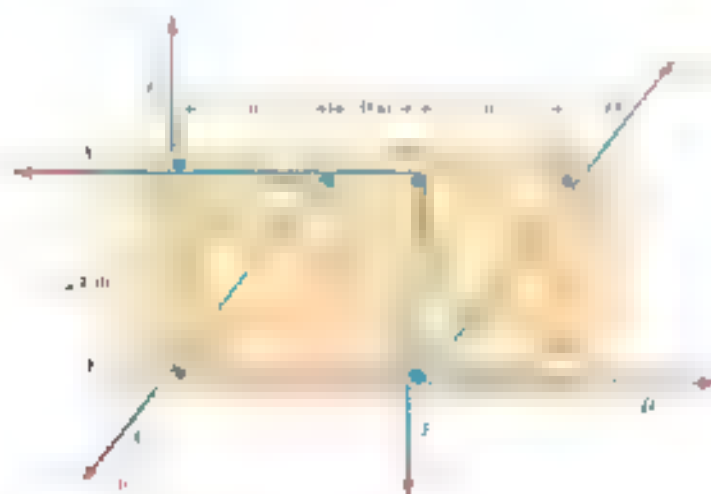


Figura P3.153

3.154 Un trabajador trata de mover una roca aplicando una fuerza de 200 N hacia arriba en el punto A sobre la roca. Responda las siguientes preguntas por un sistema equivalente fuerza-par en D . (a) Dos trabajadores intentan mover la roca aplicando una fuerza en el punto B y C como se muestra en D . Determine las dos fuerzas si éstas son equivalentes a la fuerza indicada en A .



Figura P3.154

3.155 Una fuerza de 110 N que actúa en un plano vertical paralelo al plano xy se aplica a la manija horizontal AB en 20 m que del eje de una llave de torsión. Reemplazar la fuerza por un sistema fuerza-par equivalente en el origen O del sistema construido.

3.156 Cuatro fuerzas que se aplican en las alambres A y B en la capacidad de las fuerzas en C se muestran en la figura. Si las fuerzas actúan en el mismo plano por una sola línea que es de aplicación en un punto sobre la línea AB , determine la fuerza equivalente X y la distancia d sobre AB desde el punto de aplicación de la fuerza X en $C = 30$ lb. Antes de 12 m que la línea AB es verticalmente se aplica en el punto R .

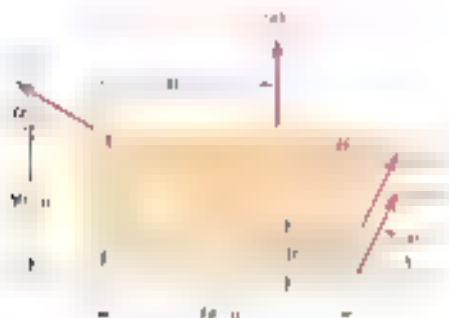


Figura P3.156

3.157 Una paleta sostenida mediante un barbigán se utiliza para apilar un torbellido A en 12 m que las fuerzas perpendiculares B y C se aplican por estas fuerzas son equivalentes a un sistema fuerza-par en A que consiste en $M = 50$ N m. B y C actúan en M . Si B y C son perpendiculares a la línea correspondiente AB y AC . Determine la orientación de B y C en la cabeza del torbellido para que se encuentre en la posición mostrada.

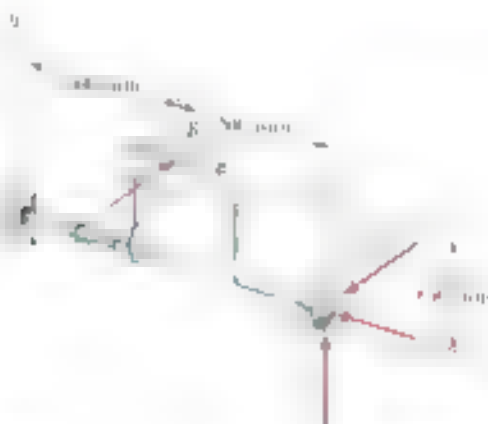


Figura P3.157

3.158 Una base de concreto que tiene la forma de un hexágono regular con lados de 12 ft soporta cuatro cargas sobre sus ejes rectos, como se muestra en la figura. Determine la magnitud de las cargas adicionales que se deben aplicar en los B y C para sostener la base si las cargas deben pasar por los ejes AC y BD .

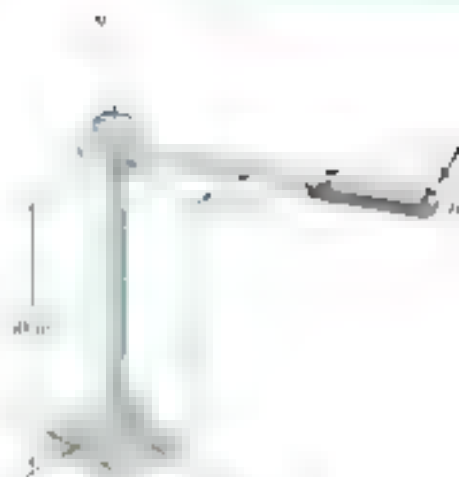


Figura P3.158



Figura P3.158

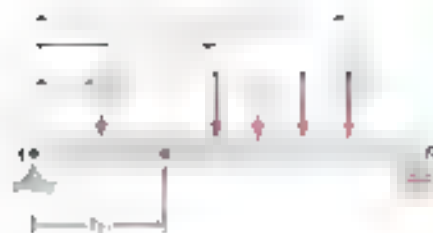


Figura P3.C1



3.C1 Una viga AB está sometida a varias fuerzas verticales como se muestra en la figura. Use software para determinar la magnitud de la resultante de las fuerzas y la distancia x desde el punto A donde la acción de la resultante interseca a AB . Use este software para resolver *a)* el problema resuelto 3.8; *b)* el problema 3.106.

3.C2 Utilice software para determinar la magnitud y el punto de aplicación de la resultante de las fuerzas verticales P_1 , P_2 , ..., P_n las cuales actúan en los puntos A_1 , A_2 , ..., A_n que se encuentran en el plano xy . Use este software para resolver *a)* el problema resuelto 3.11; *b)* el problema 3.127; *c)* el problema 3.129.



Figura P3.C2

3.C3 Un amigo le pide ayuda en el diseño de cajas para cultivar flores. Las cajas deben tener 4, 5, 6 u 8 lados; los cuartos pueden estar inclinados hacia fuera 10° , 30° o 40° . Use software para determinar el ángulo α del bisel para una caja de los tipos: los más pequeños, cuatro caras; la mitad de una caja, y una caja con el ángulo horizontal con las caras que se abren hacia adentro de dos lados adyacentes.)

3.C4 El fabricante de un carrete para mangueras desea determinar el momento de la fuerza F alrededor del eje AA' . La magnitud de la fuerza varía sinusoidalmente dada por la relación $F = 300(1 - \cos t)$ donde t es el tiempo. Una manguera está enrollada sobre el tambor de 0.6 m de diámetro y L es la longitud total de la manguera. Use software para calcular el momento resultante después de enrollar la manguera de 30 m de longitud y 50 mm de diámetro. Comience con $t = 0$ y calcule el momento después de cada vuelta del tambor hasta que la manguera esté enrollada sobre el carrete.



Figura P3.C3

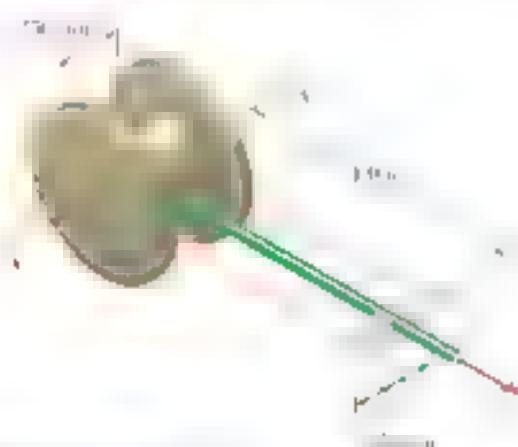


Figura P3.C4

3.C5 Un sistema de n fuerzas actúa sobre un cuerpo. Utilice software para evaluar el sistema y determine los momentos de las fuerzas con respecto al punto P de la figura. a) el sistema de fuerzas que actúa en el punto P de la figura b) el sistema de fuerzas que actúa en el punto P de la figura c) el sistema de fuerzas que actúa en el punto P de la figura d) el sistema de fuerzas que actúa en el punto P de la figura e) el sistema de fuerzas que actúa en el punto P de la figura f) el sistema de fuerzas que actúa en el punto P de la figura g) el sistema de fuerzas que actúa en el punto P de la figura h) el sistema de fuerzas que actúa en el punto P de la figura i) el sistema de fuerzas que actúa en el punto P de la figura j) el sistema de fuerzas que actúa en el punto P de la figura k) el sistema de fuerzas que actúa en el punto P de la figura l) el sistema de fuerzas que actúa en el punto P de la figura m) el sistema de fuerzas que actúa en el punto P de la figura n) el sistema de fuerzas que actúa en el punto P de la figura o) el sistema de fuerzas que actúa en el punto P de la figura p) el sistema de fuerzas que actúa en el punto P de la figura q) el sistema de fuerzas que actúa en el punto P de la figura r) el sistema de fuerzas que actúa en el punto P de la figura s) el sistema de fuerzas que actúa en el punto P de la figura t) el sistema de fuerzas que actúa en el punto P de la figura u) el sistema de fuerzas que actúa en el punto P de la figura v) el sistema de fuerzas que actúa en el punto P de la figura w) el sistema de fuerzas que actúa en el punto P de la figura x) el sistema de fuerzas que actúa en el punto P de la figura y) el sistema de fuerzas que actúa en el punto P de la figura z) el sistema de fuerzas que actúa en el punto P de la figura

3.C6 Dos ductos cilíndricos, AB y CD , entran a una habitación a través de los techos por aberturas circulares de los techos como se muestra entre sí pero no son perpendiculares a las paredes. Los ductos están conectados mediante dos cables flexibles y una guirnalda vertical recta. Use software para determinar la longitud de AB y CD que minimice la longitud total de los cables. a) $AB = 10$ m y $CD = 10$ m b) $AB = 10$ m y $CD = 15$ m c) $AB = 15$ m y $CD = 10$ m d) $AB = 15$ m y $CD = 15$ m e) $AB = 20$ m y $CD = 10$ m f) $AB = 20$ m y $CD = 15$ m g) $AB = 20$ m y $CD = 20$ m h) $AB = 25$ m y $CD = 10$ m i) $AB = 25$ m y $CD = 15$ m j) $AB = 25$ m y $CD = 20$ m k) $AB = 25$ m y $CD = 25$ m l) $AB = 30$ m y $CD = 10$ m m) $AB = 30$ m y $CD = 15$ m n) $AB = 30$ m y $CD = 20$ m o) $AB = 30$ m y $CD = 25$ m p) $AB = 30$ m y $CD = 30$ m q) $AB = 35$ m y $CD = 10$ m r) $AB = 35$ m y $CD = 15$ m s) $AB = 35$ m y $CD = 20$ m t) $AB = 35$ m y $CD = 25$ m u) $AB = 35$ m y $CD = 30$ m v) $AB = 40$ m y $CD = 10$ m w) $AB = 40$ m y $CD = 15$ m x) $AB = 40$ m y $CD = 20$ m y) $AB = 40$ m y $CD = 25$ m z) $AB = 40$ m y $CD = 30$ m

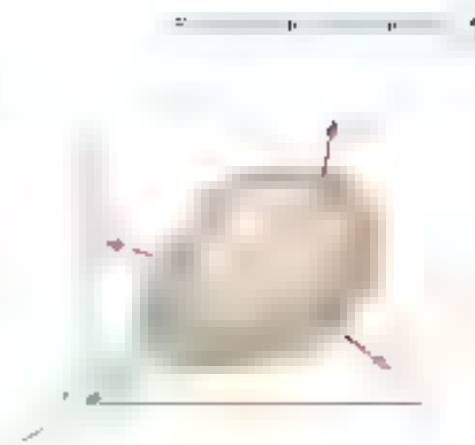


Figure P3.C6



Figure P1.C6

Estas torres de telecomunicaciones construyeron en el corazón del complejo olímpico de Barcelona para transmitir los juegos de 1992, está diseñada para permanecer erguida ante la gravedad y las fuerzas laterales ejercidas por el viento.)

CAPÍTULO

4

Equilibrio de cuerpos rígidos



Introducción

Diagrama de cuerpo libre

Reacciones en los puntos de apoyo y conexiones de una estructura bidimensional

Equilibrio de un cuerpo rígido en dos dimensiones

Reacciones estáticamente indeterminadas. Restricciones parciales

Equilibrio de un cuerpo sujeto a dos fuerzas

Equilibrio de un cuerpo sujeto a tres fuerzas

Equilibrio de un cuerpo rígido en tres dimensiones

Reacciones en puntos de apoyo y conexiones para una estructura tridimensional

4.1. INTRODUCCION

El tema de esta sección es el de estudiar que las fuerzas externas que actúan sobre un sistema se equilibran entre sí, en un sistema de coordenadas arbitrario O . Cuando la fuerza y el par son iguales a cero, las fuerzas externas sobre un sistema de coordenadas se balancean, que el cuerpo rígido se encuentra en **equilibrio**.

Por tanto, las condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio de un cuerpo rígido se expresan de manera algebraica en $\Sigma F = 0$ y $\Sigma M = 0$, en las relaciones (3.52) de la sección 3.17.

$$\Sigma F = 0 \quad \Sigma M = 0 \quad \Sigma r \times F = 0 \quad (4.1)$$

Si se descompone cada fuerza y cada momento en sus componentes rectangulares se pueden expresar las condiciones como seis ecuaciones para el equilibrio de un cuerpo rígido por medio de las seis relaciones escalares que se presentan a continuación.

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= 0 & \Sigma F_y &= 0 & \Sigma F_z &= 0 & (4.2) \\ \Sigma M_x &= 0 & \Sigma M_y &= 0 & \Sigma M_z &= 0 & (4.3) \end{aligned}$$

Las ecuaciones de equilibrio se pueden aplicar para determinar las fuerzas de reacción en los puntos de aplicación sobre un cuerpo rígido en equilibrio. Descomponiendo las fuerzas sobre este por sus puntos de aplicación. Se obtiene una ecuación de equilibrio (4.2) que expresa el equilibrio por las componentes de las fuerzas de tres direcciones x , y y z y una ecuación de equilibrio (4.3) que expresa a su vez que los momentos de las fuerzas externas con respecto a los ejes x , y y z también están en equilibrio. En tanto que un cuerpo rígido está en equilibrio, solo se puede mover en tres direcciones de traslación simultáneamente y también se puede rotar al cuerpo en rotación.

Para poder escribir las ecuaciones de equilibrio para un cuerpo rígido, se necesita de un diagrama de cuerpo libre, que es un diagrama de un cuerpo rígido que muestra el *hogar* de las fuerzas que actúan sobre él. Se debe tener en cuenta que el *hogar* de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo rígido se debe considerar en primer lugar. El equilibrio de un cuerpo rígido en tres direcciones se obtiene considerando las fuerzas que actúan sobre el cuerpo rígido y las fuerzas de reacción en los puntos de apoyo y las conexiones de la estructura. Se debe considerar cada tipo específico de reacción en cada tipo de apoyo. Se debe considerar como interacción entre la estructura y el soporte apropiado, de forma que se pueda saber de antemano si las ecuaciones de equilibrio pueden resolverse para determinar las fuerzas y reacciones desconocidas.

En la última parte de esta sección se considerará el equilibrio de estructuras tridimensionales y se realizará el mismo tipo de análisis para estas estructuras y para sus puntos de apoyo.

Al resolver un problema relacionado con el movimiento de un cuerpo rígido, es esencial que se consideren todos los miembros que actúan sobre éste. Además, es importante saber distinguir entre las fuerzas que actúan directamente sobre dicho cuerpo. Omitir o agregar una fuerza externa podría destruir las conclusiones de equilibrio. Por tanto, es prudente basarse en la solución del problema, esquematizar un cuerpo libre del cuerpo rígido en consideración. Los diagramas de cuerpo libre se utilizarán en muchas ocasiones en el capítulo 2. Sin embargo, es importante recordar que a partir de ahora se podrán usar el diagrama de cuerpo libre y los diagramas de cuerpo libre como se debe, asegurando el uso de diagramas de cuerpo libre.

1. Se debe tomar una decisión acertada en relación con la selección del cuerpo libre que será utilizado. Después se debe separar al cuerpo del suelo y de todos los demás cuerpos. Así se realiza un ensayo del cuerpo del cuerpo ya aislado.
2. Todas las fuerzas externas deben incluirse en el diagrama de cuerpo libre. Estas fuerzas representan las acciones ejercidas sobre el cuerpo libre por el suelo y por los cuerpos que han sido separados del mismo; estas fuerzas deben aplicarse en los diversos puntos sobre los que el cuerpo libre estaba apoyado en el suelo o estaba conectado a otros cuerpos. También se debe incluir entre las fuerzas externas las fuerzas que el cuerpo libre ejerce sobre la Tierra sobre las distintas partículas que lo constituyen. Como se verá en el capítulo 5, el peso debe aplicarse en el centro de gravedad del cuerpo. Cuando el cuerpo libre está conectado por varias partes, las fuerzas que dichas partes ejercen entre sí no deben incluirse entre las fuerzas externas. Siempre que se considere completo al cuerpo libre, son fuerzas internas.
3. Las magnitudes y las direcciones de las fuerzas externas que son conocidas deben señalarse con claridad en el diagrama de cuerpo libre. Cuando se indican las direcciones de dichas fuerzas, se debe recordar que éstas son las ejercidas sobre, y no por el cuerpo libre. Por lo general, las fuerzas externas conocidas incluyen el peso del cuerpo libre y las fuerzas aplicadas por el cuerpo libre a otros cuerpos.
4. Las fuerzas externas desconocidas consisten en las reacciones a través de las cuales el suelo y otros cuerpos se oponen al movimiento del cuerpo libre. Las reacciones se indican por flechas en la misma posición y por esa razón algunas veces reciben el nombre de fuerzas de restricción. Las reacciones se ejercen en los puntos donde el cuerpo libre está apoyado o conectado a otros cuerpos y deben indicarse con claridad. Las reacciones se indican con las flechas de reacciones 4.3 y 4.4.

El diagrama de cuerpo libre es una herramienta útil para resolver problemas de fuerzas. Sin embargo, para poder usarlo correctamente se debe seguir las reglas siguientes:



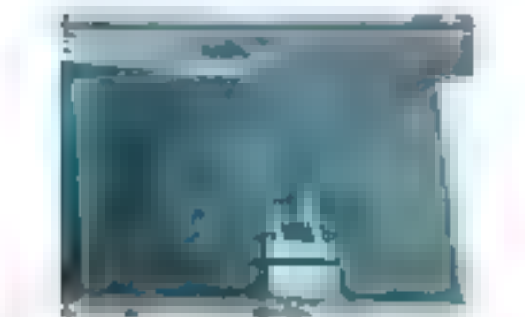
Fotografía 4.1 Un diagrama de cuerpo libre del tractor que se muestra en la foto incluyera todas las fuerzas externas que actúan sobre él: el peso del tractor, el peso de la carga en la pala y las fuerzas ejercidas por el suelo sobre las ruedas.



Fotografía 4.2 En el capítulo 6 se explicará cómo determinar las fuerzas externas en estructuras hechas de varias piezas conectadas como las fuerzas en los elementos que soportan la pala del tractor de la fotografía 4.1.



Fotografía 4.3 Cuando el estabón del mecanismo de apertura del toldo para ventana se extiende, la fuerza que éste ejerce sobre el deslizador produce una fuerza normal aplicada sobre la barra, lo que causa que el toldo se abra.



Fotografía 4.4 El apoyo oscilatorio del estrado montado, que se muestra en la fotografía, se usa para apoyar el camino sobre un puente.



Fotografía 4.5 Se muestra la expansión del apoyo oscilatorio de un puente con plataformas de trapes. La superficie convexa del oscilador le permite al apoyo de la bodega moverse en forma horizontal.

EQUILIBRIO EN DOS DIMENSIONES

4.3. REACCIONES EN LOS PUNTOS DE APOYO Y CONEXIONES DE UNA ESTRUCTURA BIDIMENSIONAL

En la primera parte de este capítulo se considera el equilibrio de una estructura bidimensional, esto es, se supone que la estructura puede estar en equilibrio y las fuerzas aplicadas sobre la misma actúan en el mismo plano. De esta manera, para las reacciones, los puntos de apoyo y las conexiones de una estructura en la misma posición también están contenidos en el mismo plano.

Las reacciones ejercidas sobre una estructura bidimensional pueden ser determinadas en los grupos que corresponden a tres tipos de apoyos: puntos de apoyo o conexiones:

1. **Reacciones equivalentes a una fuerza con una línea de acción conocida.** Los apoyos y las conexiones que originan reacciones de este tipo incluyen rodillos, balancines, superficies sin fricción, estabones o hondas y cables cortos, collarines sobre barras sin fricción y pernos sin fricción en ranuras lisas. Cada uno de estos apoyos y conexiones pueden impedir el movimiento sólo en una dirección. Los apoyos mencionados anteriormente producen las reacciones que se muestran en la figura 4.1. Cada una de estas reacciones se reduce a una sola fuerza, cuya magnitud y dirección debe indicarse; dicha magnitud debe representarse con una letra apropiada. La línea de acción de la reacción es conocida y debe indicarse con una flecha en el diagrama de cuerpo libre. El sentido de la reacción debe ser como se muestra en la figura 4.1 para los casos de una superficie sin fricción hacia el cuerpo libre o en cualquier otro sentido del cuerpo libre. La reacción puede estar dirigida en uno u otro sentido en el caso de rodillos de doble canal, eslabones, collarines sobre barras y pernos en ranuras. Por lo general, los rodillos de un canal y los balancines son reversibles y por tanto las reacciones correspondientes también pueden estar dirigidas en uno u otro sentido.
2. **Reacciones equivalentes a una fuerza de magnitud y dirección desconocidas.** Los apoyos y las conexiones que originan reacciones de este tipo incluyen pernos sin fricción en orificios ajustados, articulaciones o bisagras y superficies rugosas. Estos pueden impedir la traslación del cuerpo rígido en todas direcciones pero no pueden impedir la rotación del cuerpo con respecto a la conexión. Las reacciones de este grupo pueden ser *unidas* o *desunidas*, que usualmente se representan por sus componentes x y y . En el caso de una superficie rugosa la componente perpendicular a la superficie debe dirigirse alejándose de ésta.
3. **Reacciones equivalentes a una fuerza y un par.** Estas reacciones se originan por **apoyos fijos**, los cuales se oponen a cualquier movimiento del cuerpo libre y por tanto, lo restringen por completo. Los soportes fijos producen fuerzas sobre toda la superficie de contacto; sin embargo, estas fuerzas forman un sistema que se puede reducir a una fuerza y un par. Las reacciones de este grupo se ven en la **figura 4.2**, las cuales consisten en las dos componentes de la fuerza y el momento del par.

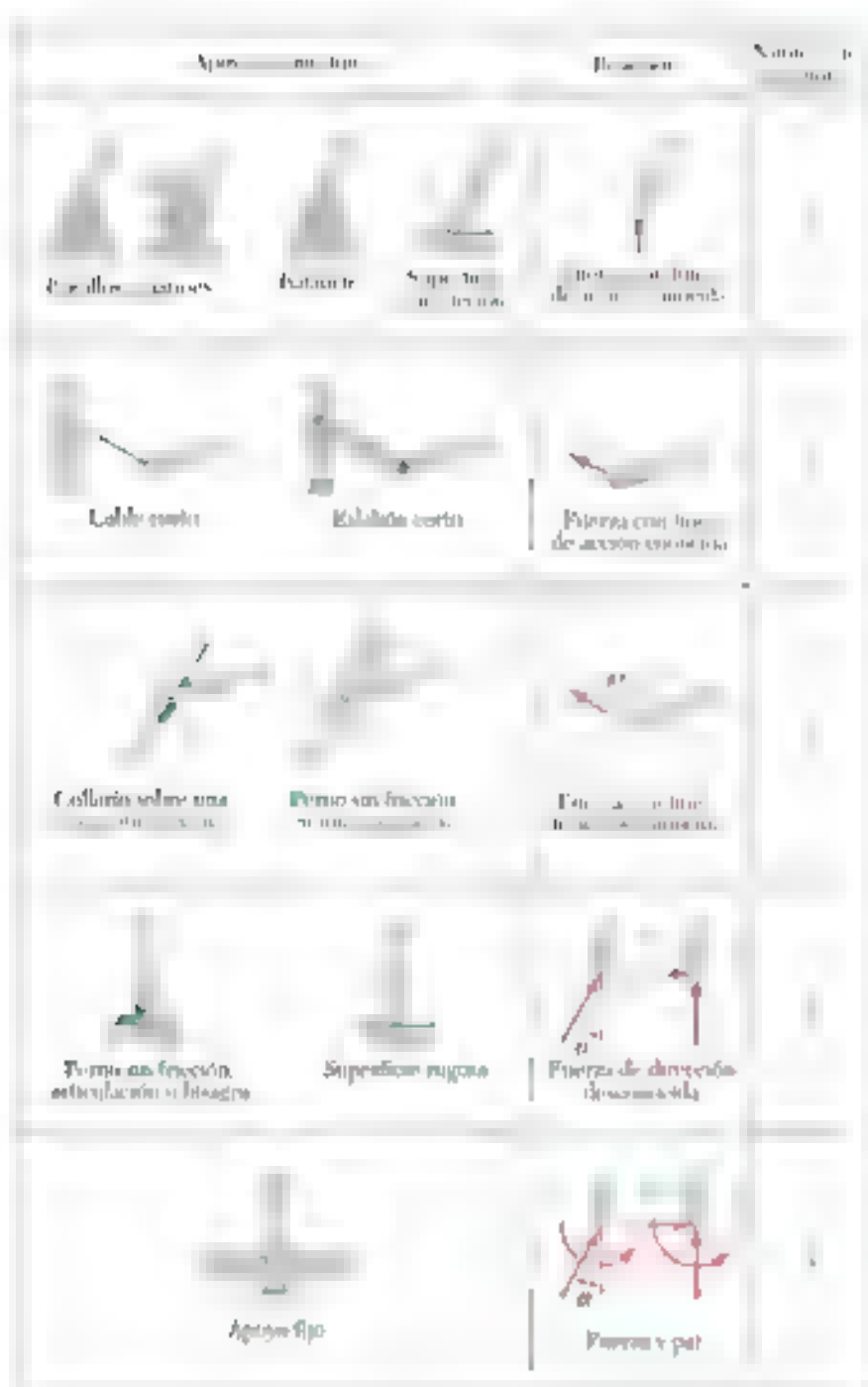


Figura 4.1 Reacciones en apoyos y conexiones.

Como se verá, el sentido de una fuerza o un par desconocido no es relevante, ya se resolverá antes de determinarlos. En lugar de eso, se asignará a cada una de ellas el sentido de la fuerza o par, y el signo de la suposición obtenida indicará si la respuesta fue correcta o no.

ecuación de equilibrio. De esta forma, el sistema de ecuaciones de equilibrio es

$$\sum F_x = 0 \quad \sum M_A = 0 \quad \sum M_B = 0 \quad (4.5)$$

Así como el punto A con respecto al A , se suman los momentos con este punto, el punto B no puede estar ubicado en la línea paralela al eje y que pasa a través del punto A (figura 4.5). Estas ecuaciones son suficientes suficientes para encontrar el sistema de fuerzas. Las ecuaciones de equilibrio son suficientes para encontrar las fuerzas externas debiendo reducirse a una sola fuerza F en el punto A y un momento M en el punto B que el momento de esta fuerza sea igual a cero con respecto al punto B , el cual no está sobre su línea de acción, la fuerza debe ser igual a cero y el cuerpo rígido está en equilibrio.

Un tercer posible conjunto de ecuaciones de equilibrio es

$$\sum M_A = 0 \quad \sum M_B = 0 \quad \sum M_C = 0 \quad (4.6)$$

Los puntos A , B y C no son colineales (figura 4.2b). La primera ecuación requiere que las fuerzas externas se reduzcan a una sola fuerza F la segunda ecuación requiere que la fuerza F pase a través de B y la tercera ecuación requiere que F pase a través de C . Como los puntos A , B y C no son colineales, la fuerza debe ser igual a cero y el cuerpo rígido está en equilibrio.

La ecuación $\sum M_A = 0$, la cual expresa que la suma de los momentos de las fuerzas externas con respecto al punto A es igual a cero, es una ecuación de equilibrio debida que acompaña a las otras dos ecuaciones (4.4). Estas expresiones matemáticas similares de momentos pueden usarse con respecto a puntos que los puntos A , B y C no están alineados. Sin embargo, los momentos son los desequilibrios que las fuerzas producen de las ecuaciones de equilibrio no está establecida. Sin embargo, la ecuación $\sum M_A = 0$ es la única ecuación de equilibrio que contiene una sola incógnita, puesto que las reacciones son la reacción de equilibrio. Sin embargo, es posible utilizar ecuaciones de equilibrio para encontrar las reacciones de equilibrio con respecto a los puntos A , B y C si se sabe que las fuerzas de reacción son perpendiculares a las líneas de acción de las fuerzas de reacción. Si las reacciones son perpendiculares a las líneas de acción de las fuerzas de reacción, es una ecuación común. En el ejemplo de la figura 4.3, una ecuación de equilibrio construida se muestra por el dibujo en A y B por los momentos con respecto a los puntos A y B que la ecuación se con la suma de las componentes x . Las reacciones en A y D se obtienen al sumar momentos con respecto a C y las reacciones en B y E sumando momentos con respecto a D . Las ecuaciones obtenidas son

$$\sum F_x = 0 \quad \sum M_C = 0 \quad \sum M_D = 0$$

Cada una de estas ecuaciones contiene una sola incógnita.

4.5 REACCIONES ESTÁTICAMENTE INDETERMINADAS RESTRICCIONES PARCIALES

En los dos ejemplos caracterizados en la sección anterior (figuras 4.2 y 4.3), los tipos de apoyos usados fueron tales que era imposible que el cuerpo rígido se moviera hacia la acción de las fuerzas dadas el punto A que el punto A es un punto de carga F y el punto B es un punto de carga F . El cuerpo rígido tiene restricción completa. También se debe tener en cuenta

www.geocienciasvirtuales.blogspot.com.co

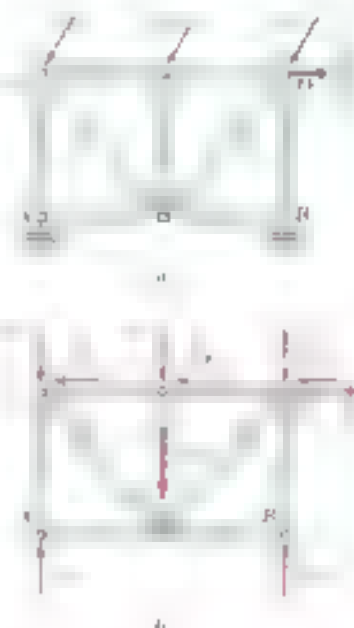


Figura 4.3

B y E. A pesar de que existan restricciones simétricas A, B y E (Figura 4.5b), la ecuación $\sum F_x = 0$ no se cumple, ya que los que la sustentan sus componentes horizontales de las fuerzas que pesan y sostienen igual a cero. Aunque hay un número suficiente de restricciones, éstas no están bien distribuidas para impedir que el sistema se desplace horizontalmente, o gire alrededor de un eje. Por eso, este sistema puede considerarse como *impropiamente restringido*. Como solo existen las restricciones no equilibradas que determinan tres incógnitas, las reacciones serán estáticamente indeterminadas. Por tanto, las restricciones impropias también producen indeterminación estática.

Otro ejemplo de restricciones impropias —y de indeterminación estática— lo proporciona el cuerpo rígido en la Figura 4.5c, en el cual el sistema está soportado por un pivote en A y por rodillos en B y C, pero en conjunto no incluyen cuatro integrales. Como sólo se dispone de tres ecuaciones de equilibrio independiente, los reacciones en los apoyos son estáticamente indeterminadas. Por otro lado, obsérvese que no se puede cumplir la ecuación $\sum M_A = 0$ (aplicando las ecuaciones de equilibrio para las fuerzas horizontales en las articulaciones B y C, para la fuerza de A, formamos la ecuación $\sum F_x = 0$ para determinar antes de A y, por ende, está impropriadamente restringida).

Las ecuaciones de las “grupos de los 4” conducen a la conclusión de que *no se puede lograr la independencia de los miembros de un sistema estructural, ya que los efectos de los miembros que sustentan y son sustentados, y por ende, están impropriadamente restringidos*.

Por lo tanto, para asegurarse de que un cuerpo rígido no está restringido impropriadamente, es necesario que las restricciones —sus apoyos— sean estáticamente determinadas, se debe considerar las reacciones como fuerzas de reacción independientes, por lo que se aplican las ecuaciones de equilibrio. Si no se puede aplicar las ecuaciones de equilibrio en tres o paralelas.

Las fuerzas que sustentan los miembros están con los rodillos, rígidamente, de modo que se puede considerar el efecto de las restricciones como un momento de los rodillos, por lo que se debe considerar que el análisis de estructuras con restricciones estáticamente indeterminadas se realiza con el método de los momentos de la estructura. Por ejemplo, en el caso de un cuerpo rígido en la Figura 4.6, las sumatorias de las reacciones en A, B se obtienen con el uso de las ecuaciones de equilibrio.

Por razones obvias, los apoyos que originan restricciones parciales o impropias se deben evitar en el diseño de estructuras y edificios. Sin embargo, una estructura restringida puede ser parcial o total, que no necesariamente se satisfacen las normas, condiciones de diseño, particularmente se deben mantener el equilibrio. Por ejemplo, las rampas en los edificios (Fig. 4.7) están en equilibrio, las fuerzas aplicadas P, Q y S son canceladas. Aunque las restricciones son las que convierten a una estructura en una estructura restringida, por lo tanto, un cuerpo rígido puede ser una estructura restringida si se le permite de una estructura rígida por tener sus frenos aplicados en forma permanente.

La rotación de la armadura con respecto a A requiere algo de “purga” en los apoyos en B y C. En la práctica siempre estará dada la purga. Además, se observa que el “purga” es suficiente, independientemente de los ejes B y C, y por tanto, las distancias desde A hacia los ejes de acción de las reacciones B y C, también serán pequeñas. Así, la ecuación $\sum M_A = 0$ muestra que B y C son los ejes de acción de las reacciones.

Debido a que esta situación surge por un arreglo o geometría tan flexuosa de los apoyos, conjuntamente se hace referencia a la armadura como *estructura restringida*.



Figura 4.5

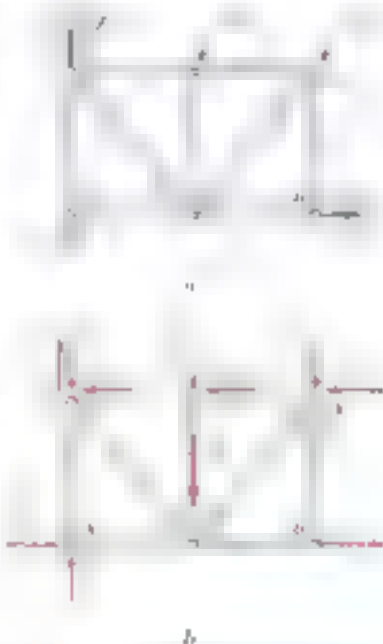


Figura 4.7



se obtienen sus respectivos pesos, es decir, 9 510 N o 9,51 kN y 23 540 N o 23,54 kN. En cualquier caso, para A y B se debe tener en cuenta que el peso de cada uno de ellos es el peso de la propia P más el de la carga que se le está aplicando en la carga que se le está aplicando. Se sabe que el peso de A y B es el mismo, es decir, 9 510 N o 9,51 kN.

$$+ 75 \text{ N} = 0; \quad + 6(1.5 \text{ m}) - (9.81 \text{ kN})(2 \text{ m}) - (23.5 \text{ kN})(6 \text{ m}) = 0$$

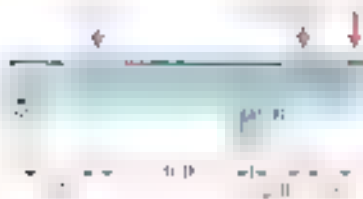
Determinación de A_1 . La magnitud de A_1 se determina con la suma de las compuestas totales de los datos de cada estación en el tiempo $t_{\text{máx}}$:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0 \\ A_1 + 167.1 \text{ kN} &= 0 \\ A_1 &= -167.1 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$P(x) = \frac{1}{14} [x^4 - 8x^3 + 15x^2 - 8x + 1]$$

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0: & \quad A_y + 0.51 \text{ kN} - 23.5 \text{ kN} = 0 \\ & \quad A_y = +22.9 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$+ \Sigma M_A = -9811 \text{ kN} (2 \text{ m}) - (21.5 \text{ kN})(6 \text{ m}) + (107.1 \text{ kN})(15 \text{ m}) = 0$$



PROBLEMA RESUELTO 4.2

Se aplican tres cargas a una viga como se muestra en la figura. La viga se apoya en un rodillo en A y en un perno en B. Sin tomar en cuenta el peso de la viga, determine las reacciones en A y B cuando $P = 15$ kips.



SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Se dibuja un diagrama de cuerpo libre de la viga. Las reacciones en A son B_x y B_y . La reacción en B se representa con una componente B_y . Se supone que cada componente de reacción actúa en la dirección mostrada en la figura.

Ecuaciones de equilibrio. Se escriben las tres ecuaciones de equilibrio siguientes y se resuelven para las reacciones verticales.

$$+\sum F_x = 0; \quad B_x = 0 \quad B_y = 0$$

$$+\sum M_A = 0 \\ (15 \text{ kips})(13 \text{ ft}) + B_y(9 \text{ ft}) - (8 \text{ kips})(11 \text{ ft}) - (6 \text{ kips})(13 \text{ ft}) = 0 \\ B_y = +21.0 \text{ kips} \quad B_x = 2.00 \text{ kips}$$

$$+\sum M_B = 0 \\ (19 \text{ ft}) + (15 \text{ kips})(6 \text{ ft}) - (6 \text{ kips})(2 \text{ ft}) - (6 \text{ kips})(4 \text{ ft}) = 0 \\ A = +6.00 \text{ kips} \quad A = 6.00 \text{ kips}$$

Comprobación. Se comprueban los resultados sumando las componentes verticales de todas las fuerzas externas.

$$+\uparrow \sum F_y = +6.00 \text{ kips} + 15 \text{ kips} + 21.0 \text{ kips} - 8 \text{ kips} - 6 \text{ kips} = 0$$

Observación. En este problema las reacciones en A y B son verticales; sin embargo, los casos de la anterior son diversos. En A la viga se apoya en un rodillo; por tanto, la reacción no puede tener una componente horizontal. En B la viga se apoya en un perno; la reacción puede tener una componente horizontal, a que se debe cumplir la ecuación de equilibrio $\sum F_x = 0$ y a que ninguna de las otras fuerzas que actúan sobre la viga tiene una componente horizontal.

A primera vista se hubiera podido observar que la reacción en B era vertical y se podría haber omitido la componente horizontal B_x . Sin embargo, en la práctica no es conveniente. Al seguirse, se corre el riesgo de olvidar la componente B_x cuando las condiciones de carga requieren su presencia (esto es, cuando se incluye una carga horizontal). Además, se encontró que la componente B_x es igual a cero utilizando y resolviendo una ecuación de equilibrio, $\sum F_x = 0$. Al dar por hecho que B_x es igual a cero, es posible no prever el caso de que en realidad se ha hecho uno de estos errores y, por tanto, se podría haber cometido un error en la solución del problema.



PROBLEMA RESUELTO 4.3

Un carrito de carga se encuentra en reposo sobre un carril que forma un ángulo de 25° con respecto a la vertical. El peso total del carrito y su carga es de 5500 lb . Se desea conocer el punto en el carril al que se encuentra el centro de gravedad del carrito y su carga, para poder determinar la tensión en el cable y la reacción en cada par de ruedas. El cable está unido a éste en un punto que se encuentra a 24 ft del carril. Determine la tensión en el cable y la reacción en cada par de ruedas.



SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Se dibuja el diagrama de cuerpo libre del carrito. Las reacciones en cada una de las ruedas se denominan R_1 y R_2 y se supone que actúan perpendicularmente al carril. La tensión T es paralela al carril. Por conveniencia se selecciona al eje x paralelo al carril y al eje y perpendicular al carril. Las fuerzas se descomponen en sus componentes x y y .

$$W_x = +(5500 \text{ lb}) \cos 25^\circ = +4990 \text{ lb}$$

$$W_y = -(5500 \text{ lb}) \sin 25^\circ = -2320 \text{ lb}$$

Se toma como momento con respecto a A la componente T_x y R_1 de las reacciones.

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0: -(2320 \text{ lb})(25 \text{ m}) - (4990 \text{ lb})(5 \text{ m}) + R_1(50 \text{ m}) = 0$$

$$R_1 = +1754 \text{ lb}$$

Ahora, tomando momentos con respecto a B para eliminar a T_x y a R_1 de las ecuaciones se escribe:

$$+\circlearrowleft \Sigma M_B = 0: (2320 \text{ lb})(25 \text{ m}) - (4990 \text{ lb})(10 \text{ m}) + R_2(50 \text{ m}) = 0$$

$$R_2 = +362 \text{ lb}$$

El valor de T se obtiene a partir de:

$$+\circlearrowleft \Sigma F_x = 0: +980 \text{ lb} - T = 0$$

$$T = +980 \text{ lb}$$

Los valores encontrados para las reacciones se muestran en el diagrama adjunto.

Comprobación: Para corroborar los cálculos se escribe:

$$+\circlearrowleft \Sigma F_y = +562 \text{ lb} + 1754 \text{ lb} - 2320 \text{ lb} = 0$$

También puede verificarse la solución calculando los momentos con respecto a cualquier punto distinto de A o de B .





PROBLEMA RESUELTO 4.4

El marco mostrado en la figura sostiene una parte del techo de un pequeño edificio. Se sabe que la tensión en el cable es de 150 kN; determine la reacción en el extremo fijo E.

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Se dibuja el diagrama de cuerpo libre del marco y del cable. El cable se representa con las componentes de fuerza E_x y E_y y por el par M_E . Las otras fuerzas que actúan sobre el diagrama de cuerpo libre son las cuatro cargas de 20 kN y la fuerza de 150 kN ejercida en el extremo F del cable.

El cable se representa por el par M_E y las componentes de fuerza E_x y E_y en E. Se sabe que $EF = 4.5 \text{ m}$ y $EH = 3.6 \text{ m}$ se escribe:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0; \quad E_x + \frac{4.5}{3.6}(150 \text{ kN}) &= 0 \\ E_x &= -187.5 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} +\uparrow \sum F_y = 0; \quad E_y - 4(20 \text{ kN}) - \frac{3.6}{4.5}(150 \text{ kN}) &= 0 \\ E_y &= +200 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} +\curvearrowright \sum M_E = 0; \quad (20 \text{ kN})(7.2 \text{ m}) + (20 \text{ kN})(5.4 \text{ m}) + (20 \text{ kN})(3.6 \text{ m}) \\ + (20 \text{ kN})(1.8 \text{ m}) - \frac{3.6}{4.5}(150 \text{ kN})(4.5 \text{ m}) + M_E &= 0 \\ M_E &= +150.0 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad M_E = 150 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$



PROBLEMA RESUELTO 4.5

Un peso de 40 lb se une a la palanca mostrada en la figura en el punto A. La constante del resorte BC es $k = 250 \text{ lb/in.}$ y éste no se encuentra deformado cuando $\theta = 0$. Determine la posición de equilibrio.

SOLUCIÓN

Diagrama del cuerpo libre. Se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la palanca junto al edificio. Represente con s la elongación del resorte partir de la posición en que éste no se encuentra deformado y observe que $s = r\theta$ se tiene que $F = ks = k r\theta$.

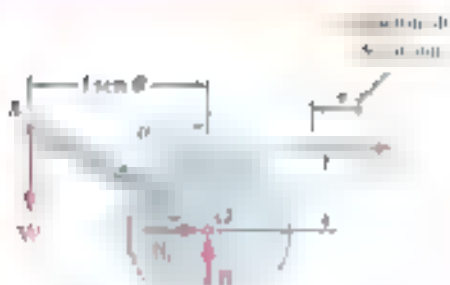
El momento de la fuerza F alrededor del punto O es M_F . El momento de la fuerza W con respecto a O, se escribe:

$$\sum M_O = 0; \quad (40 \text{ lb})(3 \text{ m}) \sin \theta - (k r \theta)(1 \text{ m}) = 0 \quad \sin \theta = \frac{r}{3} \theta$$

Substituya los datos. La ecuación resultante es con proporciones se obtiene:

$$\sin \theta = \frac{(250 \text{ lb/in.})(1 \text{ m})}{(40 \text{ lb})(3 \text{ m})} \theta \quad \sin \theta = 0.714 \theta$$

Al resolver por prueba y error se encuentra $\theta = 0 \quad \theta = 18.3^\circ$





Se ve que las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo rigido que se analiza han producido los mismos efectos producidos por las fuerzas internas produciendo el equilibrio la primera tarea consiste en hallar la *forma correcta en que deben* ser distribuidos tanto razonable en el caso se muestran todas las fuerzas externas. Se deben incluir tanto las fuerzas conectivas como las desconectivas.

Para el caso de la figura 4. Las reacciones en los apoyos pueden hallarse adivinando las segundas la suma de los momentos sobre los apoyos debe ser igual a cero. Un diagrama de cuerpo libre es esencial para resolver de una manera correcta un problema. No mease a la continua en la solución de un problema hasta que no se esté segura de que en el diagrama de cuerpo libre están presentes todas las cargas, las fuerzas de reacción y el peso. Recuerde que cuando se dibuje un cuerpo libre.

En el caso de la figura 4. se puede resolver las siguientes ecuaciones de equilibrio. Las tres ecuaciones siguientes son:

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum M_A = 0$$

Sin embargo, existen varios conjuntos de ecuaciones que se pueden escribir tales como:

$$\sum F_x = 0 \quad \sum M_A = 0 \quad \sum M_B = 0$$

donde el punto B se selecciona de manera que la línea AB no sea colineal con F_x y F_y .

$$\sum M_A = 0 \quad \sum M_B = 0 \quad \sum M_C = 0$$

donde los puntos A, B y C no se encuentran sobre una línea recta.

Las ecuaciones de equilibrio se resalta comúnmente utilizando la suma de los momentos sobre los puntos de apoyo. Se presentan a continuación algunas sugerencias acerca de las al caso en consideración.

1. Si el cuerpo rígido es un cuerpo rígido el punto de apoyo de las barras de unión de las fuerzas desconectadas se define un cuerpo rígido que tiene una sola incógnita.

2. Si el cuerpo rígido es un cuerpo rígido el punto de apoyo de las barras de unión de las fuerzas desconectadas se define un cuerpo rígido que tiene una sola incógnita.

3. Si el cuerpo rígido es un cuerpo rígido el punto de apoyo de las barras de unión de las fuerzas desconectadas se define un cuerpo rígido que tiene una sola incógnita.

የሕገ መንግሥቱ አንቀጽ 100 ስር፣ የሕግ አፈጻጸም ሚኒስቴር፣ የሕግ አፈጻጸም ቦርድ፣ የሕግ አፈጻጸም ቦርድ ማኅበራዊ ትቅክርና የሕግ አፈጻጸም ቦርድ ማኅበራዊ ትቅክር ይኖራል።

donos sem o *teste* a não *testemunhado*. Ali quer se procura cada dia para obter os melhores resultados possíveis de *determinados* testes.

[illegible]

Problemas

4.1 Un tractor de 2100 lb se utiliza para levantar 900 lb de grava. Determine la reacción en las *a)* Ruedas traseras *A* *b)* Ruedas delanteras *B*



Figura P4.1

4.2 El agricultor que se muestra en la figura desea transportar una bolsa de 250 N de fertilizante al mismo tiempo que la fuerza que se requiere en la rueda trasera.



Figura P4.2

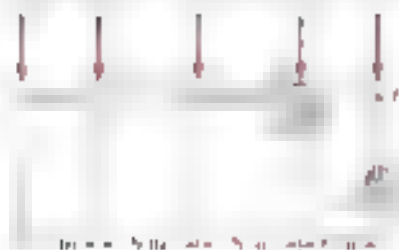


Figura P4.3

4.3 La primera del problema 4.2 desea transportar una segunda bolsa de 250 N de fertilizante al mismo tiempo que la primera. Determine la máxima distancia horizontal necesaria desde la rueda trasera para que la carreta pueda sostener las dos bolsas. ¿Cuánta distancia puede cargar 75 N con cada brazo?

4.4 Para la viga y las cargas mostradas en la figura, determine *a)* la reacción en *A* *b)* la reacción en *B*

4.5 Dos cajas, cada una con una masa de 350 kg, se colocan en la parte trasera de una camioneta de 1400 kg como se muestra en la figura. Determine las reacciones en las *a*) llantas traseras *A* y *b*) llantas delanteras *B*.

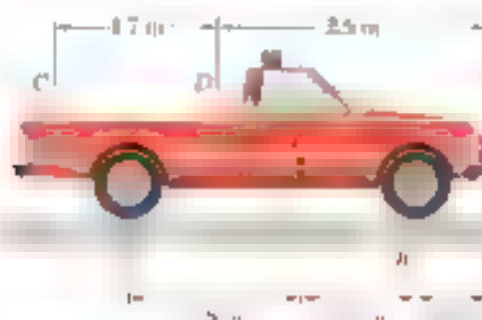


Figura P4.5

4.6 Retorne el problema 4.5, y ahora suponga que la caja *D* se retira y que la posición de la caja *C* permanece inalterada.

4.7 Una ménsula en forma de T sostiene las cuatro cargas mostradas. Determine las reacciones en *A* y *B* si $a = 10$ in., $b = 7$ in.

4.8 Para la ménsula y las cargas del problema 4, determine la distancia mínima a si la ménsula no debe moverse.

4.9 El valor máximo permisible para cada una de las reacciones es de 150 N. Sin tomar en cuenta el peso de la viga, determine el rango de valores de la distancia d para los cuales la viga es segura.

4.10 Retorne el problema 4.9, y ahora suponga que la carga de 50 N se sustituye por una carga de 80 N.

4.11 Para la viga del problema resuelto 4.3, determine el rango de valores de P para los cuales la viga es segura si el valor máximo permisible para cada una de las reacciones es de 30 kips y que la reacción en *A* debe estar dirigida hacia arriba.

4.12 La viga *AB* de 10 m descansa sobre los apoyos *C* y *D*, pero no está unida a ellos. Si se desprecia el peso de la viga, determine el rango de valores de P para los cuales la viga permanecerá en equilibrio.

4.13 El máximo valor permisible de cada una de las reacciones es de 50 kN y el peso máximo de la viga es de 10 kN. Si se desprecia el peso de la viga, determine el rango de valores de P para los cuales la viga es segura.

4.14 Para la viga y las cargas mostradas, determine el rango de valores de la distancia a para los cuales la reacción en *B* no excede 80 kN hacia arriba ni 50 kN hacia arriba.



Figura P4.14

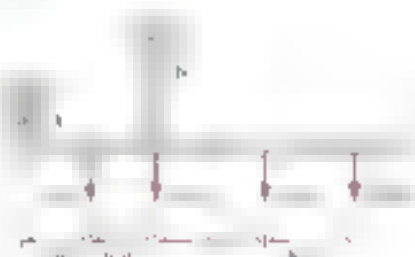


Figura P4.7

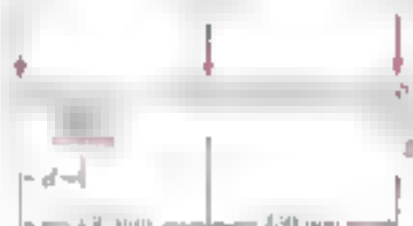


Figura P4.9

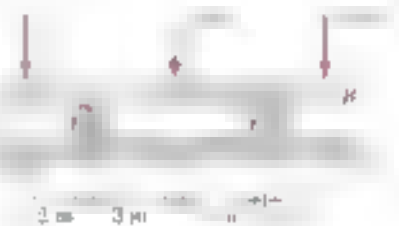


Figura P4.12 y P4.13

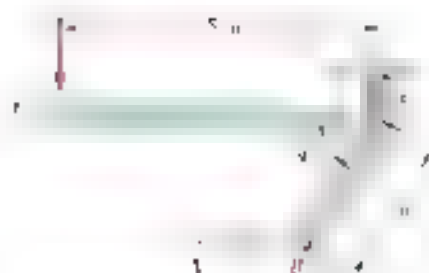


Figura P4.17 y P4.18

4.15 Las vigas AB y DE están conectadas mediante una manivela de compaña como se muestra en la figura. Si se sabe que la tensión en el cable AB es de 720 N , determine a la tensión en el cable DE , b la reacción en C .



Figura P4.15 y P4.16

4.16 Las vigas AB y DE están conectadas mediante una manivela de compaña como se muestra en la figura. Determine la fuerza máxima que puede ejercer con seguridad el cable AB sobre la manivela de compaña si el máximo valor permisible para la reacción en C es de 1500 N .

4.17 La manivela articulada en A y B es de 200 lb . Determine la fuerza máxima P que se puede aplicar sobre el punto D de la manivela articulada en C .

4.18 Determine la máxima carga que puede soportar el cable AB si la reacción en C no debe exceder de 1500 N .

4.19 La manivela BCD está articulada en C y se une a una barra de control en B . Para la carga mostrada, determine a la tensión en el cable y b la reacción en C .



Figura P4.19

4.20 Retorne el problema 4.19, y ahora suponga que $a = 0.32 \text{ m}$.

4.21 Determine las reacciones en A y B cuando $a) h = 0$, $b) h = 200 \text{ mm}$.



Figura P4.21

4.22 Las barras y las cables mostrados determinen las reacciones en A y E cuando a) $\alpha = 30^\circ$ b. $\alpha = 45^\circ$

4.23 y 4.24 Para cada una de las plantas se muestran algunas de las reacciones en A y B.



Figura P4.22



Figura P4.23

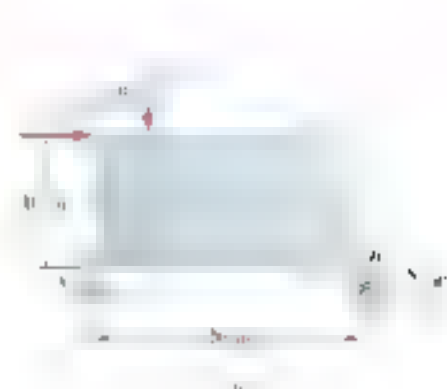


Figura P4.24

4.25 Determine las reacciones en A y B cuando a) $\alpha = 0^\circ$ b) $\alpha = 90^\circ$ y c) $\alpha = 30^\circ$

4.26 La barra AB que se muestra en la figura es una barra homogénea de peso $P_1 = 100$ N y se soporta en A y B. Si se sabe que $d = 200$ mm, determine a) la tensión en el cable BD, b) la reacción en A.

4.27 Una varilla AB que está articulada en A y se encuentra sujeta al cable BD en B, soporta las cargas que se muestran en la figura. Si se sabe que $d = 150$ mm, determine a) la tensión en el cable BD, b) la reacción en A.

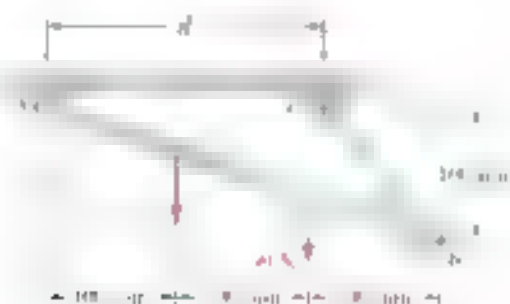


Figura P4.26 y P4.27

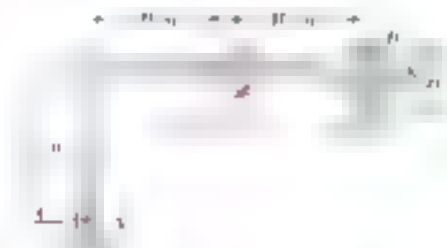


Figura P4.25

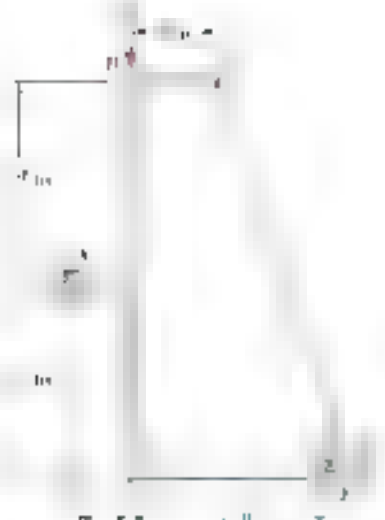


Figura P4.29

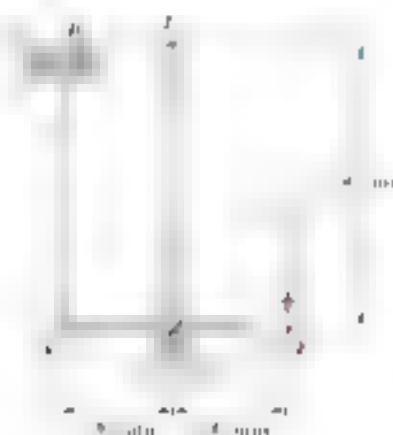


Figura P4.30



Figura P4.31 y P4.32

4.26 La palanca AB está articulada en C y se encuentra sostenida a un cable que está anclado en A . Si la palanca se somete a una fuerza horizontal en B de 400 N , determine $a)$ la tensión en el cable y $b)$ la reacción en C .

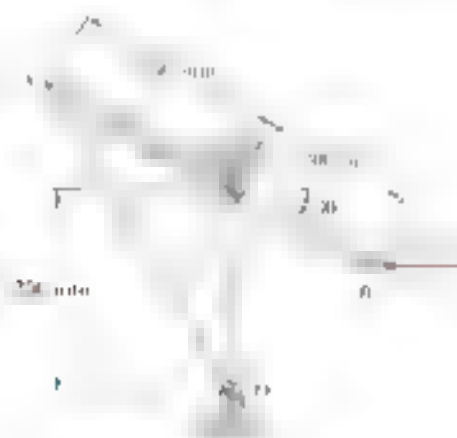


Figura P4.28

4.29 Se aplica una fuerza P con magnitud de 300 lb al elemento ABC . Dado que se asume que hay un pasador en B y en C , A y por consiguiente en A (véase Fig. 4.29) como el cable pasa sobre una pequeña polea en E , se puede suponer que la tensión es la misma en los tramos CE y ED del cable. Para el caso en que $a = 3\text{ in.}$, determine $a)$ la tensión en el cable, $b)$ la reacción en A .

4.30 Sin tomar en cuenta la fricción, determine la tensión en el cable ABD y la reacción en el apoyo C .

4.31 La barra ABC está doblada en forma de un arco circular de radio R . Si se sabe que $\theta = 30^\circ$, determine la reacción $a)$ en B y $b)$ en C .

4.32 La barra ABC está doblada en forma de un arco circular de radio R . Si se sabe que $\theta = 60^\circ$, determine la reacción $a)$ en B y $b)$ en C .

4.33 Sin tomar en cuenta la fricción, determine la tensión en el cable ABD y la reacción en C cuando $\theta = 60^\circ$.

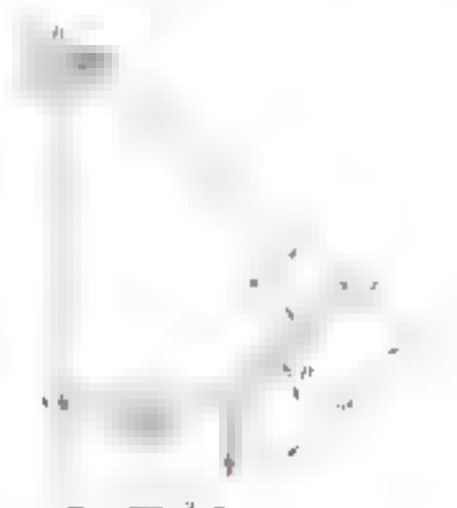


Figura P4.33 y P4.34

4.34 Sin tomar en cuenta la fricción, determine la tensión en el cable ABD y la reacción en C cuando $\theta = 45^\circ$.

4.35 Una barra ligera AD se sostiene mediante los cables sin fricción en B y C y descansa contra una pared sin fricción en A . Se aplica una fuerza vertical de 120 lb en D . Determine las tensiones en A , B y C .

4.36 Una barra ligera AD se encuentra suspendida de un cable BE y sostiene un bloque de 50 lb en C . Los extremos A y D de la barra están en contacto con paredes verticales sin fricción. Determine la tensión en el cable BE y las reacciones en A y D .

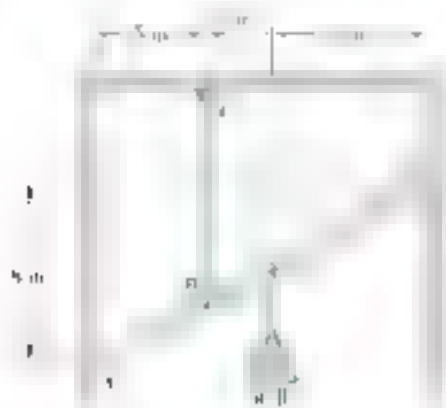


Figura P4.36

4.37 La barra AC soporta dos cargas de 400 N como se muestra en la figura. Los rodillos en A y B descansan sobre una superficie horizontal sin fricción. Determine la tensión en el cable BD y las reacciones en A y C .

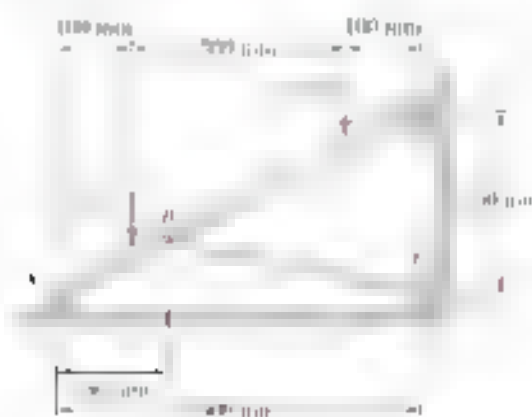


Figura P4.37

4.38 Determine la tensión en el cable BD y las reacciones en D .

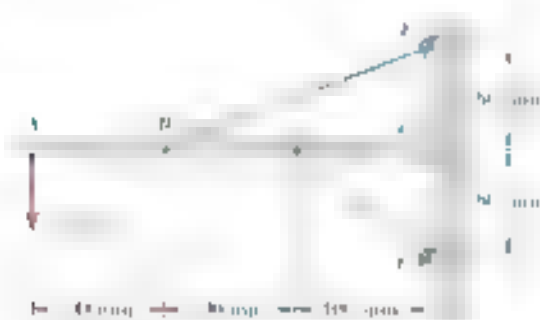


Figura P4.38



Figura P4.35

4.39 Se cortan dos ranuras en la placa DEF mostrada en la figura, y la placa se coloca de manera que las ranuras se ajusten a dos pasadizos Bjos simétricos en A y B. Si se sabe que $P = 15$ lb, determine a) la fuerza que ejerce cada pasador sobre la placa, b) la reacción en F.



Figura P4.39

4.40 Para cada valor de la fuerza P la reacción en F en S varía. ¿Cuál fuerza abajo, y su valor permisible máximo en lb, se debe seleccionar en los pasadizos de modo que se respeten los valores en F?

4.41 La fuerza AD se une en A y C a las collarines que pueden moverse libremente sobre las guías horizontales. Si la fuerza AB es una compresión de 400 lb, determine la fuerza y las reacciones en A y B.



Figura P4.41

4.42 Ahora resuelva el problema 4.41 si la cuerda BC se encuentra en un ángulo de 30° con la vertical.

4.43 Una masa de 8 kg puede sostenerse de las tres formas diferentes que se muestran en la figura. Si se sabe que los poleas tienen un radio de 100 mm, determine en cada caso las reacciones en A.



Figura P4.43

4.44 Muevamos una carga hacia a través del sistema de poleas mostrado en la figura, sobre ésta se mantiene una tensión de 5 lb. Si se sabe que el radio de cada polea es de 0.4 m, determine la reacción en C.

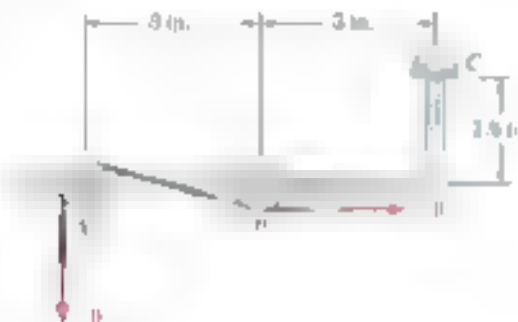


Figura P4.44

4.45 Retome el problema 4.44, y ahora suponga que se usan poleas con 0.5 m de radio.

4.46 Un poste telefónico de 6 m que pesa 1 000 N se usa para sostener los extremos de dos alambres. Los alambres forman con la horizontal los ángulos que se muestran en la figura y las tensiones en los alambres son respectivamente, $T_1 = 600$ N y $T_2 = 375$ N. Determine la reacción en el terreno fijo A.

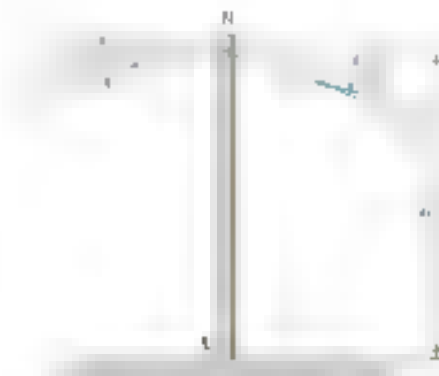


Figura P4.46

4.47 La viga AD soporta las cargas como lo indica la figura que se muestran en la figura. La viga se sostiene mediante un soporte fijo en D y por medio de un cable BF que está unido al contrapeso W. Determine la reacción en D cuando a) $W = 100$ lb b) $W = 300$ lb.

4.48 Para la viga y las cargas mostradas, determine el rango de valores de W para los que la magnitud del par en D no excede 40 lb · ft.



Figura P4.47 y P4.48

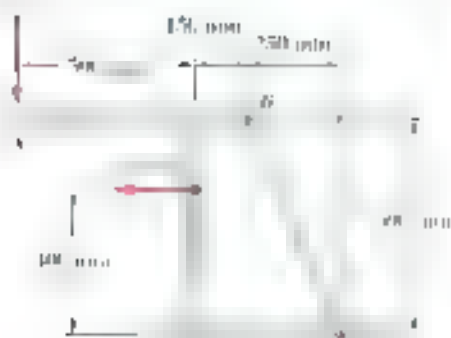


Figura P4.49 y P4.50



Figura P4.51



Figura P4.53

4.49 Si se sabe que la tensión en el alambre BD es de 1 kN , determine la reacción del bastidor mostrado en el apoyo fijo C .

4.50 Determine el rango de valores permisibles para la tensión en el alambre BD si la reacción del punto de apoyo en C no debe ser mayor que 1 kN .

4.51 Una carga vertical P se aplica en el extremo B de la barra BC . Después de que se suelta el alambre que sostiene B en su posición de equilibrio en términos de P , l y el coeficiente W . b) Determine el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio cuando $P = 2W$.

4.52 Una barra delgada AB con un peso W está unida a los bloques A y B los cuales pueden moverse libremente por las guías horizontales en la figura. Los bloques están unidos mediante una cuerda elástica que pasa sobre la polea en C . Expresar la tensión en la cuerda en términos de W y θ . Determine el valor de θ para el cual la tensión en la cuerda es igual a $2W$.



Figura P4.52

4.53 La barra AB se sujeta a la acción de un par M y a dos fuerzas, cada una de las cuales tiene una magnitud P . a) Obtenga una ecuación en términos de θ , P , M que se cumple cuando la barra está en equilibrio. b) Determine el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio cuando $M = 450\text{ N}$, $P = 200\text{ N}$ y $l = 600\text{ mm}$.

4.54 La varilla AB está unida a un collar en A que puede moverse libremente en C . a) Desprecie el peso de la varilla AB y obtenga una ecuación en términos de θ , P , Q , l y a que se cumple cuando la barra está en equilibrio. b) Determine el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio cuando $P = 16\text{ lb}$, $Q = 12\text{ lb}$, $l = 30\text{ in.}$ y $a = 5\text{ in.}$



Figura P4.54

Si varias fuerzas actúan en dos puntos A y B , las fuerzas que actúan en A pueden ser reemplazadas por su resultante \mathbf{F}_1 , y las de B por su resultante \mathbf{F}_2 , obteniéndose así un sistema de \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 que actúan en una sola línea de acción y en sentidos opuestos a las fuerzas que debían ser reemplazadas. En esta rigidez, las fuerzas que actúan anteriormente en dos puntos. Entonces, las resultantes \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 deben tener la misma magnitud, la misma línea de acción y sentidos opuestos (figura 4.6).

En el estudio de estructuras, mareas y máquinas se verá que saber identificar estos cuerpos sometidos a la acción de dos fuerzas simplifica la solución de ciertos problemas.

4.7 EQUILIBRIO DE UN CUERPO SUJETO A TRES FUERZAS

Un cuerpo de equilibrio puede ser de gran interés si el cuerpo rígido puede soportar las fuerzas que actúan en él. Se puede mostrar que si un cuerpo rígido está sujeto a tres fuerzas que actúan en tres puntos, el cuerpo rígido puede soportar un sistema de fuerzas que puede reducirse a tres fuerzas \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 y \mathbf{F}_3 , que actúan, respectivamente, en A , B y C (figura 4.7a). A continuación se demostrará que si un cuerpo está en equilibrio, las líneas de acción de las tres fuerzas deben ser concurrentes o paralelas.

Como el cuerpo rígido está en equilibrio, la suma de los momentos de \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 y \mathbf{F}_3 con respecto a cualquier punto debe ser igual a cero. Supóngase que las líneas de acción de \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 se intersectan y al representar su punto de intersección con D se tienen momentos con respecto a D (figura 4.7b). Como los momentos de \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 con respecto a D son iguales a cero, el momento de \mathbf{F}_3 con respecto a D también debe ser igual a cero y la línea de acción de \mathbf{F}_3 debe pasar a través de D (figura 4.7c). Por tanto, las tres líneas de acción son concurrentes. La otra posibilidad es la de que ninguna de las líneas de acción se intersectan; entonces, dichas líneas son paralelas.

Aunque los problemas relacionados con cuerpos sujetos a tres fuerzas se pueden resolver por medio de los métodos generales de las secciones 4.1 y 4.5, la propuesta que se analiza de equilibrio puede utilizarse para resolverlos en forma general y más rápida a partir de relaciones trigonométricas o geométricas simples.

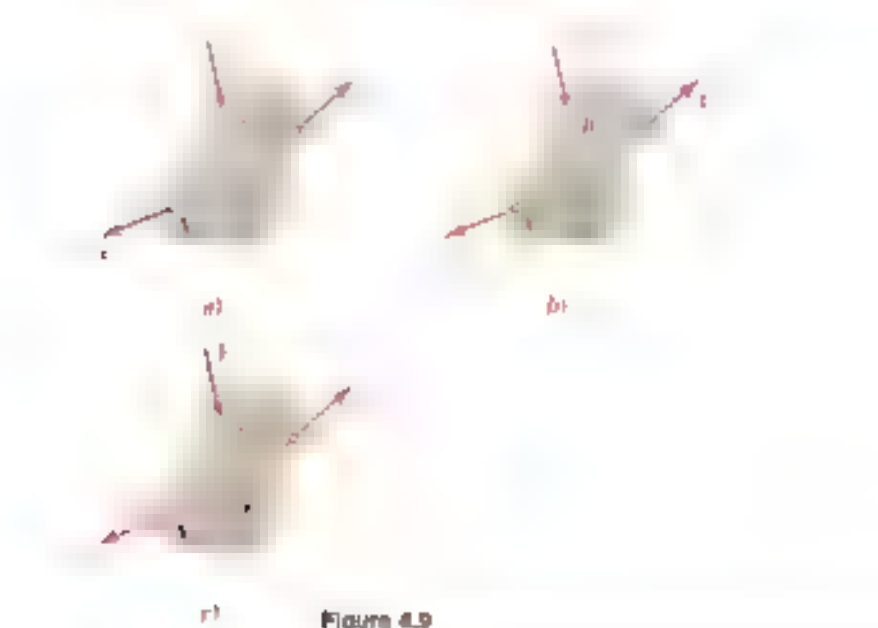


Figure 4.9



PROBLEMA RESUELTO 4.6

Un hombre levanta una viga de 10 kg y de 4 m de longitud tirando de una cuerda. Encuentre la tensión T en la cuerda y la reacción en A .

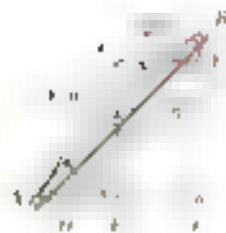
SOLUCION

Diagrama de cuerpo libre. La viga es un cuerpo sujeto a tres fuerzas: su peso W , la fuerza T ejercida por la cuerda y la reacción R en el pivote en A . Se muestra a continuación:



$$W = mg = 10 \text{ kg}(9.81 \text{ m/s}^2) = 98.1 \text{ N}$$

Cuerpo sujeto a tres fuerzas. Como la viga es un cuerpo sujeto a tres fuerzas, éstas al actuar deben ser concurrentes. Por tanto, la reacción R pasará a través del punto de intersección C de las líneas de acción del peso W y de la fuerza de tensión T . Para determinar la posición de este punto se prolonga la línea vertical BF a través de B y la línea horizontal CD a través de C . Se observa que:



$$AF = BF = AB \cos 45^\circ = 4 \text{ m} \cos 45^\circ = 2.828 \text{ m}$$

$$CD = EF = AE = \frac{1}{2}(AF) = 1.414 \text{ m}$$

$$BD = CD \cos 45^\circ + 25^\circ = 1.414 \text{ m} \tan 20^\circ = 0.515 \text{ m}$$

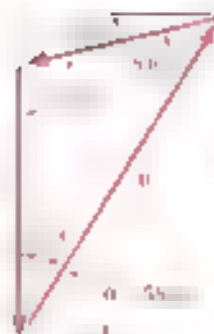
$$CE = BE - BD = 2.828 \text{ m} - 0.515 \text{ m} = 2.313 \text{ m}$$

Así, se encuentra:

$$\tan \alpha = \frac{CE}{AE} = \frac{2.313 \text{ m}}{1.414 \text{ m}} = 1.636$$

$$\alpha = 58.6^\circ$$

Diagrama de fuerzas. Las líneas de acción de las tres fuerzas concurren en el punto C , como se muestra a continuación:



Triángulo de fuerzas. Se dibuja un triángulo de fuerzas, como se muestra a continuación, en el que los ángulos interiores a partir de la ley de los senos se relacionan con las fuerzas. Así, como los ángulos de las fuerzas son:

$$\begin{array}{ccc} T & W & R \\ \sin 11.4^\circ & \sin 1.0^\circ & \sin 35.6^\circ \end{array}$$

$$T = 6.9 \text{ N}$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

Las secciones anteriores están relacionadas con dos tipos particulares de problemas de mecánica rígida.

1. El primer tipo de problema es el que se resuelve en forma independiente de las secciones anteriores. Las resultantes de las fuerzas que actúan en cada uno de estos puntos de apoyo son *las mismas en todos los casos*. En la práctica, esto se refiere a los puntos de apoyo de un cuerpo rígido. En la práctica, esto se refiere a los puntos de apoyo de un cuerpo rígido. En la práctica, esto se refiere a los puntos de apoyo de un cuerpo rígido.

2. El segundo tipo de problema es el que se resuelve en forma independiente de las secciones anteriores. Las resultantes de las fuerzas que actúan en cada uno de estos puntos de apoyo son *las mismas en todos los casos*. En la práctica, esto se refiere a los puntos de apoyo de un cuerpo rígido. En la práctica, esto se refiere a los puntos de apoyo de un cuerpo rígido. En la práctica, esto se refiere a los puntos de apoyo de un cuerpo rígido.

A pesar de que es bien conocido que no se puede en general encontrar una solución única de problemas que involucren cuerpos sometidos a la acción de tres fuerzas, puede ser difícil dibujar las construcciones geométricas necesarias. Se recomienda que los estudiantes dibujen un diagrama de cuerpo libre de cada uno de los cuerpos involucrados en el problema, y luego, usando los principios de la mecánica, se pueda encontrar la solución. En la práctica, esto se refiere a los puntos de apoyo de un cuerpo rígido.

Problemas



Figura P4.61 y P4.62

4.61 Determine las reacciones en A y B cuando $P = 150$ new.

4.62 Para la estructura y la carga mostradas, determine el rango de valores que P debe tener para que las reacciones en A y B no excedan 100 N.

4.63 Use el método de la sección 4.7 para resolver el problema 4.61.

4.64 Use el método de la sección 4.7 para resolver el problema 4.62.

4.65 La llave mostrada se usa para girar un eje. Un pasador entra a un orificio en el eje en B. Si se aplica una fuerza P de 60 lb sobre la llave en D, determine las reacciones en A y B.

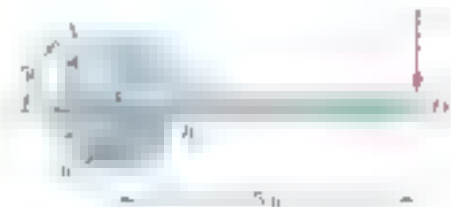


Figura P4.65

4.66 Determine las reacciones en B y D cuando $P = 60$ new.

4.67 Determine las reacciones en B y D cuando $P = 15$ new.

4.68 Determine las reacciones en B y D cuando $P = 1$ new.

4.69 Una caja de 50 kg se sostiene mediante la grúa viajera mostrada en la figura. Si $BC = 1.5$ m, determine (a) la tensión en el cable CD y (b) la reacción en B.

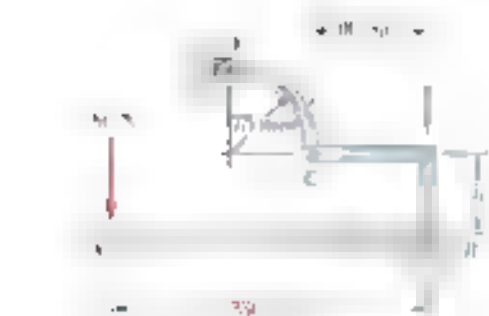


Figura P4.65 y P4.67



Figura P4.68



Figura P4.69

4.71 Un extremo de la varilla AB descansa en la esquina A y el otro se encuentra unido a la cuerda BD. Si la varilla está sometida a una carga de 400 lb en su punto medio C, determine la reacción en A y la tensión en la cuerda BD.

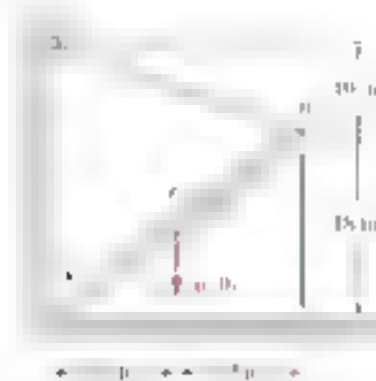


Figura P4.71

4.72 Determine las reacciones en A y D cuando $\theta = 30^\circ$

4.73 Determine las reacciones en A y D cuando $\theta = 60^\circ$

4.74 Un cubo de 40 lb, con 4 m. de diámetro, se posa sobre su suelo liso y se apoya en la esquina A mostrada en la figura. Si se sabe que el espesor de cada teja es de 0.3 m., determine la fuerza P requerida para mover el cubo hacia la izquierda, considerando la fricción en la esquina A hacia la derecha.



Figura P4.74

4.75 y 4.76 El elemento ABC se sostiene por medio de un apoyo de pasador en B y mediante una cuerda inextensible unida en A y C que pasa sobre una polea en D. Se supone que la tensión en los tramos AD y CD de la cuerda es la misma. Para las cargas mostradas en las figuras y sin tomar en cuenta el tamaño de la polea, determine la tensión en la cuerda y la reacción en D.



Figura P4.75

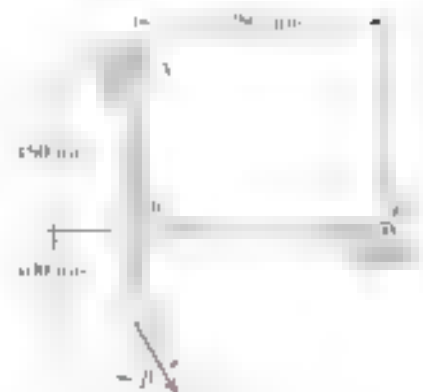


Figura P4.73 y P4.73

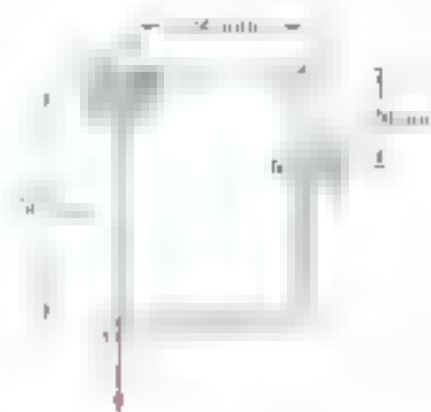


Figura P4.76



Figura P4.77

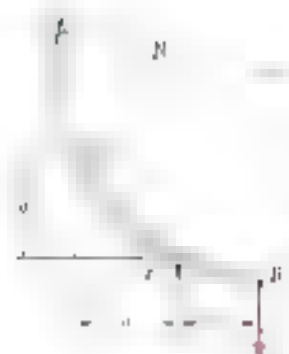


Figura P4.83

4.77 La varilla AB se sostiene mediante un apoyo de pasador en A y descansa sobre una clavija sin fricción en C . Determine las reacciones en A y C cuando se aplica una fuerza vertical de 170 N en B .

4.78 Retorne el problema 4.77, y ahora suponga que la fuerza de 170 N aplicada en B es horizontal y se dirige hacia la izquierda.

4.79 Use el método de la sección 4.7 para resolver el problema 4.2.

4.80 Use el método de la sección 4.7 para resolver el problema 4.28.

4.81 Si se sabe que $\theta = 30^\circ$, determine la reacción $a)$ en B y $b)$ en C .



Figura P4.81 y P4.82

4.82 Si se sabe que $\theta = 60^\circ$, determine la reacción $a)$ en B y $b)$ en C .

4.83 La varilla AB está doblada en forma de arco de círculo y se coloca entre las clavijas D y E . La fuerza soporta una carga P en el extremo B . Sin tener en cuenta el peso de la varilla, determine la magnitud de la fuerza P correspondiente a la posición de equilibrio cuando $a = 30\text{ mm}$ y $B = 150\text{ mm}$.

4.84 Una varilla delgada de longitud L está sujeta a dos eslabones que se apoyan en el extremo A y en el punto B a una distancia a de A . Se sabe que la barra está en equilibrio determine $a)$ la magnitud de la fuerza P que actúa en B y $b)$ el ángulo θ en términos del ángulo β .



Figura P4.84 y P4.85

4.85 Una varilla delgada de 8 kg , con longitud L , está sujeta a dos eslabones que se pueden deslizar libremente a lo largo de las guías mostradas en la figura. Si se sabe que la barra está en equilibrio y que $\beta = 30^\circ$, determine $a)$ el ángulo θ que forma la barra con la vertical y $b)$ las reacciones en A y B .

4.86 Una varilla delgada uniforme de longitud L se mantiene en equilibrio como se muestra en la figura, con uno de sus extremos apoyado sobre una pared sin fricción y el otro extremo a una cuerda de longitud S . Obtenga una expresión para el ángulo θ en términos de L y S . Demuestre que si $S > 2L$, la posición de equilibrio no existe.



Figura P4.86 y P4.87

4.87 Una varilla delgada de longitud $L = 20$ m se mantiene en equilibrio como se muestra en la figura, con uno de sus extremos apoyado sobre una pared sin fricción y el otro extremo a una cuerda de longitud $S = 30$ m. Si se sabe que el peso de la barra es de 10 lb, determine θ , la distancia h , B , la tensión en la cuerda y C , la reacción en B .

4.88 Una varilla uniforme AB de longitud $2l$ se apoya en el interior de una cavidad semicircular como se muestra en la figura. Suponga que la fuerza de fricción en el apoyo B corresponde a la posición de equilibrio.

4.89 Una varilla delgada de longitud l y peso W está sujeta a un collarín en A y se conecta a una pequeña rueda en B ; además se sabe que la rueda gira libremente a lo largo de una superficie horizontal lisa BC . Sin tomar en cuenta la fricción, obtenga una ecuación en términos de θ , l , y R que se cumple cuando la varilla se encuentra en equilibrio.



Figura P4.89



Figura P4.88

4.90 Para la varilla del problema 4.89, $L = 15$ in., $H = 30$ in. y $W = 100$ lb. Determine el ángulo θ correspondiente a la posición de equilibrio y las reacciones en A y B.

EQUILIBRIO EN TRES DIMENSIONES

4.8. EQUILIBRIO DE UN CUERPO RÍGIDO EN TRES DIMENSIONES

En esta sección se explicará cómo para el caso general de tres dimensiones se requieren seis ecuaciones escalares para expresar las condiciones de equilibrio de un cuerpo rígido:

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0 \quad (4.2)$$

$$\sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0 \quad \sum M_z = 0 \quad (4.3)$$

Las ecuaciones pueden resolverse para obtener las seis incógnitas que generalmente representarán reacciones en los apoyos o las conexiones.

En la mayor parte de los problemas, las ecuaciones escalares (4.2) y (4.3) se obtienen de modo más práctico y preciso si se expresan en forma vectorial las condiciones para el equilibrio del cuerpo rígido en equilibrio. Para ello se escribe

$$\sum \mathbf{F} = 0 \quad \sum \mathbf{M}_O = \sum (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0 \quad (4.4)$$

Se expresan las fuerzas \mathbf{F} y los vectores de momento \mathbf{r} en términos de sus componentes escalares y vectores \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} . Los productos escalares y los productos vectoriales se calculan de acuerdo con los procedimientos de la sección 3.4. Se observa que a través de una selección conveniente de punto O se pueden eliminar de los cálculos hasta tres componentes desconocidas de las reacciones. A igualdad de condiciones las de los vectores unitarios en cada una de las dos relaciones (4.4) se obtienen las ecuaciones escalares deseadas.¹

4.9 REACCIONES EN PUNTOS DE APOYO Y CONEXIONES PARA UNA ESTRUCTURA TRIDIMENSIONAL

Para una estructura tridimensional las reacciones dependen de su apoyo. La fuerza de reacción ejercida por un apoyo se dirige por lo general a lo largo de la línea que pasa por el punto de apoyo y lo perpendicular al plano de apoyo. En algunos casos, como en el caso de un apoyo esférico, la reacción puede existir en cualquier dirección. Las articulaciones, sin embargo, restringen la dirección de reacción. En algunos casos se puede determinar que la reacción corresponde a una o más de las seis incógnitas de las ecuaciones (4.4). El objetivo principal en este capítulo es establecer reglas de los seis movimientos fundamentales

¹En algunos problemas, es conveniente eliminar de la ecuación las reacciones en dos puntos A y B escribiendo la ecuación de equilibrio $\sum \mathbf{M}_{AB} = 0$, la cual implica determinar los momentos de las fuerzas respecto al eje AB que pasa por los puntos A y B. Véase el problema resuelto 4.10.

traslación en las direcciones x y z y rotación con respecto a los ejes x , y y z) están permitidos y cuáles de estos movimientos están restringidos.

Por ejemplo, los apoyos de bola y empuje o de rótula, las superficies de fricción y los cables solo impiden la traslación en una dirección y, por tanto, ejercen una sola fuerza cuya línea de acción es conocida; así, cada uno de estos apoyos involucra una ecuación, la cual está dada por la magnitud de la reacción. Los rodillos sobre superficies rugosas y las ruedas sobre rieles impiden la traslación en dos direcciones; por consiguiente, las reacciones correspondientes consisten en los componentes de fuerza desarmados. Las superficies rugosas en contacto directo y las rótulas (bola y empuje), impiden la traslación en tres direcciones; por tanto estos apoyos involucran tres componentes de fuerza desarmados.

Algunos apoyos y conexiones pueden impedir la rotación y la traslación; en estos casos, las reacciones correspondientes incluyen tanto pares como fuerzas. Por ejemplo, los ejes de un apoyo que soporta cualquier movimiento (tanto de rotación como de traslación) consiste en tres fuerzas y en pares. Los ejes de un apoyo que soporta una traslación para permitir la rotación alrededor de los ejes x y y ejerce una reacción que consiste en tres componentes de fuerza y un par de fuerzas desarmados.

Otros apoyos y conexiones se usan primordialmente para impedir traslaciones; sin embargo, su diseño es tal que también impiden algunas rotaciones. Las reacciones correspondientes consisten en los componentes de fuerza pero también pueden incluir pares. Un grupo de apoyos de este tipo incluye las bisagras y los ejes diseñados para soportar solo cargas radiales (no momento axial) y que soportan superficies lisas. Las reacciones correspondientes consisten en tres componentes de fuerza pero pueden incluir también dos pares. Otro grupo incluye apoyos de pasador y empuje, bisagras y ejes diseñados para soportar tanto un empuje axial como una carga radial (por ejemplo, los ejes de bola). Las reacciones correspondientes consisten en tres componentes de fuerza pero incluyen también dos pares. Sin embargo, estos apoyos no ejercerán pares apreciables bajo condiciones normales de uso. Por tanto, en su análisis solo se deben incluir las componentes de fuerza a menos que se encuentre que los pares son necesarios para mantener el equilibrio del cuerpo rígido o si se sabe que el apoyo ha sido diseñado específicamente para ejercer un par (véanse problemas del 4.110 al 4.113).

Si las ecuaciones de equilibrio más las ecuaciones de las restricciones que ecuaciones y algunas de las reacciones son *adecuadamente independientes*. Si las ecuaciones sobrepasan a las de las restricciones pueden más ecuaciones que incógnitas y pueden resolverse algunas de las reacciones de equilibrio. En una conexión general de carga en tal caso instantánea, el cuerpo rígido solo está *parcialmente restringido*. Sin embargo, bajo condiciones específicas de carga correspondientes a un problema dado, las ecuaciones adicionales se reducen a identidades triviales, como $0 = 0$ y pueden descartarse así, aunque el cuerpo rígido solo está *parcialmente restringido* (véase por ejemplo el equilibrio (véanse los problemas resueltos 4.7 y 4.8). A pesar de que se tengan seis o más incógnitas, es posible que no se cumpla alguna de las ecuaciones de equilibrio. Las ecuaciones de equilibrio y las reacciones asociadas con los apoyos se paralelas o intersectan a la misma línea o en un punto y el cuerpo rígido no está restringido en ningún par.



Fotografía 4.6 Las yemas universales que se encuentran comúnmente en las flechas motoras de los autos y camiones de tracción trasera permiten la transmisión del movimiento rotacional entre dos ejes no colineales.



Fotografía 4.7 La caja de engranajes que se muestra en la fotografía sostiene su eje de un ventilador usado en una instalación industrial.

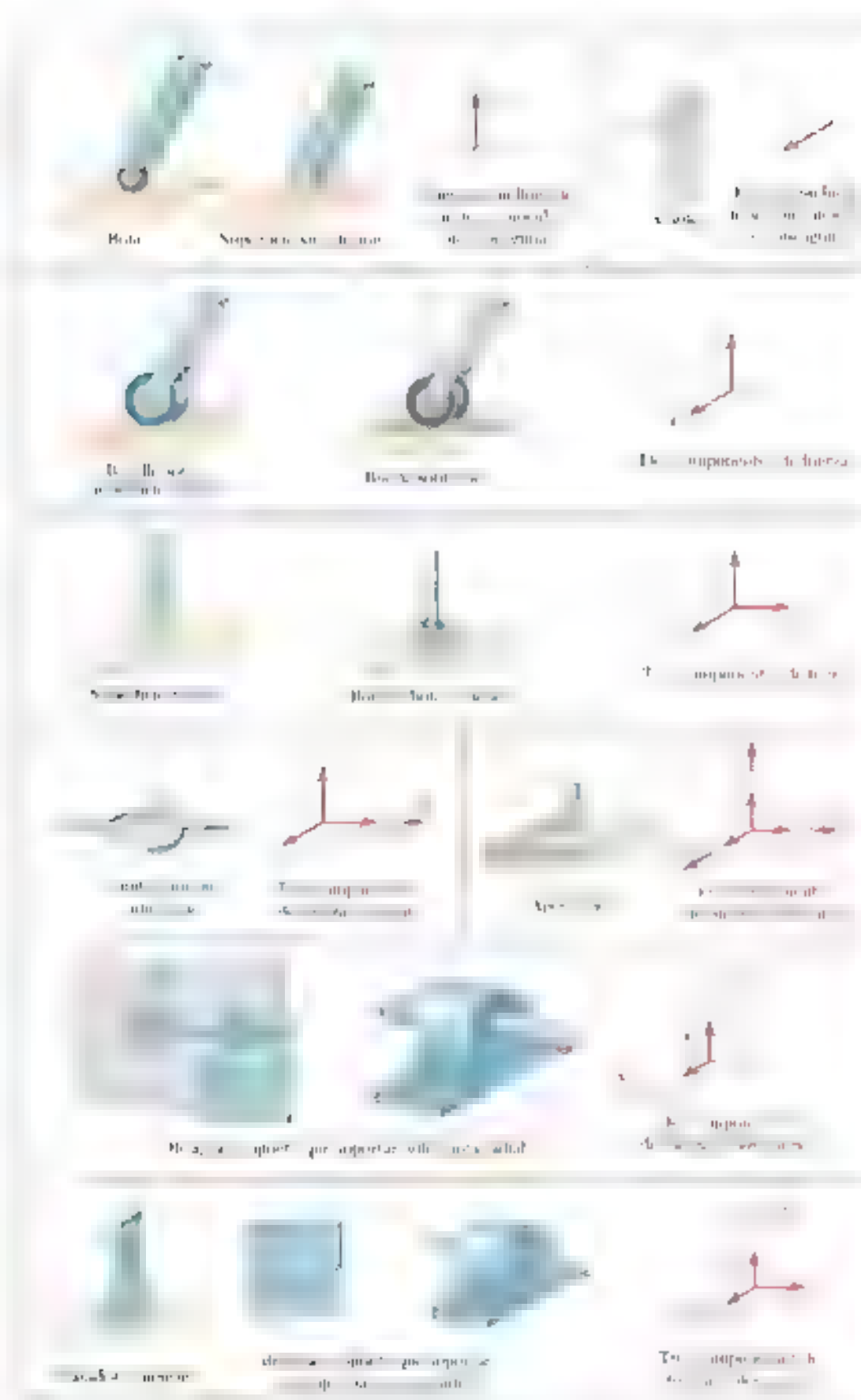


Figura 4.10



PROBLEMA RESUELTO 4.7

Un estante de 20 kg que se usa para almacenar los estantes superiores en un laboratorio está apoyado en dos ruedas con pastillas A y B montadas sobre un riel y en una rueda sin pastillas C que desliza sobre un riel fijo a la pared. Un hombre de 80 kg se para sobre el estante y se inclina hacia adelante. Las líneas de acción del peso combinado W del hombre y la estantería (inferior al peso en el punto D). Determinense las reacciones en A, B y C.



SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la estantería. Las reacciones en las ruedas son el peso combinado del hombre y el estante.

$$W = -mgj = -(80 \text{ kg} + 20 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)j = -(981 \text{ N})j$$

y cinco componentes de reacción desconocidas, dos en cada rueda con pastillas y una en la rueda sin pastillas. La rueda con pastillas puede deslizar libremente a lo largo del riel, pero no puede girar; ésta se puede desplazar libremente a lo largo del riel. La rueda sin pastillas no puede deslizar a lo largo del riel, pero puede girar. Se concluye que se satisfacen las ecuaciones de equilibrio para el sistema.

Se escriben las ecuaciones de equilibrio para el sistema. Se escriben las ecuaciones de equilibrio para el sistema.

$$\begin{aligned} \sum F = 0 \quad & A_x j + A_y k + B_x j + B_y k + C_x k - 981 N j = 0 \\ & A_x + B_x + C_x = 0 \quad A_y + B_y + C_y = 0 \\ \sum M_A = \sum (r \times F) = 0 \quad & (1.25 \text{ m})(B_y j + B_y k) + (0.50 \text{ m} - 0.60 \text{ m}) \times (-981 \text{ N})j \\ & + (0.60 \text{ m} + 2 \text{ m}) \times (-981 \text{ N})k = 0 \end{aligned}$$

Calculando los productos vectoriales se tiene:

$$\begin{aligned} (1.25 \text{ m})k - (1.25 \text{ m})j - 585.51k - 585.51j - 0.60j + 0.60k = 0 \\ -585.51j - 1.25j + 0.60k - 585.51j - 585.51k = 0 \end{aligned}$$

Se comparan los coeficientes de j y k en la ecuación (1) y se obtienen dos ecuaciones escalares que expresan que la suma de las componentes en la dirección j y k son iguales a cero. Se sustituyen en la ecuación (1) los valores de A_x y A_y en la ecuación (1) y se obtienen los valores de B_x y B_y .

$$\begin{aligned} A_x &= 585.51 \text{ N} \quad C_x = -106.2 \text{ N} \\ A_y &= 585.51 \text{ N} \quad B_y = 585.51 \text{ N} \\ A_z &= 585.51 \text{ N} \quad B_z = +738 \text{ N} \end{aligned}$$

Por tanto, las reacciones en B y C son:

$$B = 585.51 \text{ N} j + 585.51 \text{ N} k \quad C = -106.2 \text{ N} k$$

Al igualar a cero los coeficientes de j y k en la ecuación (1), se obtienen dos ecuaciones escalares que expresan que la suma de las componentes en la dirección j y k son iguales a cero. Se sustituyen en la ecuación (1) los valores de A_x y A_y en la ecuación (1) y se obtienen los valores de B_x y B_y .

$$\begin{aligned} A_x + B_x + C_x &= 0 \quad A_x + B_x - 106.2 = 0 \quad A_x = 106.2 \text{ N} \\ A_y + B_y + C_y &= 0 \quad A_y + B_y = 0 \quad A_y = 585.51 \text{ N} \end{aligned}$$

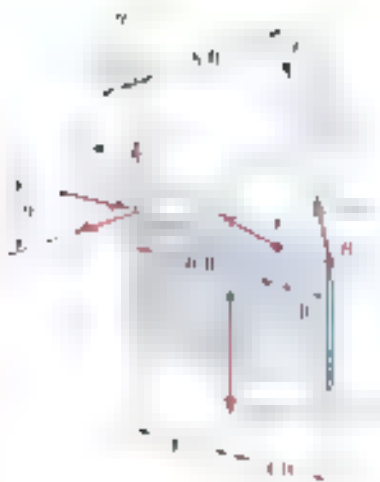
Se concluye que la reacción en A es:

En este problema resuelto y en los problemas resueltos 4.5 y 4.9, los momentos también pueden expresarse en forma de determinantes (véase el problema resuelto 3.10).



PROBLEMA RESUELTO 4.B

Un anillo de densidad uniforme de 5×4 lb/pie² ha y está apoyado por un cable en A y dos cables en B y C. Determine las tensiones en los cables en B y C.



SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Se dibuja un diagrama de cuerpo libre del anillo de 4 ft de radio que mide 8 ft de diámetro. Se indica el peso $W = -(270 \text{ lb}) \mathbf{j}$ y las reacciones en A, B y C. La reacción en A es una fuerza desconocida en las direcciones x , y y z que se representa por los componentes de los ejes cartesianos. Como las direcciones de las fuerzas ejercidas por los cables son conocidas, cada una de ellas se representa solo por una incógnita, las tensiones T_{BD} y T_{EC} . Como sólo hay cinco incógnitas, el anillo tiene restricciones para estar en equilibrio. Al determinar el centro del cable en C, se puede determinar la tensión en el cable, dado puesto que se conoce el momento $M = 0$.

Las componentes de las fuerzas T_{BD} y T_{EC} pueden expresarse en términos de las magnitudes escalares T_{BD} y T_{EC} en escalar:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{BD} &= x_{BD} \mathbf{i} + y_{BD} \mathbf{j} + z_{BD} \mathbf{k} & r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \mathbf{r} &= x_{BD} \mathbf{i} + y_{BD} \mathbf{j} + z_{BD} \mathbf{k} & r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{aligned}$$

$$\mathbf{T}_{BD} = T_{BD} \left(\frac{\mathbf{r}_{BD}}{r_{BD}} \right) = T_{BD} \left(\frac{0}{5} \mathbf{i} + \frac{3}{5} \mathbf{j} - \frac{4}{5} \mathbf{k} \right)$$

$$\mathbf{T}_{EC} = T_{EC} \left(\frac{\mathbf{r}_{EC}}{r_{EC}} \right) = T_{EC} \left(\frac{1}{5} \mathbf{i} - \frac{3}{5} \mathbf{j} - \frac{4}{5} \mathbf{k} \right)$$

Ecuaciones de equilibrio. Se expresa que las fuerzas que actúan sobre el anillo están en equilibrio. Se puede escribir:

$$\sum \mathbf{F} = 0: A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} + \mathbf{T}_{BD} + \mathbf{T}_{EC} - (270 \text{ lb}) \mathbf{j} = 0$$

$$A_x = \frac{3}{5} T_{BD} - \frac{1}{5} T_{EC} \quad A_y = \frac{3}{5} T_{BD} + \frac{3}{5} T_{EC} - 270 \text{ lb} \quad A_z = -\frac{4}{5} T_{BD} - \frac{4}{5} T_{EC} \quad (1)$$

$$\sum \mathbf{M}_A = \sum (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0$$

$$8 \text{ ft} \mathbf{i} \times T_{BD} \left(\frac{3}{5} \mathbf{i} + \frac{3}{5} \mathbf{j} - \frac{4}{5} \mathbf{k} \right) + (6 \text{ ft}) \mathbf{i} \times T_{EC} \left(\frac{1}{5} \mathbf{i} - \frac{3}{5} \mathbf{j} - \frac{4}{5} \mathbf{k} \right) + 4 \text{ ft} \mathbf{i} \times (-270 \text{ lb}) \mathbf{j} = 0$$

$$2.667 T_{BD} + 2.571 T_{EC} - 1790 \text{ lb} \mathbf{k} + (8.334 T_{BD} - 1.714 T_{EC}) \mathbf{j} = 0 \quad (2)$$

Si se igualan a cero los coeficientes de \mathbf{j} y \mathbf{k} en la ecuación (2), se obtienen dos ecuaciones escalares que deben resolverse para T_{BD} y T_{EC} :

$$T_{BD} = 100 \text{ lb} \quad T_{EC} = 125 \text{ lb} \quad \leftarrow$$

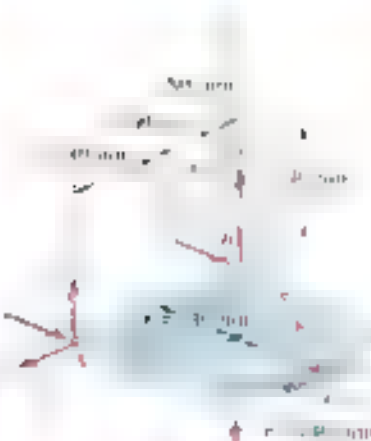
Al igualar a cero los coeficientes de \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} en la ecuación (1), se obtienen otras tres ecuaciones que proporcionan las componentes de A. Así, se tiene por:

$$A_x = -125 \text{ lb} \quad A_y = 100 \text{ lb} \quad A_z = -225 \text{ lb} \quad \leftarrow$$



PROBLEMA RESUELTO 4.9

Una tapa uniforme de un tambor que tiene un radio $r = 200 \text{ mm}$ y una masa $M = 4 \text{ kg}$ se encuentra en una posición horizontal y comienza a girar a 60 rpm . Suponga que el cojinete en B no ejerce ninguna fuerza axial, determine la tensión en el cable y las reacciones en A y B.



SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Se dibuja un diagrama de cuerpo libre con los pesos y todas las demás fuerzas mostradas en la figura. Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre son el peso de la tapa:

$$W = -mg\mathbf{j} = -(4 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)\mathbf{j} = -39.24 \text{ N}\mathbf{j}$$

y las reacciones involucran seis incógnitas: la magnitud de la fuerza T en el cable, el punto de aplicación de la fuerza T en la tapa, la reacción A_x en la articulación A. Las componentes de T se expresan en términos de la magnitud T y el ángulo θ . La sexta incógnita es el ángulo θ en sus componentes T_x y T_y .

$$\mathbf{r}_A = -(400 \text{ mm})\mathbf{i} + (200 \text{ mm})\mathbf{j} - (180 \text{ mm})\mathbf{k} \quad |\mathbf{r}_A| = 560 \text{ mm}$$

$$\mathbf{T} = T \frac{\mathbf{r}_B}{|\mathbf{r}_B|} = T \left(\frac{1}{560} \mathbf{i} + \frac{1}{280} \mathbf{j} + \frac{1}{280} \mathbf{k} \right)$$

Ecuaciones de equilibrio. Se expresa que las fuerzas que actúan sobre la tapa en el punto A son las reacciones A_x y A_y .

$$\sum \mathbf{F} = 0 \quad A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} + R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j} + T = 39.24 \text{ N}\mathbf{j} = 0$$

$$\sum M_A = \sum (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0$$

$$\begin{aligned} \sum \mathbf{M}_A &= A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} \\ &+ 200 \mathbf{i} \times T \left(\frac{1}{560} \mathbf{i} + \frac{1}{280} \mathbf{j} + \frac{1}{280} \mathbf{k} \right) \\ &+ 200 \mathbf{j} \times T \left(\frac{1}{560} \mathbf{i} + \frac{1}{280} \mathbf{j} + \frac{1}{280} \mathbf{k} \right) \\ &+ 180 \mathbf{k} \times T \left(\frac{1}{560} \mathbf{i} + \frac{1}{280} \mathbf{j} + \frac{1}{280} \mathbf{k} \right) = 0 \end{aligned}$$

Si se igualan a cero los coeficientes de los vectores unitarios en la ecuación (2) se escriben tres ecuaciones escalares que proporcionan el siguiente resultado:

$$A_x = +49.0 \text{ N} \quad A_y = +39.2 \text{ N} \quad A_z = +39.2 \text{ N}$$

Al igualar a cero los coeficientes de los vectores unitarios en la ecuación (1) se obtienen tres ecuaciones escalares adicionales. Después de sustituir los valores de T , A_x y A_y en estas ecuaciones, se obtiene:

$$A_z = 49.0 \text{ N} \quad R_x = +24.5 \text{ N} \quad R_y = +24.5 \text{ N}$$

Por tanto, las reacciones en A y B son:

$$\mathbf{R} = +24.5 \text{ N}\mathbf{i} + +24.5 \text{ N}\mathbf{j} + 49.0 \text{ N}\mathbf{k}$$



PROBLEMA RESUELTO 4.10

Una carga de 450 lb está colgada en la argolla C de un tramo rígido de tubería ABCD que ha sido doblado, como se muestra en la figura. El tubo está apoyado por medio de rodillos en A y D, las cuales están unidas, respectivamente, al piso y a la pared vertical y por un cable que está unido al punto medio E de la porción HC del tubo y al punto G en la pared. Determine a) dónde debe estar ubicado el punto G si la tensión en el cable debe ser mínima y b) el valor mínimo correspondiente de la tensión.

SOLUCIÓN

El momento de torsión en el punto E producido por el peso del tubo y la carga W es $\mathbf{M}_E = \mathbf{r}_{AE} \times \mathbf{F}_W + \mathbf{r}_{DE} \times \mathbf{F}_T$, donde \mathbf{F}_T es la fuerza ejercida por el cable. Para eliminar de los cálculos a las reacciones en A y en D, se expresa por la suma de los momentos de las fuerzas con respecto a AD en la cual es cero. Si se representa con el vector unitario a lo largo de AD se escribe

$$\mathbf{M}_E \cdot \mathbf{u}_{AD} = 0 \quad \mathbf{r}_{AE} \times \mathbf{F}_W \cdot \mathbf{u}_{AD} + \mathbf{r}_{DE} \times \mathbf{F}_T \cdot \mathbf{u}_{AD} = 0 \quad (1)$$

El segundo término en la ecuación (1) se puede calcular como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{AE} \times \mathbf{F}_W &= (2\mathbf{i} + 12\mathbf{j}) \times (-450\mathbf{j}) = -900\mathbf{k} \\ \mathbf{u}_{AD} &= \frac{\mathbf{AD}}{AD} = \frac{12\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 6\mathbf{k}}{18} = \frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{1}{3}\mathbf{k} \end{aligned}$$

$$(\mathbf{r}_{AE} \times \mathbf{F}_W) \cdot \mathbf{u}_{AD} = (-900\mathbf{k}) \cdot \left(\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{1}{3}\mathbf{k}\right) = +300$$

Sustituyendo el valor obtenido en la ecuación (1), se escribe

$$\mathbf{r}_{DE} \times \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}_{AD} = -300 \quad (2)$$

Valor mínimo de la tensión. Recordando la propiedad de momento de torsión, los productos internos, valores se puede escribir la ecuación (2) de la siguiente forma:

$$\mathbf{T} \cdot (\mathbf{u}_{AD} \times \mathbf{r}_{DE}) = -300 \text{ lb} \cdot \text{ft} \quad (3)$$

Como se muestra que el momento de torsión \mathbf{T} sobre el vector \mathbf{u}_{AD} es un constante. Se concluye que \mathbf{T} es mínima cuando es paralela al vector

$$\mathbf{u}_{AD} \times \mathbf{r}_{DE} = \left(\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{2}{3}\mathbf{j} - \frac{1}{3}\mathbf{k}\right) \times (6\mathbf{i} + 12\mathbf{j}) = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

Como el vector unitario correspondiente es $\frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}$, se escribe

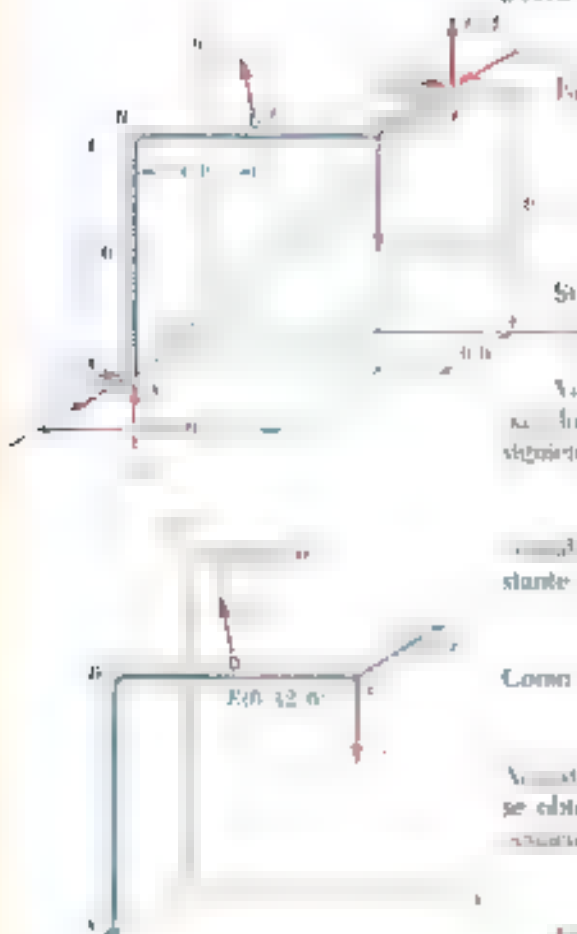
$$\mathbf{T}_{\min} = T \left(\frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}\right) \quad (4)$$

Al sustituir \mathbf{T}_{\min} en la ecuación (3), se obtiene $6T = -300$ y, por tanto, $T = -300$. Al llevar este valor a la ecuación (4), se obtiene

$$\mathbf{T}_{\min} = -300 \left(\frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}\right) = -200\mathbf{i} + 100\mathbf{j} - 200\mathbf{k} \quad T_{\min} = 300 \text{ lb}$$

Como se muestra en la figura, la fuerza \mathbf{T} tiene la siguiente dirección, sus componentes deben ser proporcionales. Representando las coordenadas de G como x, y, z se escribe

$$\frac{x}{200} = \frac{y - 12}{100} = \frac{z}{200}$$



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En las secciones que se analizan a continuación se selecciona algún tipo de cuerpo *terrestre libre* y se considera tanto que se trata de un *hogarón de cuerpo libre* como el primer paso en la solución de un problema.

1. *Una masa se suelta en la parte superior de la pista de la figura 4.1. El cuerpo de la figura en un apoyo puede estar en equilibrio o moverse (Figura 4.2). Para decidir cuál de estos dos estados de movimiento o una combinación de ambos es el correcto, se debe considerar si el apoyo puede moverse o no en una dirección vertical o alrededor de un cierto eje.*

a) *Si el apoyo puede moverse en una dirección, se debe dibujar una diagrama de cuerpo libre para el cuerpo imponiendo la restricción de movimiento que actúa en esa misma dirección.*

b) *Si el apoyo puede moverse en una dirección, se debe dibujar en el diagrama de cuerpo libre un par de ejes para la rotación que actúa alrededor de ese mismo eje.*

2. *Las ecuaciones de movimiento se escriben para el cuerpo. Si se escribe $\Sigma F_x = 2M_1$ y $\Sigma M_A = 0$ con respecto a un punto apropiado A y se igualan a cero los coeficientes de F_x y F_A en esas ecuaciones, se obtienen seis ecuaciones escalares. En algunas de esas ecuaciones se puede resolver para conocer las seis incógnitas que continúan.*

3. *Después de imponer la restricción de movimiento del cuerpo, se debe escribir la ecuación de movimiento para el cuerpo. Las siguientes estrategias pueden ser de utilidad.*

a) *Si una ecuación con respecto a la dirección de movimiento en la que se obtienen ecuaciones y asociar con la ecuación de movimiento de una reacción de conocidos (problemas resueltos 4.8 y 4.9).*

b) *Dibujar si es posible, un eje a través de los puntos de aplicación de todas las reacciones desconocidas, en el que la suma de momentos sea cero, ya que el cuerpo está en equilibrio en cualquier dirección.*

c) *Después de dibujar el diagrama de cuerpo libre, se puede determinar la existencia de una de las siguientes situaciones:*

a) *Las reacciones involucradas menos de una magnitud se dice que el cuerpo está *parcialmente restringido*. El cuerpo puede moverse. Si el cuerpo es imposible determinar las reacciones para la combinación de carga dada (problema resuelto 4.7).*

b) *Las reacciones involucradas menos de tres se dice que hay reacciones son *totalmente indeterminadas*. Aunque se pueden escribir una o más ecuaciones, no es posible determinar las reacciones (ver ejemplo 4.1).*

c) *Las reacciones involucradas más de tres se dice que el cuerpo está *hiperestáticamente restringido* y se puede presentar un exceso de una condición general de carga.*

Problemas

4.91 Una hoja de madera de 4×8 ft que tiene un peso de 34 lb ha sido diseñada para tener un peso específico de 35 lb/ft^3 . La parte superior de la hoja se apoya sobre pequeños collarines en A y B y el extremo superior se apoya en el tulo C. Sin tomar en cuenta la fricción entre todas las superficies en contacto, determine las reacciones en A, B y C.



Figura P4.91

4.92 Dos bandas de transmisión pasan sobre carretes soldados a un eje que se sostiene en un punto A y B. El eje tiene un radio de 30 mm y el carrete en C tiene un radio de 40 mm. Si se sabe que $T_B = 50 \text{ N}$ por el sistema de bandas, determine las reacciones en A y B. Suponga que el eje en A no ejerce ninguna reacción y que el eje en B solo ejerce la reacción vertical.

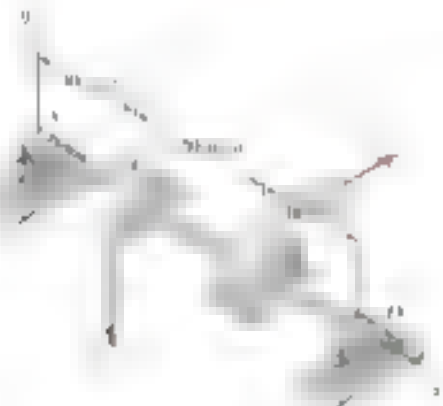


Figura P4.92

4.93 Retorne el problema 4.92, ahora suponga que el carrete en C se sustituye por un carrete con 50 mm de radio.

4.94 Dos bielas, AB y BC , son a su vez, poleas montadas a un eje que se sostiene mediante cojinetes en B y D . Si la polea en A tiene un radio de 2.5 in., y la polea en C tiene un radio de 2 in., y se sabe que el sistema gira con una velocidad angular constante, determine a) la tensión T , b) las reacciones en B y D . Suponga que T que BC no ejerce ninguna fuerza de empuje axial y no tome en cuenta los pesos de las poleas y el eje.

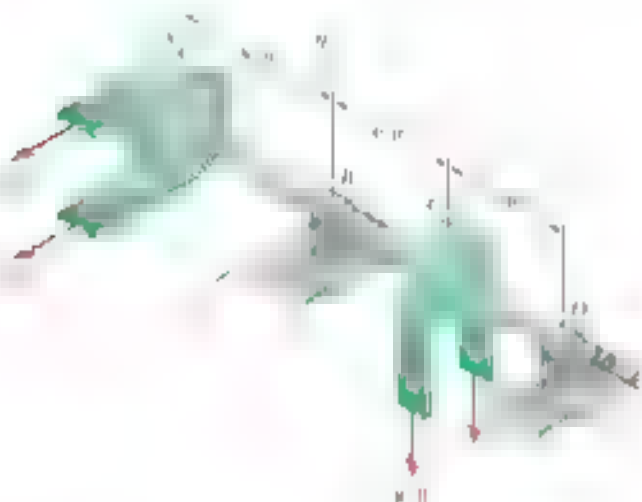


Figura P4.94

4.95 Una palanca de 200 mm y una polea de 200 mm se sueldan al eje BE que a su vez se sostiene mediante cojinetes en C y D . Si se aplica una carga vertical de 720 N en A cuando la palanca está en posición horizontal, determine a) la tensión en la cuerda y b) las reacciones en C y D . Suponga que el cojinete en D no ejerce ninguna fuerza de empuje axial.

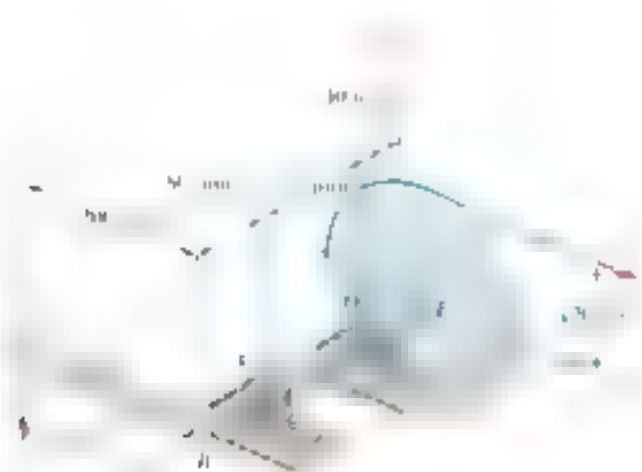


Figura P4.95

4.96 Retorne el problema 4.95 y ahora suponga que el eje se ha rotado 30° en sus cojinetes en el sentido de las manecillas del reloj y que la carga de 720 N permanece vertical.

4.101 Dos tubos de acero $AB = BE$ y BC que tienen una misma masa por unidad de longitud igual a 8 kg/m , se sueldan juntos en B y se sostienen mediante tres alambres. Si se sabe que $a = 0.4 \text{ m}$, determine la tensión en cada alambre.

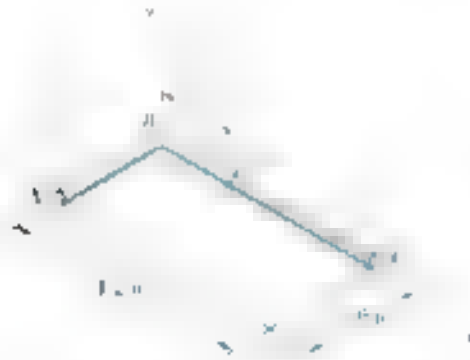


Figura P4.101

4.102 Para el conjunto de tubos del problema 4.101, determine a) el peso máximo que puede soportarse en el punto B y b) la tensión correspondiente en cada alambre.

4.103 La placa cuadrada de 24 lb que se muestra en la figura se sostiene mediante tres alambres verticales. Determine a) la tensión en cada alambre y b) el momento de inercia de la placa por el eje AB que pasa por los puntos A y B .



Figura P4.103

4.104 La mesa que se muestra en la figura pesa 30 lb , tiene un diámetro de 4 ft y se sostiene mediante tres patas igualmente espaciadas alrededor del borde. En la parte superior de la mesa en B se aplica una fuerza vertical P que apunta hacia abajo. La fuerza P debe ser mayor que 100 lb para que la mesa no se voltee. Muestre en un dibujo el área sobre la cual puede actuar P sin volcar la mesa.



Figura P4.104

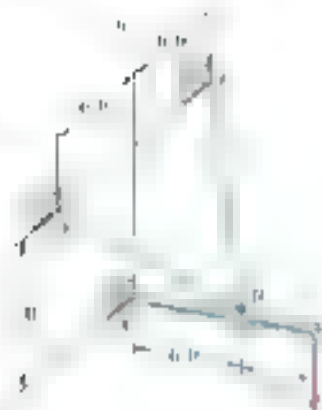


Figura P4.105

4.105 Un brazo de 10 ft está sometido a una fuerza de 540 lb como se muestra en la figura. Determine la tensión en cada cable y la reacción en el apoyo de rótula en A.

4.106 Un brazo de 2.4 m de longitud se sostiene mediante un apoyo de rótula en C y por medio de dos cables AD y AE. Determine la tensión en cada cable y la reacción en C.

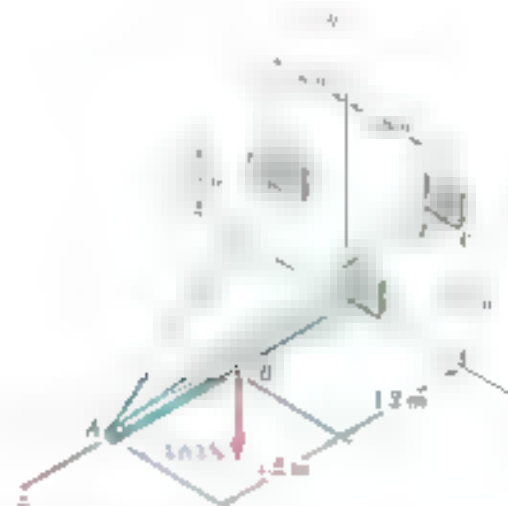


Figura P4.106

4.107 Retorne el problema 4.106, y ahora suponga que la carga de 500 N se aplica en el punto A.

4.108 Una caja de 800 lb cuelga de un cable que pasa sobre una polea en B y está unido al soporte en H. El aguillón AB de 200 lb se sostiene mediante una junta de rótula en A y por medio de los cables DE y DF. El centro de gravedad del aguillón se localiza en G. Determine a) las tensiones en los cables DE y DF b) la reacción en A.

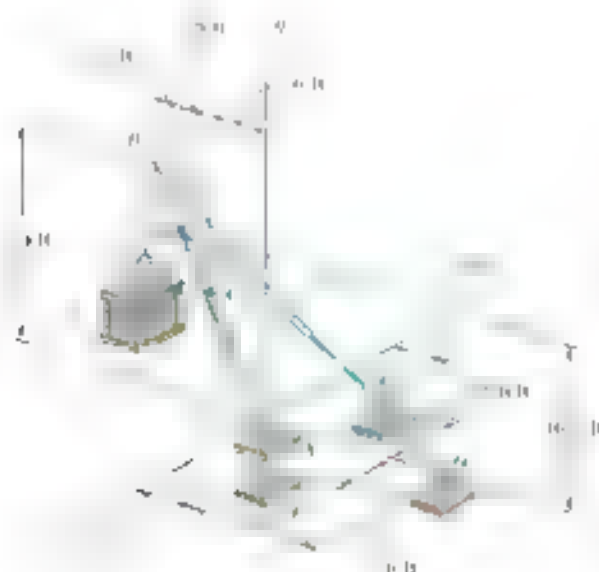


Figura P4.108

4.109 Un poste de 3 m se sostiene mediante una junta de rótula en A y por medio de los cables CD y CE. Se sabe que la fuerza en el cable CE es de 5 kN y actúa verticalmente hacia abajo ($\phi = 0$). Determine a la tensión en los cables CD y CE y b la reacción en A.

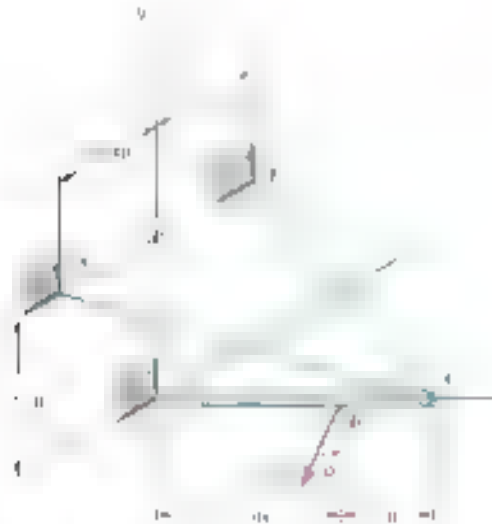


Figura P4.108 y P4.110

4.110 Un poste de 3 m se sostiene mediante una junta de rótula en A y por medio de los cables CD y CE. Se sabe que la fuerza en el cable CE es de 5 kN y actúa verticalmente hacia abajo ($\phi = 0$). Determine a la tensión en los cables CD y CE y b la reacción en A.

4.111 Un brazo de 40 m se sostiene mediante una junta de rótula en C y los cables AD y DE. El cable DE actúa verticalmente hacia abajo. Determine la tensión en cada cable y la reacción en C.

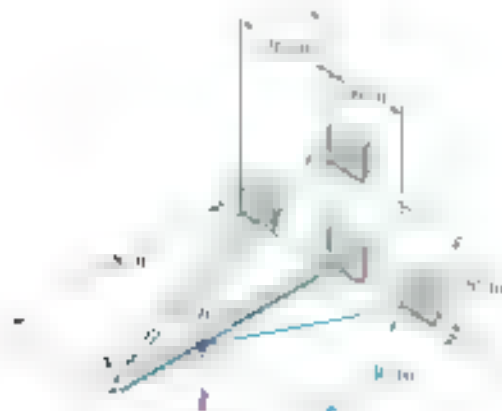


Figura P4.111

4.112 Retorne el problema 4.111 y ahora suponga que la carga de 120 lb se aplica en A .

4.113 Una tapa de 20 kg en la abertura de un techo tiene bisagras en las esquinas A y B . El cable AC se adjunta al ángulo C de la tapa y se extiende horizontalmente. La tapa se mantiene en posición horizontal mediante la barra DE . Determine la magnitud de la fuerza necesaria por la barra DE para mantener la tapa en posición horizontal. Suponga que la bisagra en A no ejerce ninguna fuerza de empuje axial.

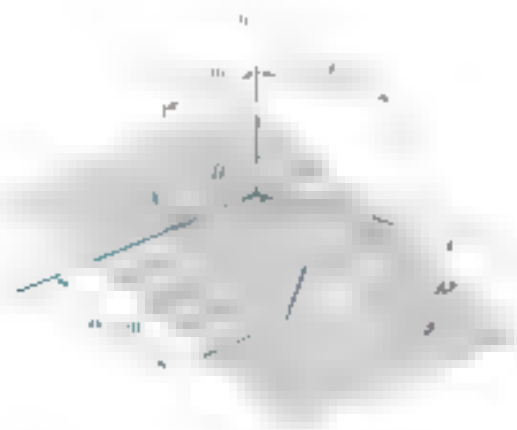


Figura P4.113

4.114 La varilla doblada $ABEF$ se sostiene mediante ejes en A y D , por lo que la cadena AC se sujeta a la parte superior de la armadura. Si la parte AB de la armadura tiene 250 mm de longitud, determine θ , la tensión en el alambre AC , las reacciones en C y D . Suponga que el eje en D no ejerce ninguna fuerza de empuje axial.

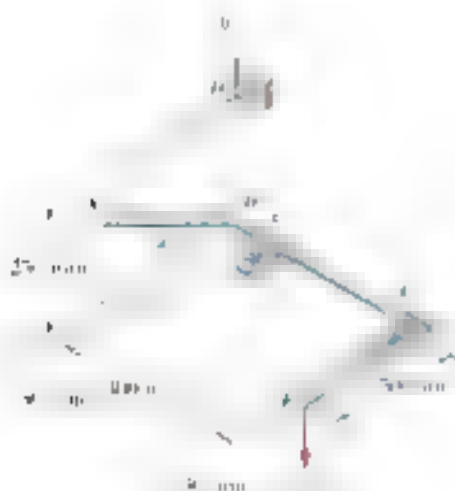


Figura P4.114

4.115 Una placa rectangular uniforme de 100 kg se sostiene en la posición mostrada por medio de bisagras en A y B y mediante el cable DE que pasa por el gancho en C . Se supone que la placa no puede moverse. Determine la tensión en el cable DE . Especifique si la bisagra en B ejerce alguna fuerza de empuje axial.

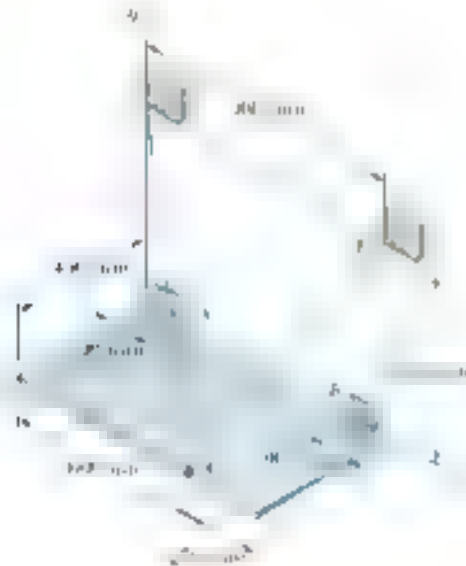


Figura P4.115

4.116 Repetir el problema 4.115, y ahora suponga que el cable DE se reemplaza por un cable unido a los puntos D y E al gancho C .

4.117 La placa rectangular de la figura anterior se sostiene en la posición mostrada por medio de bisagras en A y B y por medio del cable DE . Se supone que la bisagra en B no ejerce ninguna fuerza de empuje axial. Determine la tensión en el cable DE y las reacciones en A y D .



Figura P4.117

4.118 Repetir el problema 4.117 y ahora suponga que el cable DE se reemplaza por un cable unido a los puntos E y D .

4.119 Retorne el problema 4.114, y ahora suponga que el collarín en E se retira y que el eje en A puede ejercer pares alrededor de ejes paralelos a los ejes y y z .

4.120 Retorne el problema 4.117 y ahora suponga que la bisagra en B se retira y que la bisagra en A puede ejercer pares alrededor de ejes paralelos a los ejes y y z .

4.121 El ensamble mostrado en la figura se usa para controlar la tensión T en una cinta que pasa alrededor de un carrete en E . El collarín C se sujeta a las varillas ABC y CDE . El collarín puede rotar alrededor del eje FE , pero su movimiento a lo largo del eje se evita mediante una ranura S . Para la carga mostrada determine $a)$ la tensión T en la cinta y $b)$ la reacción en C .

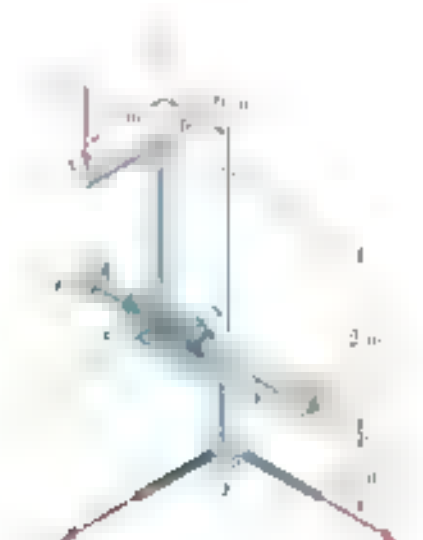


Figura P4.121

4.122 El ensamble mostrado en la figura se usa para controlar la tensión T en una cinta que pasa alrededor de un carrete en E y está colocada sobre el pasador vertical. El pasador puede ejercer pares de torsión alrededor de los ejes x y z y puede ejercer una reacción vertical en A . Para la carga mostrada determine $a)$ la tensión T en la cinta y $b)$ la reacción en A .

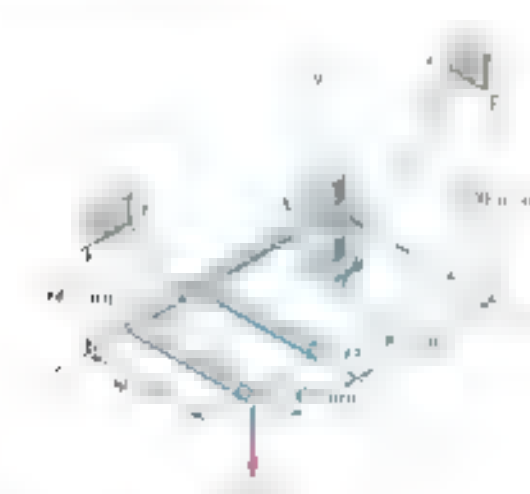


Figura P4.122

4.123 El sistema rígido ABD en forma de L se sostiene mediante tres cables y un apoyo de rótula en A . Si se aplica una carga de 450 lb en F , determine la tensión en cada cable.

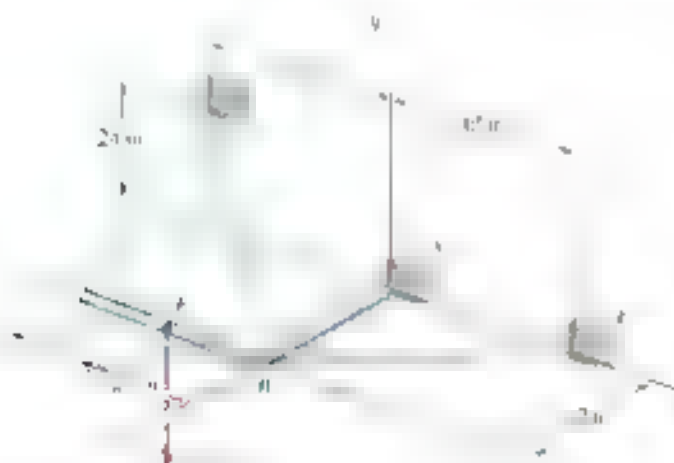


Figura P4.123

4.124 El sistema rígido ABC en forma de L se sostiene mediante tres cables y un apoyo de rótula en A . Si se aplica una carga de 150 lb en C , determine la tensión en cada cable.

4.125 El bastidor $ABC D$ se sostiene mediante tres cables y un apoyo de rótula en A . Para $a = 150 \text{ mm}$, determine la tensión en cada cable y la reacción en A .

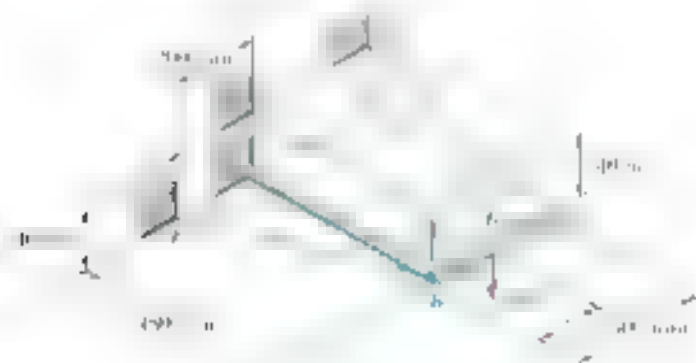


Figura P4.125 y P4.126

4.126 El bastidor $ABC D$ se sostiene mediante tres cables y un apoyo de rótula en A . Si se sabe que la carga de 350 N se aplica en D ($a = 300 \text{ mm}$), determine la tensión en cada cable y la reacción en A .

4.127 Tres varillas se sujetan entre sí para formar una "esquina" que se sostiene mediante tres arnellos. Sin tomar en cuenta la fricción, determine las reacciones en A , B y C cuando $P = 240 \text{ lb}$, $a = 12 \text{ in}$, $b = 8 \text{ in}$ y $c = 6 \text{ in}$.

4.128 Retorne el problema 4.127 y ahora suponga que la fuerza P se retira y se sustituye por un par $M = +600 \text{ lb} \cdot \text{in}$, \mathbf{j} que actúa en b .



Figura P4.127

4.129 Para limpiar la tubería de desagüe obstruida AE en plomero desmonta ambos extremos del tubo e inserta una gila a través de la abertura en A . La cabeza cortadora de la gila se conecta mediante un cable pasando a un motor eléctrico el cual rota a una velocidad constante angular que es de 100 rpm en sentido horario. Las fuerzas ejercidas por el motor en el motor sobre el extremo del cable se representan en la figura por una llave de torsión $\mathbf{F} = -145 \text{ N}\mathbf{i}$, $\mathbf{M} = -150 \text{ N}\cdot\text{m}\mathbf{j}$. Determinar las reacciones articulares en B , C y D causadas por la operación de limpieza. Se ponga que la reacción en cada soporte consta de dos componentes de la fuerza pero su dirección no es conocida.



Figura P4.129

4.130 Retome el problema 4.129, y ahora suponga que el plomero ejerce una fuerza $\mathbf{F} = -145 \text{ N}\mathbf{i}$ y que el motor se desconecta ($\mathbf{M} = 0$).

4.131 El ensamblaje que se muestra en la figura consiste en una varilla AE de 50 mm, la cual está sujeta a una cruz formada por 4 brazos de 300 mm. El ensamblaje se sostiene mediante una junta de rótula en P y por medio de tres ligas verticales, cada una forma un ángulo de 45° con la vertical. Para la carga mostrada, determine a la tensión en cada liga y b la reacción en P .

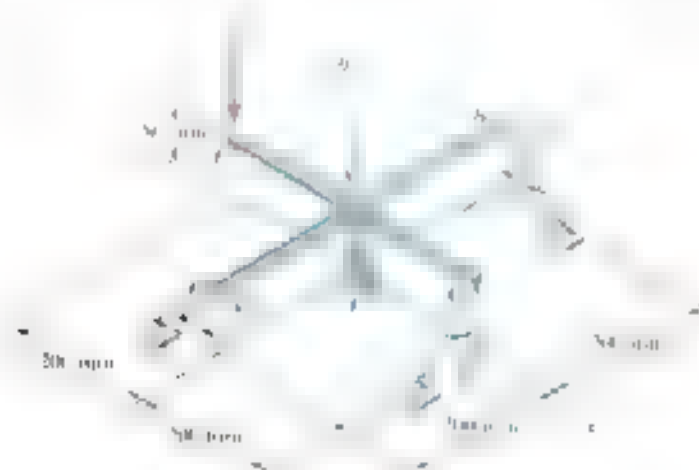


Figura P4.131

4.132 La barra uniforme AB de 10 kg se sostiene mediante una junta en A y una cuerda que pasa por C que se fija en otra junta en D por medio G de la barra. Si se sabe que la barra está recargada contra una pared vertical sin fricción en B , determine θ , la tensión en la cuerda, y las reacciones en A y en B .

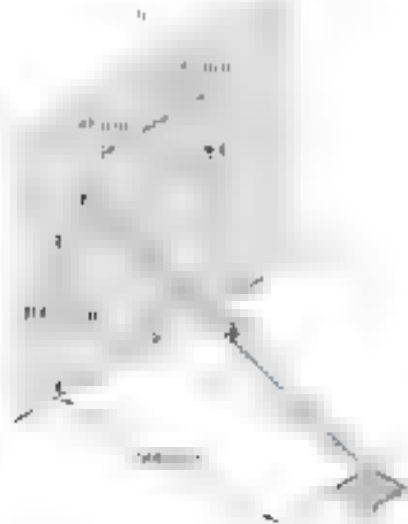


Figura P4.132

4.133 La barra delgada $ABDE$ se sostiene por medio de rótulas en A y E y mediante el cable DF . Si se aplica una carga de 60 lb en C como se muestra en la figura, determine la tensión en el cable.

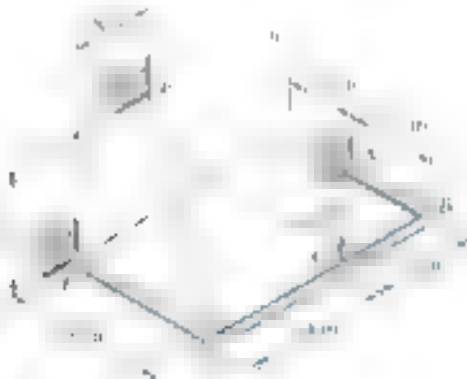


Figura P4.133

4.134 Retorne el problema 4.133, y ahora suponga que el cable DF se reemplaza por un cable que conecta a B y F .

4.135 La placa $ABCD$ de 50 kg se sostiene por medio de bisagras a lo largo del borde AB y mediante el alambre CE . Si se sabe que la placa es uniforme, determine la tensión en el alambre.

4.136 Retorne el problema 4.135, y ahora suponga que el alambre CE se reemplaza por un alambre que conecta a D y F .

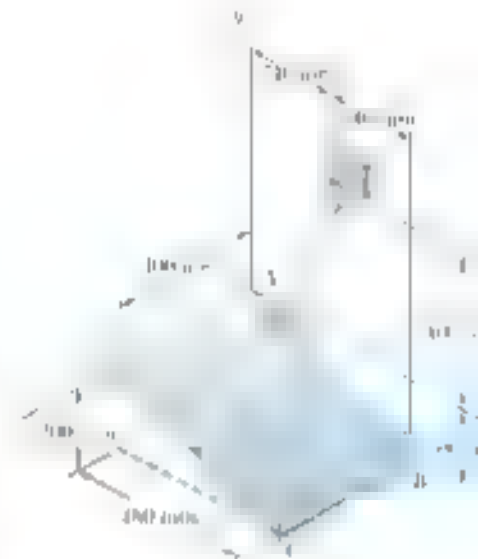


Figura P4.135

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 4

Este capítulo se ha dedicado a estudiar los *condiciones de equilibrio de un cuerpo rígido*. Esto es, a la situación en la cual las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo rígido *forman un sistema equivalente a cero* (sección 4.1). Entonces, se tiene que

$$\Sigma \mathbf{F} = 0 \quad \Sigma \mathbf{M}_O = \Sigma (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0 \quad (4.1)$$

Si se descomponen cada una de las fuerzas y cada uno de los momentos en sus componentes cartesianas, se pueden expresar las ecuaciones (4.1) en términos de los componentes cartesianos para el equilibrio de un cuerpo rígido. Trávese de las secciones anteriores para saber cómo se obtiene el momento

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= 0 & \Sigma F_y &= 0 & \Sigma F_z &= 0 \\ \Sigma M_x &= 0 & \Sigma M_y &= 0 & \Sigma M_z &= 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Estas ecuaciones pueden utilizarse para las fuerzas de peso, las fuerzas normales ejercidas sobre un cuerpo rígido o las fuerzas de fricción ejercidas por una superficie.

Cuando se resuelve un problema que involucra el equilibrio de un cuerpo rígido es esencial considerar *todas* las fuerzas actuando sobre el cuerpo. Por lo tanto, es muy importante seleccionar cuidadosamente la *línea de referencia* o *momento libre* que se usará para el cuerpo en estudio y todas las fuerzas, conocidas o no, que actúan sobre el mismo (sección 4.2).

En la primera parte del capítulo se estudió el *equilibrio de una estructura bidimensional*. Es decir, se supuso que la estructura considerada y la fuerza aplicada sobre ésta estaban contenidas en un plano. Se vio que cada una de las ecuaciones (4.2) se reduce a una ecuación por sus apoyos y puntos de aplicación de las fuerzas, reduciendo de esta manera el número de ecuaciones de equilibrio a tres (sección 4.3).

En el caso de una estructura bidimensional, las ecuaciones (4.1) o las ecuaciones (4.2) y (4.3) se reducen a *tres ecuaciones de equilibrio*, las cuales son

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M_A = 0 \quad (4.3)$$

donde A es un punto arbitrario en el plano de la estructura (sección 4.3). Estas ecuaciones también se pueden escribir en términos de las derivadas. A partir de las tres ecuaciones de equilibrio (4.3) se pueden obtener *muchas* ecuaciones adicionales, simplemente tomando la derivada respecto a x o y . Por tanto, se pueden escribir siempre *alternativos* de ecuaciones de equilibrio como

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma M_A = 0 \quad \Sigma M_B = 0 \quad (4.4)$$

donde el punto B se selecciona de manera que la línea AB no sea paralela al eje y , o

$$\Sigma M_A = 0 \quad \Sigma M_B = 0 \quad \Sigma M_C = 0 \quad (4.5)$$

donde los puntos A , B y C no deben ser colineales.

Ecuaciones de equilibrio

Diagrama de cuerpo libre

Equilibrio de una estructura
Ecuación 4.3

calcular los productos vectoriales, ya sea en forma directa o calculando determinantes, con el fin de obtener las ecuaciones escalares deseadas (igualando a cero los coeficientes de los vectores unitarios). Problemas resueltos 4.7 a 4.9.

Se ha señalado que es posible encontrar hasta tres ecuaciones lineales independientes para el momento de $\Sigma M_A = 0$ asegurando las relaciones (4.1) por medio de una selección cuidadosa del punto O . Asimismo, la suma total de momentos producidos por todas las fuerzas en tres puntos A , B y C es idéntica. La ecuación $\Sigma M_A = 0$ la cual involucra el cálculo de los momentos de las fuerzas con respecto a A , puede aplicarse a los puntos B y C (problemas resueltos 4.10).

Si las reacciones involucradas en los apoyos son iguales a las reacciones son estáticamente indeterminadas, cuando involucran momentos de las fuerzas el cuerpo rígido se encuentra en equilibrio. Aunque existan seis o más incógnitas, el cuerpo rígido estará en equilibrio, siempre que las reacciones asociadas con los apoyos duros son paralelas o si intersectan la misma línea.

Problemas de repaso

4.142 Para mover dos ruedas, cada una con una masa de 40 kg, se utilizan arillos. Si $\alpha = 30^\circ$, determine la fuerza vertical P que debe aplicarse en el manubrio del carrito para mantener el equilibrio cuando $\alpha = 30^\circ$. La polea es de masa despreciable.

4.143 Determine las reacciones en A y C cuando $\alpha = 0^\circ$ y $\beta = 30^\circ$.



Figura P4.143

4.144 Una palanca AB está articulada en C y se encuentra sujeta a un cable de control en A. Si la palanca se somete a una fuerza vertical en B de 75 lb (determine μ) la tensión en el cable y la reacción en C.



Figura P4.142



Figura P4.144

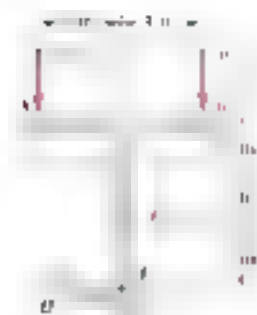


Figura P4.146 y P.147

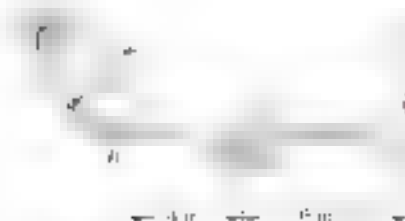


Figura P4.148



Figura P4.149

4.145 Sin tomar en cuenta la fricción ni el peso de la polea, determine:
a) La tensión en el cable ADB y b) la reacción en C .

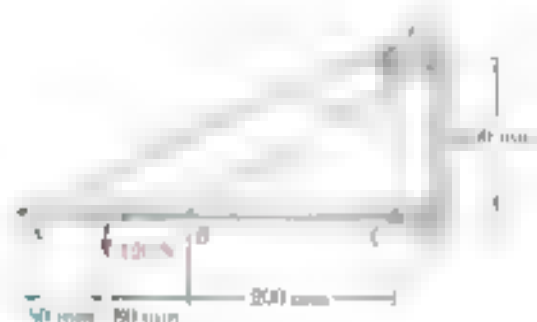


Figura P4.145

4.146 La ménsula en forma de T mostrada en la figura se sostiene mediante una pequeña rueda en E y clavijas en C y D . Sin tomar en cuenta el efecto de la fricción, determine las reacciones en C , D y E cuando $\theta = 30^\circ$.

4.147 La ménsula en forma de T mostrada en la figura se sostiene mediante una pequeña rueda en E y clavijas en C y D . Sin tomar en cuenta el efecto de la fricción, determine las reacciones en C , D y E cuando $\theta = 30^\circ$.

4.148 Para el bastidor y la carga que se muestran en la figura, determine las reacciones en A y C .

4.149 Determine las reacciones en A y B cuando $\theta = 50^\circ$.

4.150 El poste de 6 m ABC está sostenido en su extremo A por un pivote que se muestra en la figura. El poste se sostiene mediante una junta de rótula en A y por medio de dos cables BD y BE . Si $\theta = 30^\circ$, determine la tensión en cada cable y la reacción en A .

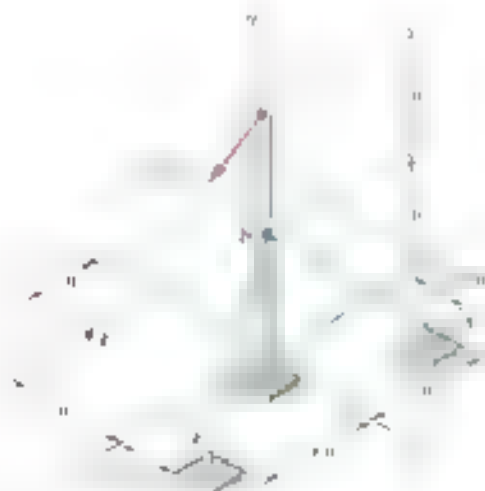


Figura P4.150

4.151 Repetir el problema 4.150 si $\theta = 15^\circ$.

4.152 El elemento rígido ABF en la figura 4.152 se sostiene mediante cables y un apoyo de rótula en A . Para las cargas que se muestran en la figura, determine la tensión en cada cable y la reacción en A .

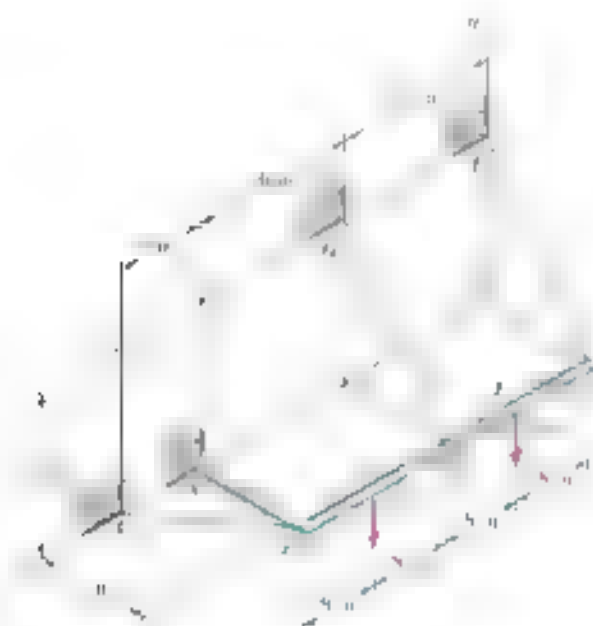


Figura P4.152

4.153 Se aplica una fuerza P sobre una barra doblada ABC la cual se puede sostener de cuatro maneras diferentes, como se muestran en la figura. De ser posible, determine en cada caso las reacciones en los apoyos.

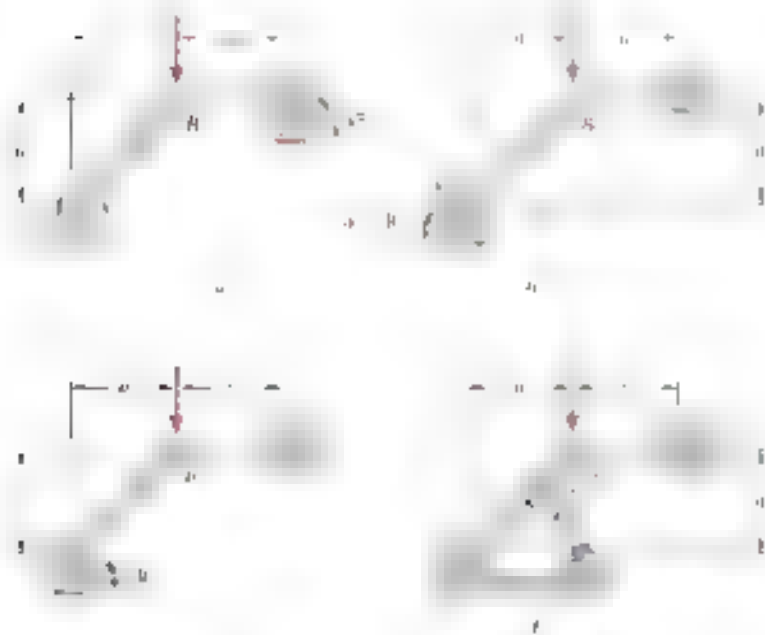


Figura P4.153



4 C1 La posición de la barra en forma de L mostrada en la figura se controla mediante un cilindro hidráulico en el punto B. Si se sabe que la barra soporta una carga de magnitud $P = 50$ lb, utilice software de computadora para determinar la posición de la barra en función de θ para valores desde 0 hasta 120° con incrementos de 10° . Utilice incrementos pequeños que permitan determinar la posición de la barra en el correspondiente θ .



Figura P4.C2



Figura P4.C3



Figura P4.C1

4 C2 La posición de una barra AB de 10 kg se controla por medio del cilindro mostrado en la figura. Éste se mueve lentamente hacia la x , por lo que la acción de la fuerza P . Sin tomar en cuenta el efecto de la fricción, use software para determinar la magnitud de la fuerza P como una función de la posición x del cilindro. La barra AB tiene una longitud de 10 m. Utilice incrementos de 10° para θ y determine los valores apropiados para la posición del cilindro en función de P con los correspondientes de x .

4 C3 y 4.C4 El resorte AB de constante k está ahí deformar cuando $\theta = 0$. Si se sabe que $R = 10$ in., $a = 20$ in. y $k = 3$ lb/in., use software para calcular el ángulo θ en los θ correspondientes a la posición de equilibrio para valores de θ desde 0 hasta 90° con incrementos de 10° . Utilice incrementos pequeños apropiados para determinar el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio cuando $W = 5$ lb.



Figura P4.C4

4.C5 El punto de pivote A está a 10 m del eje de pivote y se sostiene un hilo vertical en la longitud del eje entre A y B . Alde C y D se sujeta a un hilo que se sujeta en un punto de pivote E a 10 m del eje de pivote. Se requiere el texto de la computadora software para calcular y graficar la tensión de los hilos en función de la posición de equilibrio para valores de θ desde 0 hasta 90° en incrementos de 10° . Utilice incrementos menores que 10° para determinar el valor de θ que corresponde a la posición de equilibrio estable en 0 y 90° .

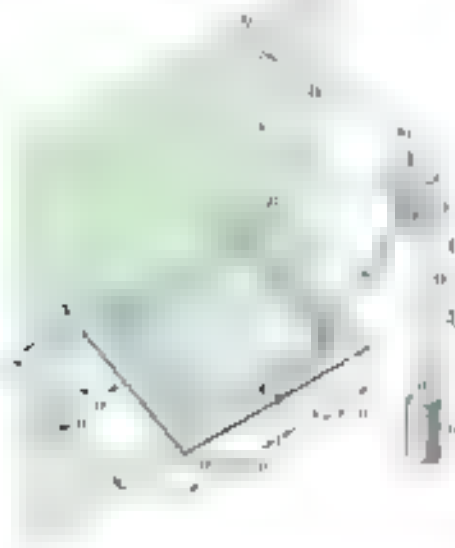


Figura P4.C5

4.C6 La grúa mostrada en la figura sostiene una carga de 2 MN y se sostiene en posición mediante una rúla en A y por medio de dos cables unidos en D y E . Si se sabe que la grúa se encuentra en un plano vertical perpendicular a la página ϕ sobre la línea de pivote, use software de computadora para determinar la tensión de los cables en función de ϕ para $0 \leq \phi \leq 90^\circ$ en incrementos de 10° . Use incrementos menores que 10° para determinar el valor de ϕ para el cual la tensión en el cable BE es máxima.

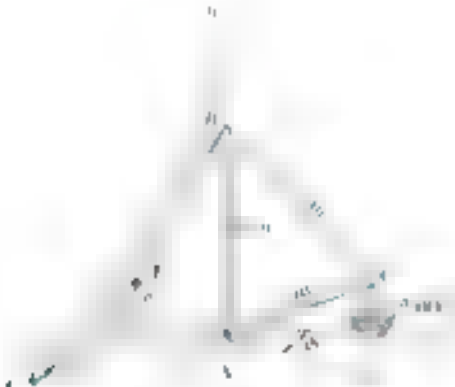


Figura P4.C6

La presa Revelaroto, ubicada en el río
Columba de la Columbia Británica, está
sometida a tres diferentes tipos de cargas
ambientales: su peso en los elementos
que lo conforman, las fuerzas de presión
ejercidas por el agua sobre su cara
sumergida y las fuerzas de presión ejerci-
das por el suelo sobre su base.

CAPÍTULO

5

Fuerzas distribuidas, centroides y centros de gravedad

CAPÍTULO 5 FUERZAS DISTRIBUIDAS, CENTROS DE Y CENTROS DE GRAVEDAD

Introducción

Centro de gravedad de un cuerpo
bidimensional

Centroides de áreas y líneas

Primeros momentos de áreas y
líneas

Placas y alambres compuestos

- Determinación de centroides por
integración

Teoremas de Pappus-Guldinus

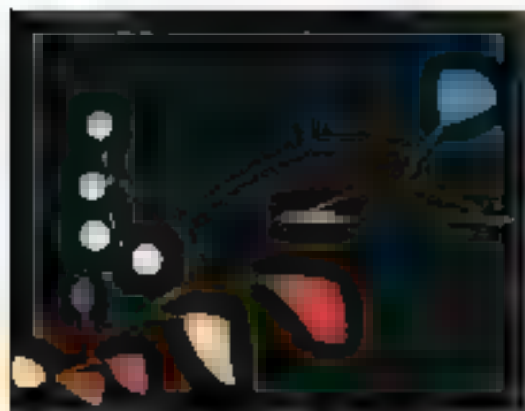
Cargas distribuidas en vigas

Fuerzas sobre superficies
sumergidas

Centro de gravedad de un cuerpo
tridimensional. Centroides de un
volumen

- 5. Cuerpos compuestos

Determinación de centroides de
volumenes por integración



Fotografía 5.1 El balance preciso de los
componentes de un móvil respalda una
comprensión de los centros de gravedad y
centroides, que son los tópicos principales de
este capítulo.

5.1 INTRODUCCIÓN

Hasta ahora se ha supuesto que la atracción ejercida por la Tierra sobre un cuerpo rígido puede representarse por una sola fuerza \mathbf{W} . Esta fuerza es denominada fuerza de gravedad o peso del cuerpo, debida aplicarse en el centro de gravedad del cuerpo (sección 3.2). De hecho, la Tierra ejerce una fuerza sobre cada una de las partículas que constituyen el cuerpo. En consecuencia, la acción de la Tierra sobre un cuerpo rígido debe representarse por una gran número de pequeñas fuerzas distribuidas sobre todo el cuerpo. Sin embargo, en este capítulo se verá que la totalidad de dichas fuerzas pequeñas puede ser reemplazada por una sola fuerza equivalente \mathbf{W} . También se aprenderá cómo determinar el centro de gravedad, esto es, el punto de aplicación de la resultante \mathbf{W} para cuerpos de varias formas.

En la primera parte del capítulo se considerarán algunos problemas relativos a áreas planas y alambres que están constituidos por una sola pieza. Se introducirán conceptos que están muy relacionados con la determinación del centro de gravedad de una placa o de un alambre. Se introducirán los conceptos de un área de un área y el concepto de primer momento de un área y de una línea con respecto a un eje dado.

Después se aprenderá que el cálculo del área de una superficie de revolución o del volumen de un cuerpo de revolución está relacionado directamente con la determinación del centro de la línea o del área utilizándolos para generar dicha superficie o cuerpo de revolución. Teoremas de Pappus-Guldinus). Además, en los secciones 5.8 y 5.9, la determinación del centro de un área simple y los cálculos de vigas sujetas a cargas distribuidas y el cálculo de las fuerzas ejercidas sobre superficies rectangulares sumergidas, con los comportamientos de solera y portones de presas.

Al final del capítulo se aprenderá cómo determinar tanto el centro de gravedad de cuerpos tridimensionales como el centro de gravedad de volúmenes y los primeros momentos de dicho volúmenes con respecto a los ejes principales.

AREAS Y LINEAS

5.2 CENTRO DE GRAVEDAD DE UN CUERPO BIDIMENSIONAL

Para el caso de un cuerpo que puede ser una placa horizontal (figura 5.1). La placa puede tener secciones homogéneas o no homogéneas. Las coordenadas del punto

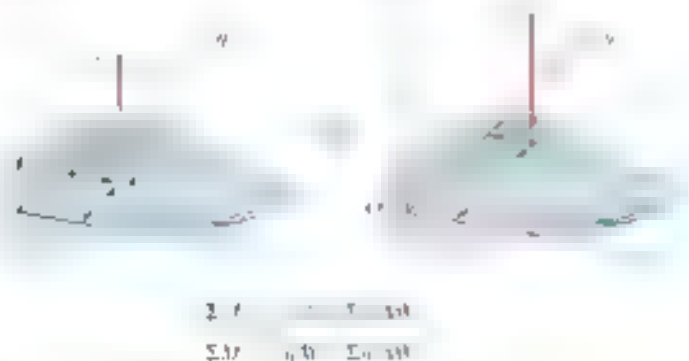


Figura 5.1 Centro de gravedad de un

Los elementos se representan con x y y . Las distancias del elemento se representan con x_i y y_i . Las fuerzas gravitacionales por la Tierra sobre los elementos de la placa son representadas respectivamente con $\Delta W_1, \Delta W_2, \dots, \Delta W_n$. Estas fuerzas pesadas están dirigidas verticalmente hacia la Tierra, sin embargo, para todos los i , los puntos P_i se pueden suponer que dichos puntos son paralelos. Por lo tanto, las resultantes de las fuerzas gravitacionales son paralelas. La magnitud W de la fuerza se obtiene a partir de la suma de las magnitudes de los pesos de los elementos:

$$\sum W = W = \Delta W_1 + \Delta W_2 + \dots + \Delta W_n$$

para obtener las coordenadas x y y del punto C , donde debe aplicarse el resultante W se usa el hecho de que el momento W en x es igual al momento ΔW_i en x para cada uno de los n elementos. Los momentos correspondientes a los pesos elementales, esto es

$$\frac{\sum W x_i}{\sum W} = \bar{x}W = x_1 \Delta W_1 + x_2 \Delta W_2 + \dots + x_n \Delta W_n \quad (5.1)$$

$$\frac{\sum W y_i}{\sum W} = \bar{y}W = y_1 \Delta W_1 + y_2 \Delta W_2 + \dots + y_n \Delta W_n$$

Si ahora se incrementa el número de elementos en las placas se ha dividido a placas y sumando los momentos, el límite de división elemento se obtienen, en el límite, las siguientes expresiones:

$$W = \int dW, \quad \bar{x}W = \int x dW, \quad \bar{y}W = \int y dW \quad (5.2)$$

Estas ecuaciones definen el peso W y las coordenadas x y y del centro de gravedad C de la placa plana. Se puede derivar las ecuaciones anteriores y los momentos \bar{x} y \bar{y} se encuentran en el momento W está en el punto C que se encuentra en el centro de gravedad C de la placa plana. Se obtiene que el momento W en x es igual al momento ΔW_i en x para cada uno de los n elementos. Los momentos correspondientes a los pesos elementales, esto es

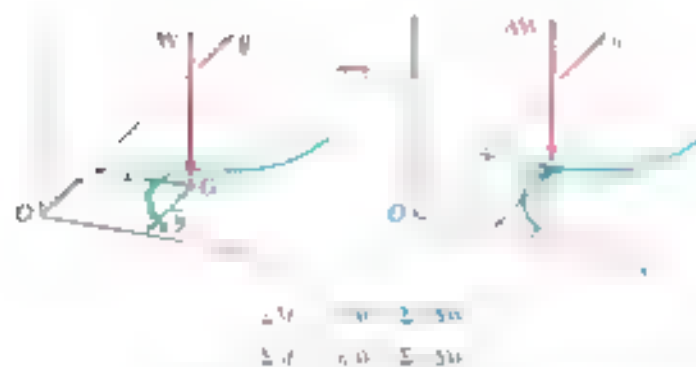


Figura 5.2 Centro de gravedad de un miembro

En el caso de una placa plana homogénea de espesor uniforme la magnitud ΔW de un elemento de la placa puede expresarse como:

$$\Delta W = \gamma \Delta A$$

donde γ = peso específico del material por unidad de volumen del material

t = espesor de la placa

ΔA = área del elemento

En forma similar se puede expresar la magnitud W de peso de toda la placa como:

$$W = \gamma t A$$

donde A es el área total de la placa.

Si se emplean las unidades del sistema de unidades inglesas se puede expresar el peso específico γ en lb/ft^3 , el espesor t en pies y las áreas ΔA , A en pies cuadrados. Entonces se obtiene para ΔW y W en libras que si se usan en libras γ se usan en unidades de lb/ft^3 se debe expresar a γ en N/m^3 a t en metros y a las áreas ΔA y A en metros cuadrados entonces los pesos ΔW y W serán expresados en newtons.

Si se sustituye a ΔW y a W en las ecuaciones de momento (5.1) y se divide a todos los términos entre γt se obtiene:

$$\frac{\sum M}{\sum A} = \frac{tA}{\sum A} = \frac{\Delta A_1}{\sum A} + \frac{\Delta A_2}{\sum A} + \dots + \frac{\Delta A_n}{\sum A}$$

$$\sum M_i = \gamma t A = \gamma_1 \Delta A_1 + \gamma_2 \Delta A_2 + \dots + \gamma_n \Delta A_n$$

Si se incrementa el número de elementos en los cuales se divide el área ΔA y el área total se disminuye el tamaño de cada elemento se obtiene el límite:

$$A = \int t dA = \int q dA \quad (5.3)$$

Estas ecuaciones del momento pueden escribirse q del centro de gravedad de una placa homogénea. Entiendo en estas ecuaciones que $q = \gamma t$ si se emplea el sistema de unidades del sistema inglés y $q = \gamma t$ si se emplea el sistema de unidades del sistema métrico. Si el material es homogéneo estas ecuaciones se pueden escribir en forma de momento de centro de gravedad de la placa sin importar estas ecuaciones en unidades métricas.

En el caso de un alambre homogéneo de sección transversal uniforme la magnitud ΔW el peso de un elemento de alambre puede expresarse como:

$$\Delta W = \gamma \pi \Delta L$$

donde γ = peso específico del material

a = área de la sección transversal del alambre

ΔL = longitud del elemento

*Se debe señalar que en el Sistema Internacional de unidades generalmente se usa a veces un material dado por su densidad ρ masa por unidad de volumen en lugar de expresarlo por su peso específico γ . Entonces el peso específico del material se puede obtener a partir de la relación:

$$\gamma = \rho g$$

donde $g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Como ρ se expresa en kg/m^3 se observa que γ estará expresado en N/m^3 .



Figura 5.3

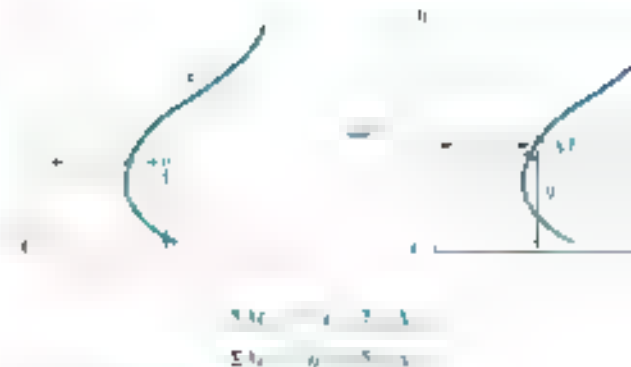


Figura 5.4

El centro de gravedad de una alambre coincide con el *centroide* C de la línea L que define la forma del alambre (Figura 5.4). Las coordenadas \bar{x} y \bar{y} del centroide de una línea se obtienen a partir de las ecuaciones

$$\bar{x} = \frac{\int x dL}{L} \quad \bar{y} = \frac{\int y dL}{L} \quad (5.3)$$

5.4 PRIMEROS MOMENTOS DE AREAS Y LINEAS

La integral $\int y dA$ en las ecuaciones 5.1 de la sección anterior se conoce como el *primer momento del área* A con respecto al eje y y se representa con Q_y . El momento similar con respecto al eje x se conoce como el *primer momento de* A con respecto al eje x y se representa con Q_x . Así se escribe

$$Q_y = \int y dA \quad Q_x = \int x dA \quad (5.4)$$

Si comparamos las ecuaciones 5.4 con las ecuaciones 5.3 se observa que los primeros momentos del área A pueden ser expresados como los productos del área con las coordenadas de su centroide:

$$Q_y = \bar{x}A \quad Q_x = \bar{y}A \quad (5.5)$$

A pesar de las ecuaciones 5.5 se concluye que las ecuaciones del centroide de un área pueden obtenerse al dividir los primeros momentos de cada área entre el área misma. Los primeros momentos se conocen en la práctica solo cuando se la descomponen en áreas simples para determinar los esfuerzos de corte en vigas sujetas a cargas transversales. Por último, a partir de las ecuaciones 5.5 se observa que si el centroide de un área está localizado sobre un eje, donde dicho eje es el primer momento de la línea con respecto a ese eje, el primer momento de la línea con respecto a ese eje es igual a cero. Entonces, si el centroide de un área está localizado sobre el eje y , se tiene

Se puede utilizar ecuaciones similares a partir de las ecuaciones 5.3 y 5.4 para determinar los primeros momentos de una línea con respecto a los ejes x y y y para expresar dichos momentos como los productos de la longitud L de la línea y las coordenadas \bar{x} y \bar{y} de su centroide:

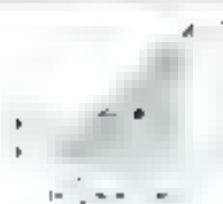
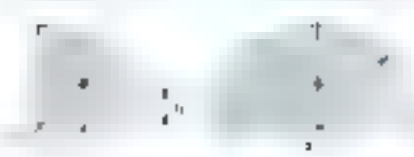
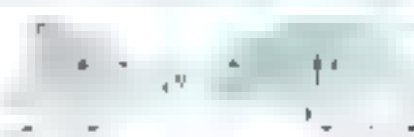
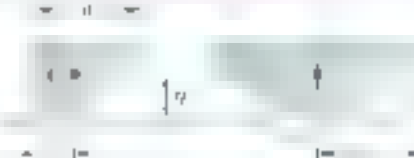
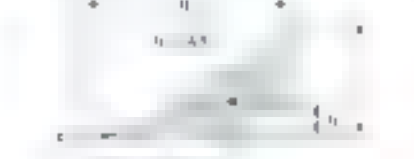


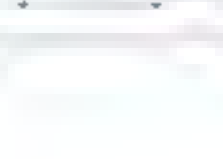

		u_1	v_1
Vertical displacement		u_1	v_1
Horizontal displacement		v_1	u_1
Rotation		θ_1	θ_1
Vertical displacement		u_2	v_2
Horizontal displacement		v_2	u_2
Rotation		θ_2	θ_2
Vertical displacement		u_3	v_3
Horizontal displacement		v_3	u_3
Rotation		θ_3	θ_3

Figure 5.8A



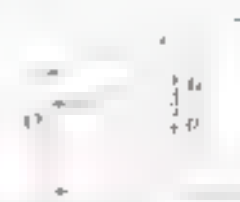
Forma		\bar{x}	\bar{y}	Longitud
Arco circular de radio r y ángulo α		$\frac{2r \sin \alpha}{3\alpha}$	$\frac{2r(1 - \cos \alpha)}{3\alpha}$	$r\alpha$
Arco semicircular		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{2r}{\pi}$	πr
Arco de espesor t		$\frac{2r \sin \alpha}{3\alpha}$	$\frac{2r(1 - \cos \alpha)}{3\alpha}$	$2r\alpha$

Figura 5.4B

5.5. PLACAS Y ALAMBRES COMPUESTOS

El momento de inercia de una placa compuesta puede expresarse en términos de los momentos de inercia de las formas comunes cuyas áreas están dadas en la figura 5.5A. La abscisa \bar{x} de su centro de gravedad G puede determinarse a partir de las abscisas $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ de los centros de gravedad de las diferentes partes que constituyen la placa, expresando que el momento del peso de toda la placa con respecto al eje y es igual a la suma de los momentos de los pesos de las diferentes partes con respecto a ese mismo eje (Figura 5.5). La abscisa \bar{x} del centro de gravedad de la placa se determina de la siguiente forma: si $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ son los momentos con respecto al eje y . Así, se escribe:

$$\Sigma M_y = \bar{x}_1 W_1 + \bar{x}_2 W_2 + \dots + \bar{x}_n W_n = \bar{x} (W_1 + W_2 + \dots + W_n) = \bar{x} W$$

$$\Sigma M_y = \bar{y}_1 W_1 + \bar{y}_2 W_2 + \dots + \bar{y}_n W_n = \bar{y} (W_1 + W_2 + \dots + W_n) = \bar{y} W$$

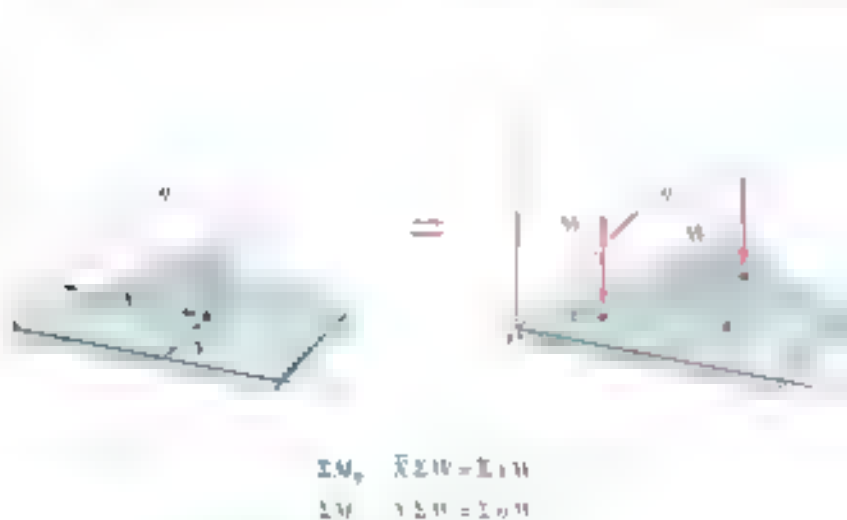


Figura 5.5 Centro de gravedad de una placa compuesta

$$X \sum W = \sum xW = X \sum W = \sum xW \quad (5.1)$$

Estas ecuaciones se pueden resolver para las coordenadas X y Y del centro de gravedad de la placa.



Figure 5.10 Centroid of a composite area

Si la placa es homogénea y de espesor uniforme, el centro de gravedad coincide con el centroide C de su área. La abscisa X del centro de gravedad puede obtenerse observando que el primer momento Q_x del área compuesta con respecto al eje x que pasa por el pericentro de X con el área total y como la suma de los primeros momentos de las áreas elementales con respecto al eje x (para $Y = 0$). La ecuación Y de simetría se encuentra de forma similar considerando el primer momento Q_y del área compuesta. Así, se tiene

$$Q_x = X(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = x_1A_1 + x_2A_2 + \dots + x_nA_n$$

$$Q_y = Y(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = y_1A_1 + y_2A_2 + \dots + y_nA_n$$

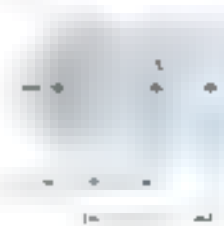
o en forma condensada,

$$X_c = X \sum A = \sum xA \quad Y_c = Y \sum A = \sum yA \quad (5.2)$$

Estas ecuaciones relacionan los primeros momentos de la placa con respecto al eje x o y con las coordenadas X y Y del centroide.

Se debe tener cuidado de asignar el signo apropiado al momento de cada una de las áreas elementales de la placa. Aunque las coordenadas de las áreas pueden ser positivas o negativas. Por ejemplo, una área elemental situada a la izquierda del eje x tendrá un primer momento negativo x con respecto al eje x . Así, así al área de un agujero se le debe asignar un signo negativo (figura 5.11).

De manera análoga, las áreas positivas tienen el centro de gravedad de su área coincidiendo con el centroide de su área compuesta dividido al dividir en la placa en elementos más simples (véase problema resuelto 5.2)



A: Área elemental	+
A: Área elemental con signo	-
A: Área elemental con signo	+
A: Área elemental con signo	-

Figure 5.11



PROBLEMA RESUELTO 5.1

Se desea hallar el centro de gravedad del perfil de la máquina, por medio de la descomposición en rectángulos, como se ilustra.

SOLUCIÓN

1. Componentes del área. El área se obtiene con la suma de las rectángulos que conforman el perfil, como se ilustra. Se descompone el perfil en tres rectángulos, para determinar los centros de gravedad y luego se obtiene el centro de gravedad del perfil por el método de los momentos. Se debe considerar que el centro de gravedad de cada uno de los rectángulos se obtiene por la fórmula $\bar{x} = b/2$ y $\bar{y} = h/2$, donde b es el ancho y h es la altura del rectángulo. Se debe considerar que el centro de gravedad del perfil se obtiene por el método de los momentos, como se ilustra.



Componente	A, mm ²	x, mm	y, mm	$x\bar{A}$, mm ³	$y\bar{A}$, mm ³
$S_1 = 120 \times 40$ mm ²	$(120)(40) = 4,8 \times 10^3$ mm ²	60	40	$+ 288 \times 10^3$ mm ³	$+ 192 \times 10^3$ mm ³
$S_2 = 60 \times 40$ mm ²	$(60)(40) = 2,4 \times 10^3$ mm ²	30	40	$+ 96 \times 10^3$ mm ³	$+ 96 \times 10^3$ mm ³
$S_3 = 60 \times 40$ mm ²	$(60)(40) = 2,4 \times 10^3$ mm ²	90	40	$+ 288 \times 10^3$ mm ³	$+ 96 \times 10^3$ mm ³
Total	$9,6 \times 10^3$ mm ²			$+ 672 \times 10^3$ mm ³	$+ 384 \times 10^3$ mm ³

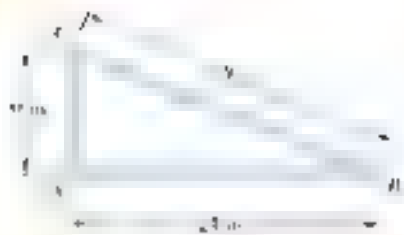
a) **Primeros momentos del área.** Con las ecuaciones (5.8), se escribe:

$$\bar{x} = \frac{\sum x\bar{A}}{\sum A} = \frac{672 \times 10^3 \text{ mm}^3}{9,6 \times 10^3 \text{ mm}^2} = 70 \text{ mm} \quad \leftarrow$$

b) **Localización del centroide.** Si se substituyen los valores dados en la tabla, dentro de las ecuaciones que definen el centroide de un área compuesta se obtiene:

$$\bar{x} = \frac{\sum x\bar{A}}{\sum A} = \frac{672 \times 10^3 \text{ mm}^3}{9,6 \times 10^3 \text{ mm}^2} = 70 \text{ mm} \quad \leftarrow$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y\bar{A}}{\sum A} = \frac{384 \times 10^3 \text{ mm}^3}{9,6 \times 10^3 \text{ mm}^2} = 40 \text{ mm} \quad \leftarrow$$



PROBLEMA RESUELTO 5.2

La figura muestra una estructura compuesta por tres partes de un mismo material homogéneo. Determine la ubicación de su centro de gravedad.



SOLUCIÓN

Como la figura está hecha de un alambre homogéneo, su centro de gravedad coincide con el centroide de la línea compuesta por los tres segmentos. Si se seleccionan los ejes mostrados, con origen en O , y se definen las coordenadas de los centroides de cada segmento como x_i y y_i , se determinan los primeros momentos con respecto a los ejes x e y de cada uno de los

Segmento	L , m	x , m	y , m	xL , m ²	yL , m ²
AB	4	2	0	8	0
BC	3	3	3	9	9
CA	5	1	3	5	15
	$\Sigma L = 12$	$\Sigma x = 6$	$\Sigma y = 6$	$\Sigma xL = 22$	$\Sigma yL = 24$

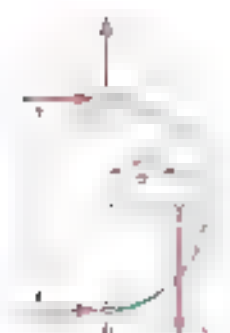
Con los valores de los valores anteriores en la tabla, en las ecuaciones que definen el centroide de una línea compuesta, se obtiene:

$$\begin{aligned} \bar{x} \Sigma L &= \Sigma xL_i & \bar{x}(12 \text{ m}) &= 22 \text{ m}^2 & \bar{x} &= 1.83 \text{ m} \\ \bar{y} \Sigma L &= \Sigma yL_i & \bar{y}(12 \text{ m}) &= 24 \text{ m}^2 & \bar{y} &= 2 \text{ m} \end{aligned}$$



PROBLEMA RESUELTO 5.3

Una barra semicircular uniforme de peso W y radio r está unida a un punto en A por su diámetro y a una superficie horizontal por el punto B . Determine las reacciones en A y B .



SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Se dibuja un diagrama de cuerpo libre de la barra considerando que albar se trata la barra semicircular de peso W . En este diagrama se representan las fuerzas de gravedad W en el centro geométrico G y las reacciones en los puntos de apoyo A y B . Se muestra el punto A en el extremo superior izquierdo del diámetro y el punto B en el extremo inferior derecho del diámetro.

Ecuaciones de equilibrio

$$\sum W = 0 \quad B - W = 0$$

$$B = W$$

$$B = W \rightarrow \leftarrow$$

$$\sum F_x = 0 \quad A_x + B = 0$$

$$A_x = -B = -\frac{W}{2} \quad A_x = \frac{W}{2} \leftarrow$$

$$+\sum F_y = 0 \quad A_y - W = 0 \quad A_y = W \uparrow$$

Sumando las dos componentes de la reacción en A :

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

$$\tan \alpha = \frac{A_y}{A_x} = 2$$

Las respuestas finales pueden expresarse como sigue:

$$A = \frac{W}{2} \leftarrow \quad B = W \rightarrow \leftarrow$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se desarrollan las ecuaciones generales para la zona los centros de gravedad de cuerpos de geometría y dimensiones constantes. Las ecuaciones de áreas planas, volúmenes y momentos de inercia en las formas elementales y los problemas de aplicación que se presentarán en esta sección se vincularán con los conceptos de áreas, volúmenes y momentos de inercia que se han introducido en las secciones anteriores de esta planeación (ver figuras 5.3).

El primer ejemplo de la sección 5.1 ilustra la resolución de problemas de este tipo. Sin embargo, hay ciertos puntos que se deben enfatizar.

Primero, en la solución debe ser de utilidad como constructores para el estudiante, como puede verse en la figura 5.3. Se debe considerar que, en general, las áreas, volúmenes y momentos de inercia se pueden encontrar de varias maneras. Además, mostrar las diferentes componentes como se hace en el problema de ejemplo 5.1 ayudará a los estudiantes a comprender los volúmenes y las áreas de integración. No debe olvidarse que, para determinar los momentos de inercia, se puede usar la fórmula.

Se recomienda que, para cada problema se construya una tabla que contenga las áreas o los momentos y los centroides respectivos de sus partes. Se debe considerar que las áreas que son negativas que no se agregan se debe a razones físicas. Además se debe incluir el signo de las coordenadas negativas. Finalmente, se debe observar la aplicación de signos de los tres componentes.

Cuando sea posible, se deben hacer consideraciones de simetría (ver ejemplo 5.4) para los problemas de mayor dificultad de la sección de un capítulo.

En las fórmulas de la figura 5.4, el sector circular θ debe ser el ángulo del círculo y el ángulo siempre debe ser expresado en radianes.

El ejemplo 5.5 ilustra la resolución de problemas de este tipo. Los momentos pueden ser encontrados en un área y se determinan los perfiles geométricos de un área son volúmenes y momentos de inercia. Estos últimos son necesarios para determinar la forma. Además, como se muestra en la sección 5.1, se debe tener en cuenta el momento de un área con respecto a un eje centroidal es igual a cero.

El ejemplo 5.6 ilustra la resolución de problemas de este tipo. Los problemas que se presentan en esta sección se consideran que los estudiantes deben resolverlos por las áreas y volúmenes de gravedad, considerando con sus centroides. Además, cuando se encuentra esta suspensión de un solo punto está en equilibrio, es común y el centro de gravedad de un cuerpo debe estar en los puntos de suspensión.

Por lo tanto, los problemas de los problemas en esta sección se pueden resolver con la ecuación de la ecuación 5.1. Se recomienda que se agregue una ecuación de la ecuación 5.1 para los problemas que se encuentran en esta sección.

Problemas

5.1 a 5.9 Localice el centroide del área plana que se muestra en cada

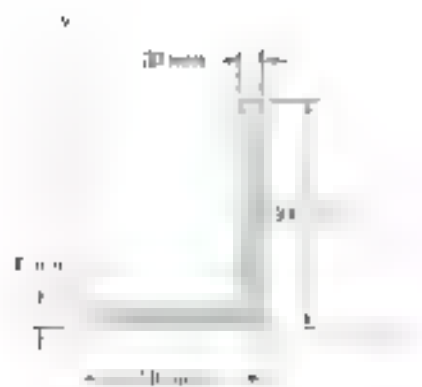


Figura P5.1



Figura P5.2



Figura P5.3



Figura P5.4

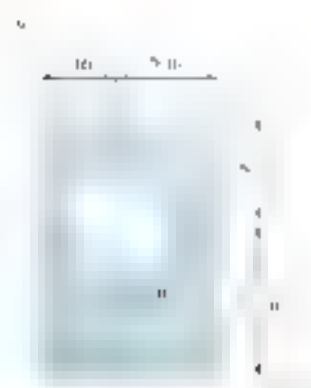


Figura P5.5

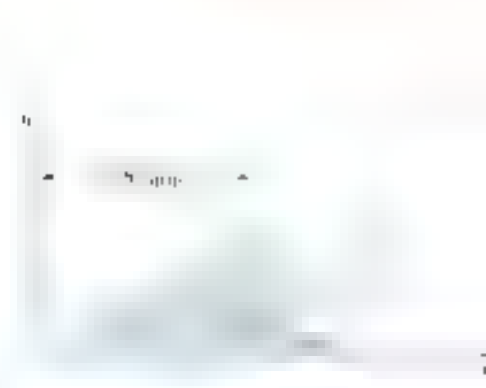


Figura P5.6



Figura P5.7



Figura P5.8

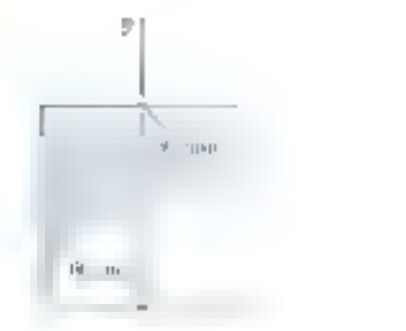


Figura P5.9

5.10 a 5.15 Localice el centroide del área plana que se muestra en cada figura.



Figura P5.10



Figura P5.11



Figura P5.12

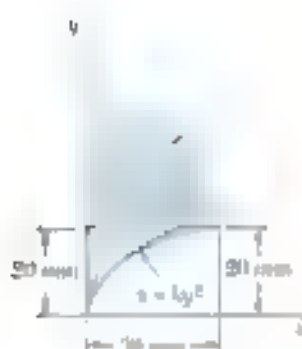


Figura P5.13

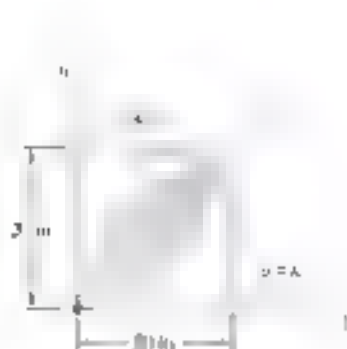


Figura P5.14

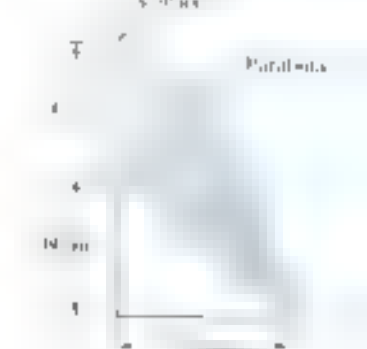


Figura P5.15

5.16 Determine la coordenada y del centroide del área sombreada en términos de r_1 , r_2 y α .

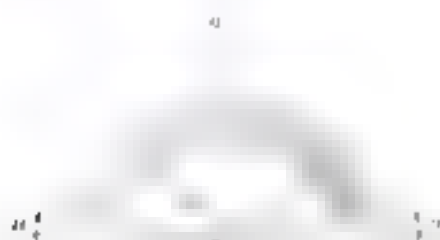


Figura P5.16 y P5.17

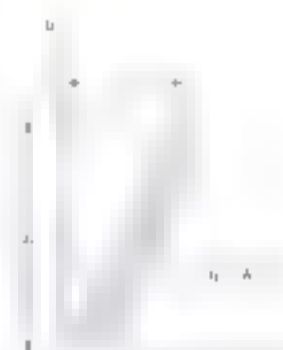


Figura P5.18

5.17 Demuestre que si el triángulo ABC es isósceles, entonces su centroide coincide con el centroide de un arco circular de radio $(r_1 + r_2)/2$.

5.18 Para el área mostrada, determine la relación a/b tal que $\bar{x} = \bar{y}$.

5.19 Para el área sombreada del problema 5, determine la relación r_2/r_1 tal que $\bar{y} = 3r_1/4$.

5.20 La carga compuesta se muestra en la figura. Las alas y el alma tienen $b = 60 \text{ mm}$ y $t = 2 \text{ mm}$, y el alma se divide en partes iguales de espesores a lo largo de la z , la cual sostiene la carga vertical. Como se demuestra en la mecánica de materiales, las fuerzas cortantes ejercidas sobre los pernos en A y B son proporcionales a los productos I_{xy} y I_{yz} respectivamente, de los centroides de las alas y el alma. Calcule I_{xy} y I_{yz} para el alma y las alas y determine la fuerza ejercida sobre el perno en B .

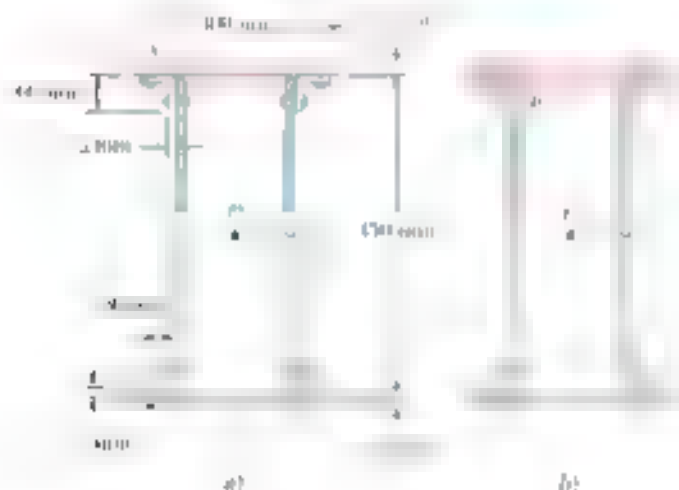


Figura P5.20

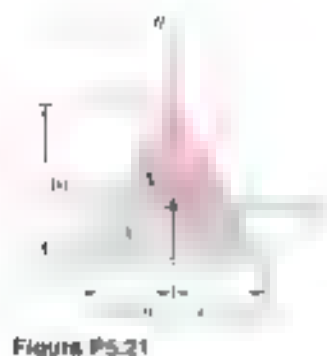


Figura P5.21

5.21 y 5.22 El eje horizontal x se trata a través del centroide C y de cada una de las áreas A_1 y A_2 (Figura P5.22). Calcule el momento de cada área compuesta respecto del eje x , y explique los resultados obtenidos.

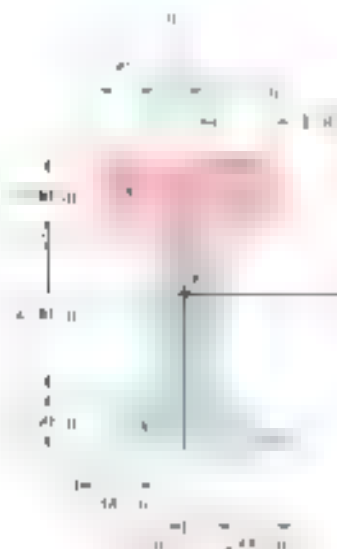


Figura P5.22

5.23 El armario en la foto es apoyado sobre la pared en la parte superior y sobre una rueda que se desliza sobre la figura se representa con Q_1 y Q_2 . Expresar Q_1 en términos de Q_2 y viceversa. ¿Hay alguna fuerza de atracción o repulsión entre las ruedas? ¿por qué? ¿Se balancea el cable y por qué? ¿Hay alguna fuerza de atracción o repulsión entre las ruedas?

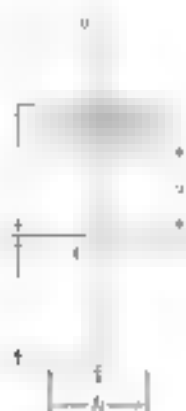


Figura P5.23

5.24 a 5.27 El sistema de cables homogéneos se muestra para formar el cable de las torres de la figura. Las torres están unidas por cables que se muestran en la figura formando el cable de la torre.

5.24 Figura P5.1

5.25 Figura P5.2

5.26 Figura P5.3

5.27 Figura P5.7

5.28 Una barra circular uniforme con 5 lb de peso y 10 m de cable se une a un pasador en C y al cable AB. Determine a) la tensión en el cable b) la reacción en C.



Figura P5.28

5.29 El elemento ABCDE forma parte de un móvil y se basa a partir de una sola pieza de tubería de aluminio. Si se sabe que el elemento está apoyado en C y que el cable AB es homogéneo, la longitud de la tubería que permanece horizontal BCDE del elemento permanece horizontal.

5.30 El elemento ABCDE forma parte de un móvil y se basa a partir de una sola pieza de tubería de aluminio. Si se sabe que el elemento está apoyado en C y que el cable AB es homogéneo, la longitud de la tubería que permanece horizontal BCDE del elemento permanece horizontal.

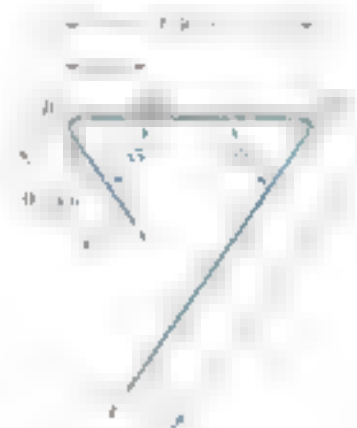


Figura P5.29 y P5.30



Figura P5.31

5.31 El alambre homogéneo ABC está doblado en un arco semicircular en la sección recta como se muestra en la figura, además se encuentra sujeto a una articulación en A. Determine el valor de h tal que el alambre se encuentre en equilibrio en la posición indicada.

5.32 Determine la distancia h tal que el centroide del área sombreada esté tan lejos como sea posible de la línea BB' cuando a) $h = 0.10$ y b) $h = 0.50$.

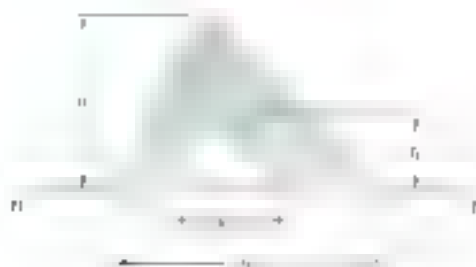


Figura P5.32 y P5.33

5.33 Si se sabe que la distancia h se seleccionó para maximizar la distancia h de la línea BB' hasta el centroide del área sombreada, demuestre que $h = 2h_1$.

5.6 DETERMINACIÓN DE CENTROIDES POR INTEGRACIÓN

El centroide de un área puede hallarse por diversas maneras, tales como el uso de fórmulas para secciones algebraicas, por la geometría de centroides, o mediante los integrales que aparecen en las ecuaciones (5.3) de la sección 5.1.

$$\bar{x}A = \int x dA \quad \bar{y}A = \int y dA \quad (5.3)$$

Si se divide el área dA en secciones rectangulares de lados dx y dy , la integración de las ecuaciones (5.3) se puede hacer en forma generalizada con respecto a x y y . También es necesario tener en cuenta los límites de integración con respecto a las polares para las áreas dA y en el caso de la línea dx y $r d\theta$.

Sin embargo, en la mayoría de los casos es posible determinar las coordenadas del centroide de un área en forma sencilla. Esto se logra seleccionando dA como un rectángulo o como un triángulo o como un sector circular (véase figura 5.12). El centroide de un rectángulo dado está localizado en su centro y el centroide de un sector rectangular está localizado en la línea que lo divide en dos partes iguales. En el caso de un triángulo, el centroide está localizado en la línea que lo divide en tres partes iguales. Por tanto, las coordenadas del centroide de un área en un sistema de coordenadas cartesianas se expresan como el promedio ponderado de las coordenadas de los centroides de las partes que la componen. Es decir, la suma de los momentos de las partes con respecto al eje x es igual a la suma de los momentos de las partes con respecto al eje y . Por lo tanto, si se conoce la posición del centroide del elemento dA , se escribe

$$\bar{x}_0 = \frac{1}{A} \int \bar{x} dA \quad (5.9)$$

$$\bar{y}_0 = \frac{1}{A} \int \bar{y} dA$$

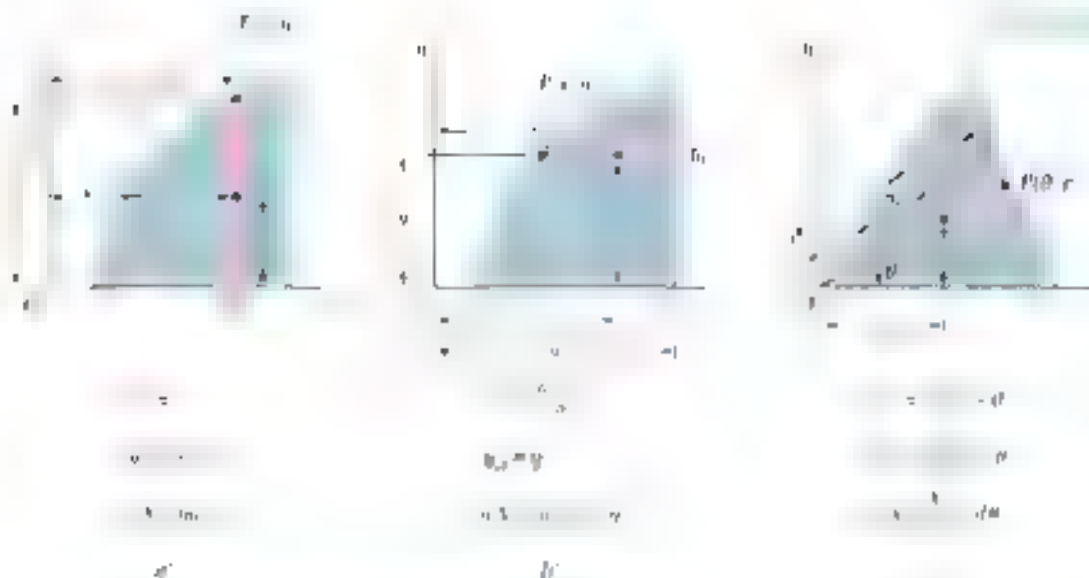


Figure 6.12

Se el área A puede ser sumada a trozos, también puede calcularse a partir de estos elementos.

Las coordenadas \bar{x} y \bar{y} del centroide del elemento dA de área dA pueden expresarse en términos de las coordenadas x y y midiendo sobre la línea que limita al área en consideración. Además, el área del elemento dA debe expresarse en términos de las coordenadas de dicho punto x y y por las relaciones apropiadas. Así, se puede encontrar \bar{x} y \bar{y} en x y y para los elementos dA apropiados. La primera ecuación de la parte (a) debe utilizarse cuando x es una función de y que limita al área en esta dirección; coordenadas similares \bar{y} y dA se expresan en términos apropiados en las formulas (5.3) y de donde se puede encontrar \bar{x} y \bar{y} en x y y en la dirección x midiendo \bar{x} en términos de la otra. De esta forma, se reduce a una sola integración. A la vez, se puede encontrar el área A ha sido evaluada en las ecuaciones (5.4) si las ecuaciones pueden resolverse para las coordenadas \bar{x} y \bar{y} del centroide del área.

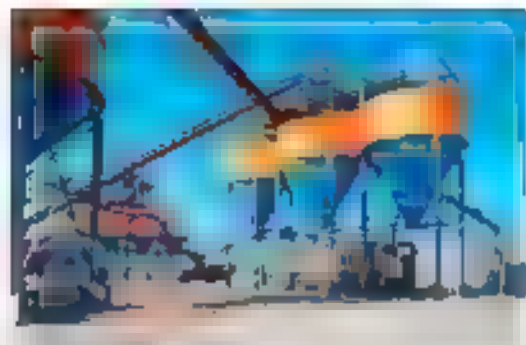
Cuando una ecuación del área puede ser integrada, integrando directamente x y y al área A en las integrales de área en las ecuaciones (5.4) de la sección 5.3:

$$\bar{x}L = \int x dL \quad \bar{y}L = \int y dL \quad (5.4)$$

El incremento de longitud dL de la curva puede ser uno de las siguientes expresiones que dependen de cuál coordenada x o y y dL se selecciona como una variable independiente o como una derivada por medio de la línea. Las expresiones pueden derivarse con el uso del teorema de Pitágoras:

$$dL = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy$$

$$dL = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta$$



Fotografía 5.2 Todos los tanques de almacenamiento que se muestran en la fotografía son cuerpos de revolución. Por tanto, las áreas de sus superficies y sus volúmenes pueden determinarse con los teoremas de Pappus-Guldinus.

Después de que se ha utilizado la ecuación de la línea para expresar una h , las coordenadas en términos de la otra, se puede llevar a cabo el cálculo y se pueden resolver las ecuaciones (5.4) para las coordenadas x y y del centro de la línea.

5.7 TEOREMAS DE PAPPUS-GULDINUS

Estos teoremas fueron formulados primero por el geómetra griego Pappus durante el segundo siglo y fueron replanteados posteriormente por el matemático suizo Guldinus o Guldin (1577-1643), en el siglo XVII. Los teoremas de Pappus-Guldinus son:

Una superficie de revolución se genera mediante la rotación de una curva plana con respecto a un eje fijo. Por consiguiente, se puede

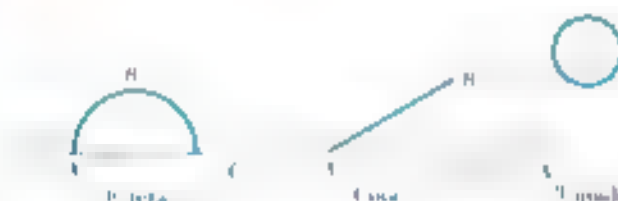


Figura 5.13

puede obtener la superficie de una esfera rotando un arco semi-circular AB con respecto al diámetro AC ; se puede producir la superficie de un cono rotando una línea recta AB con respecto a un eje AC ; se puede generar la superficie de un toroide o anillo rotando la circunferencia de un círculo con respecto a un eje que no interseca dicha circunferencia. Una curva plana cualquiera se genera mediante la rotación de un área plana cualquiera con respecto a un eje fijo. Como se muestra en la figura 5.14, se puede generar una esfera, un cono y un toroide rotando la figura apropiada con respecto al eje que se indica.

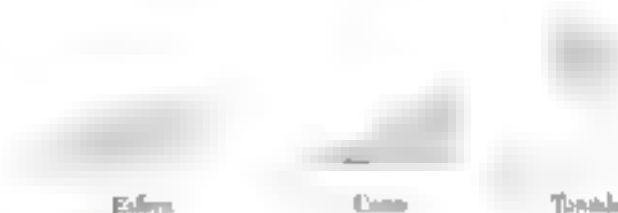


Figura 5.14

TEOREMA 1. El área de una superficie de revolución es igual a la longitud de la curva generatriz, multiplicada por la distancia recorrida por el centro de dicha curva al rotarse, lo genera la superficie.

Demostración. Considérese un elemento dL de la línea L , figura 5.15. Al rotar, describe la circunferencia AB generada, por lo tanto, el área dA es igual a $2\pi y dL$. Por tanto, el área total generada por L es $A = \int 2\pi y dL$. En la ecuación (5.4) se encuentra por consiguiente $y dL$ es igual a $dA/2\pi$, así que se tiene:

$$A = 2\pi yL$$

$$(5.6)$$



Figure 5.15

donde $2\pi\bar{y}$ es la distancia recorrida por el elemento dA (véase Fig. 5.15). Se puede observar que el volumen V generado al revolear el área A alrededor del eje y es igual al área A multiplicada por la distancia recorrida por el elemento dA que genera el área A . Este teorema sigue preguntándose: ¿cómo se puede aplicar?

TEOREMA II. El volumen de un cuerpo de revolución es igual al área generatriz multiplicada por la distancia recorrida por el centro del área al momento de generar el cuerpo.

Demostración. Considérese un elemento dA del área A , el cual se rota sin respecto al eje y (véase Fig. 5.16). El volumen dV generado por

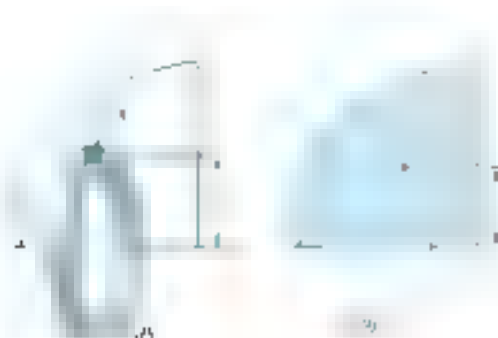


Figure 5.16

el elemento dA es igual a $2\pi\bar{y}dA$. Por tanto, el volumen V generado por A es $V = \int 2\pi\bar{y}dA$, puesto que la integral $\int dA$ es igual a A (sección 5.3), se tiene

$$V = 2\pi\bar{y}A \quad (5.11)$$

donde $2\pi\bar{y}$ es la distancia recorrida por el elemento dA . Es importante señalar que este teorema sólo puede aplicarse si el eje de revolución interseca al área generatriz.

Los teoremas de Pappus-Guldinus pueden ser muy útiles para determinar el volumen de superficies de revolución. Los volúmenes de los cuerpos de revolución (Fig. 5.17) se pueden determinar si se emplean para ello alguno de los teoremas de Pappus-Guldinus, aplicando el área de la sección generatriz A y la distancia recorrida $2\pi\bar{y}$ por el elemento dA . Es posible determinar el volumen del cuerpo generado por el área A si el centro del área es conocido (véase el problema resuelto 5.8).



PROBLEMA RESUELTO 5.4

Determine por integración por partes el momento de inercia de la figura con respecto al eje y .

SOLUCIÓN

Determinación de la constante k . El valor de k se determina sustituyendo $x = a$, $y = b$ en la ecuación. Se tiene $b = ka$ y $k = b/a$. Por tanto, la ecuación es $y = (b/a)x$.

$$y = \frac{b}{a}x \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{b}y = x$$

Elemento diferencial vertical. Se selecciona el elemento diferencial mostrado y se determina el área total de la figura.

$$A = \int dA = \int_0^a y \, dx = \int_0^a \frac{b}{a}x \, dx = \frac{b}{a} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^a = \frac{ab}{2}$$

El primer momento del elemento diferencial con respecto al eje y es x^2 por tanto el momento total de toda el área es

$$Q_y = \int x^2 dA = \int_0^a x^2 y \, dx = \frac{b}{a} \int_0^a x^3 \, dx = \frac{b}{a} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^a = \frac{ab^3}{4}$$

Como $Q_y = \bar{x}A$ se tiene que

$$\bar{x} = \frac{Q_y}{A} = \frac{ab^3/4}{ab/2} = \frac{3a}{4}$$

De la misma forma, el primer momento del elemento diferencial con respecto al eje x es $y^2/3$ y el primer momento de toda el área es

$$Q_x = \int y^2 dA = \int_0^a y^2 y \, dx = \frac{1}{3} \int_0^a y^3 y \, dx = \frac{1}{3} \left[\frac{y^4}{4} \right]_0^a = \frac{ab^3}{12}$$

Como $Q_x = \bar{y}A$ se tiene que

$$\bar{y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{ab^3/12}{ab/2} = \frac{b}{6}$$

Elemento diferencial horizontal. Se particularizan las ecuaciones dadas considerando los elementos horizontales. Los momentos con respecto al eje y son

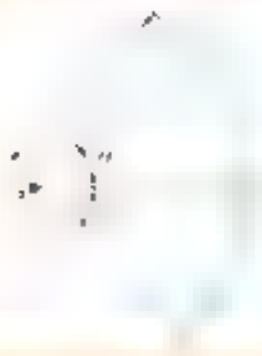
$$Q_y = \int \bar{x}_c dA = \int \frac{a+x}{2} (a-x) dy = \int_0^b \frac{a^2 - x^2}{2} dy$$

$$= \frac{1}{2} \left[a^2 y - \frac{x^2 y}{3} \right]_0^b = \frac{ab^2}{6}$$

$$Q_x = \int y_c dA = \int y(a-x) dy = \int y \left(a - \frac{a^2}{b^{1/2}} y^{1/2} \right) dy$$

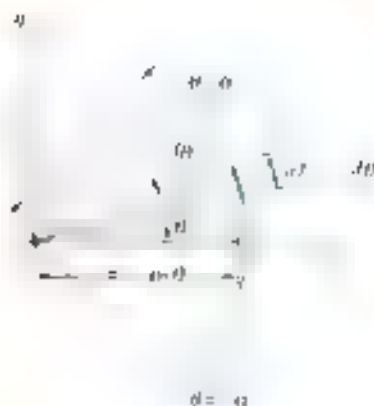
$$= \left[\frac{ay^2}{2} - \frac{a^2 y^{3/2}}{3/2} \right]_0^b = \frac{ab^2}{6}$$

Esta información es útil para aplicaciones específicas y se debe usar con cuidado en las reducciones de dimensiones y en la construcción de áreas.



PROBLEMA RESUELTO 5.5

Determine la ubicación del centroide del arco mostrado.



SOLUCION

Como $2\pi \times 2$ unidades son equivalentes al $2\pi r = 4\pi$ unidades, la longitud diferencial como se muestra en la figura, y se determina la longitud en $2\pi r$ unidades.

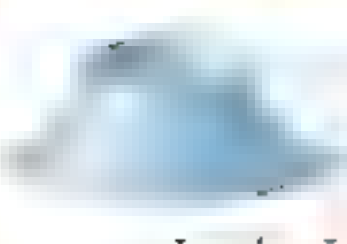
$$L = \int dl = \int_0^{2\pi} r d\theta = \int_0^{2\pi} 2 d\theta = 4\pi$$

El primer momento del arco con respecto al eje y es

$$Q_y = \int x dl = \int_0^{2\pi} (r \cos \theta) r d\theta = r^2 \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta \\ = r^2 [\sin \theta]_0^{2\pi} = 2r^2 \sin \pi$$

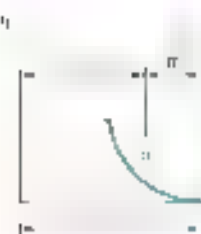
Como $Q_y = \bar{x}L$, se escribe

$$r(2\pi) = 2r^2 \sin \pi$$



PROBLEMA RESUELTO 5.6

Determine el área de la superficie de revolución mostrada en la figura, esta se obtiene rotando un cuarto de arco circular con respecto a un eje vertical.

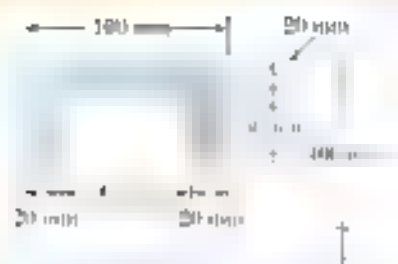


SOLUCION

De acuerdo con el teorema I de Pappus-Guldinus, el área generada es igual al producto de la longitud del arco y la distancia recorrida por su centroide. Refiriéndose a la figura 5.8B, se tiene que:

$$L = 2\pi r = \frac{2\pi}{\pi} = 2\pi$$

$$A = 2\pi \left(\frac{2\pi}{\pi} \right) = 4\pi$$

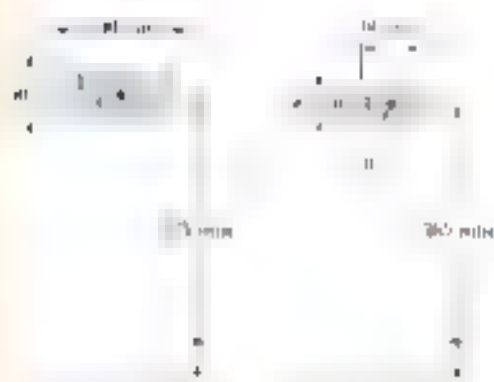


PROBLEMA RESUELTO 5.7

El diámetro exterior de una polea es 0,8 m y la sección transversal de su corona es como se muestra en la figura. Se sabe que la polea está hecha de acero con $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$. Calcule el momento de inercia de la corona y el peso de la corona.

SOLUCION

El volumen de la corona se puede encontrar con el teorema II de Pappus-Guldinus, el cual establece que el volumen es igual al producto del área de la sección transversal por la longitud recorrida por su centro de gravedad. La corona puede ser considerada como la diferencia de dos volúmenes: el volumen de un cilindro de radio 0,4 m y el volumen de un cilindro de radio 0,2 m. El momento de inercia de la corona puede ser encontrado con el teorema de Steiner, el cual establece que el momento de inercia de una figura es igual a la suma del momento de inercia de la figura respecto a su centro de gravedad más el momento de inercia de la figura respecto a un eje paralelo al eje de simetría que pasa por el centro de gravedad de la figura.



	Área mm ²	y mm	Distancia recorrida por G mm	Volumen mm ³
I	5000	10	$2\pi \cdot 400$	12566400
II	1000	10	$2\pi \cdot 200$	1256640
				11309760

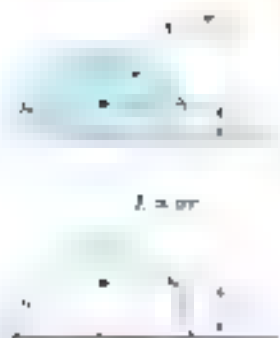
$$V = 11309760 \text{ mm}^3 = 11,30976 \text{ m}^3$$

$$m = \rho V = 7850 \text{ kg/m}^3 \cdot 11,30976 \text{ m}^3 = 88781,616 \text{ kg}$$

$$W = mg = 88781,616 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 = 870947,853 \text{ N}$$

PROBLEMA RESUELTO 5.8

El volumen de una esfera puede ser hallado considerando la esfera como un sólido de revolución. Calcule el volumen de una esfera de radio 0,5 m.



SOLUCION

El volumen de una esfera es igual al producto del área de un semicírculo y la distancia recorrida por el centro del semicírculo en una revolución alrededor del eje x.

$$V = 2\pi R^2 \cdot \pi R = 2\pi^2 R^3$$

Para la esfera de radio 0,5 m, el volumen es:

$$V = 2\pi^2 (0,5)^3 = 0,9817477 \text{ m}^3$$

Problemas

5.34 a 5.36 Determine por integración directa el centroide del área señalada en las figuras. Expresar la respuesta en términos de a y b .



Figura P5.34



Figura P5.35

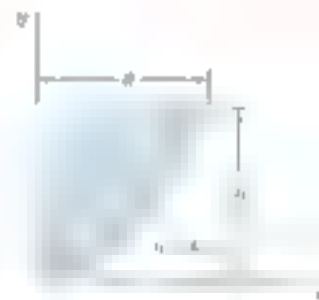


Figura P5.36

5.37 a 5.39 Determine por integración directa el centroide del área señalada en las figuras. Expresar la respuesta en términos de a y b .

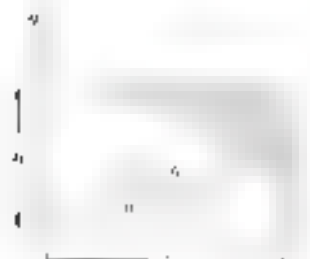


Figura P5.37



Figura P5.38

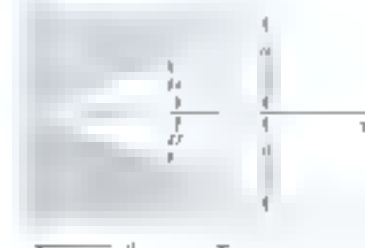


Figura P5.39

5.40 y 5.41 Determine por integración directa el centroide del área señalada en las figuras. Expresar la respuesta en términos de a y b .

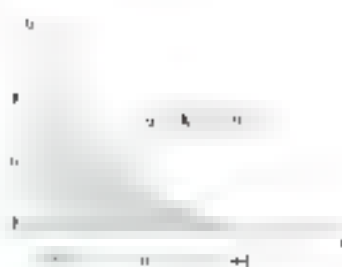


Figura P5.40

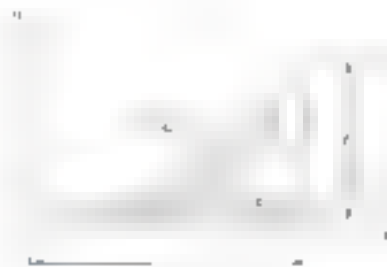


Figura P5.41

5.42 Determine por integración directa la coordenada \bar{x} del área mostrada en la figura.

5.43 y 5.44 Determine por integración directa la coordenada \bar{x} del área mostrada en las figuras. Exprese la respuesta en términos de a y b .

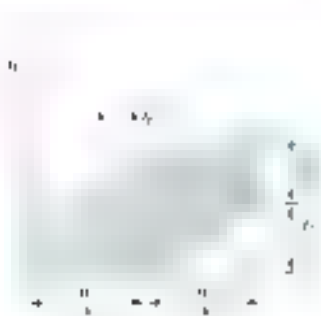


Figura P5.43

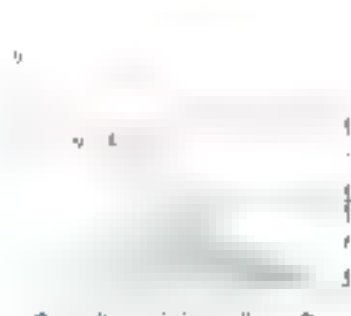


Figura P5.44



Figura P5.45

5.45 y 5.46 Un alfileré homogéneo se dobla en la forma mostrada. Determine por integración directa la coordenada \bar{x} de su centroide. Exprese la respuesta en términos de a .

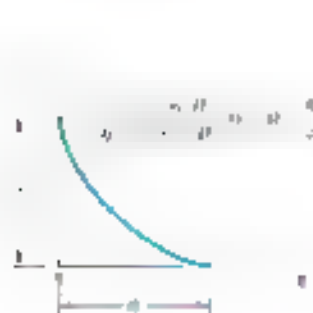


Figura P5.45



Figura P5.46

5.47 Un alfileré homogéneo se dobla en la forma mostrada. Determine por integración directa la coordenada \bar{x} de su centroide. Exprese la respuesta en términos de a .

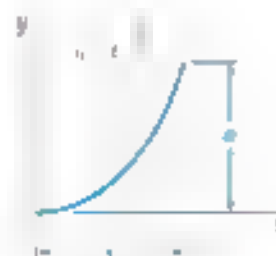


Figura P5.47

***5.48 y *5.49** Determine por integración directa el centroide del área mostrada en las figuras.

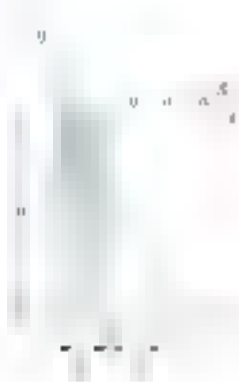


Figura P5.48



Figura P5.49

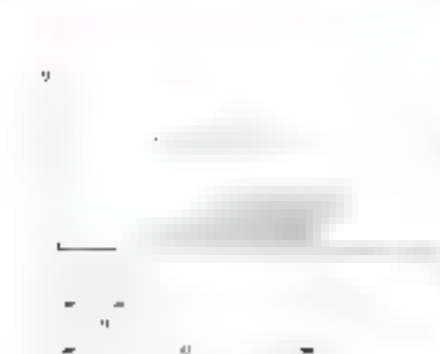


Figura P5.50 y P5.51

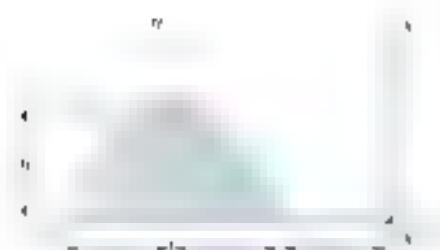


Figura P5.52

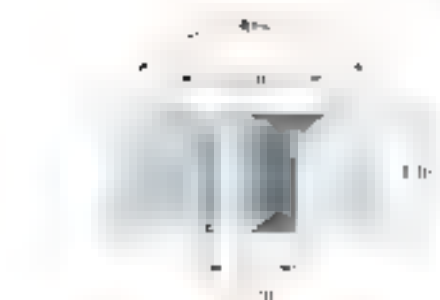


Figura P5.53

5.50 Determine el centróide del área mostrada en la figura cuando $a = 2$ cm.

5.51 Determine el valor de a para el que la relación \bar{x}/\bar{y} es igual a 9.

5.52 Determine el volumen y el área de la superficie del sólido que se genera al rotar la curva mostrada en la figura alrededor del eje y .

5.53 Determine el volumen y el área de la superficie del sólido que se genera al rotar la curva mostrada en la figura alrededor del eje x .

5.54 Determine el volumen y el área de la superficie del sólido que se genera al rotar la curva mostrada en la figura alrededor del eje y .

5.55 Determine el volumen del sólido que se genera al rotar el área parabólica mostrada en la figura alrededor de g' el eje x h' el eje y .

5.56 Si $R = 0$ mm y $L = 40$ mm de x mm, determine el área de la superficie del estubo de casaca que se muestra en la figura, el cual está hecho de un material homogéneo.



Figura P5.56

5.57 Verifique que las expresiones para los volúmenes de los prismas rectos mostrados en la figura son correctas.

5.58 Un ingeniero, al modelar un puzo de madera, lo hace de 1 m de espesor, y después se averigua cuánto se muestra en la figura. Determine el área de la superficie del puzo.

5.59 Determine la capacidad en litros de la panchera que se muestra en la figura si $R = 250$ mm.

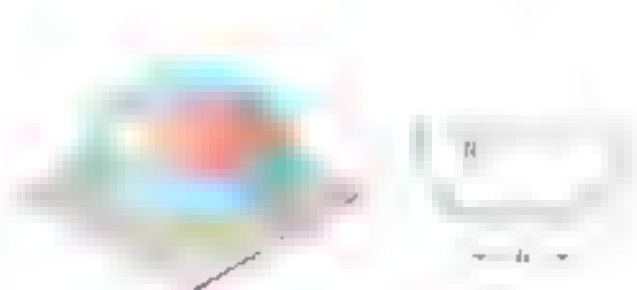


Figura P5.59

5.60 Tres perfiles diferentes de bombas matrices se montan a un cable. Se les muestra en la figura cada una con un espesor t que es igual a una quinta parte de la circunferencia de su polea, determine el área de contacto entre la bomba y la polea para cada diseño.

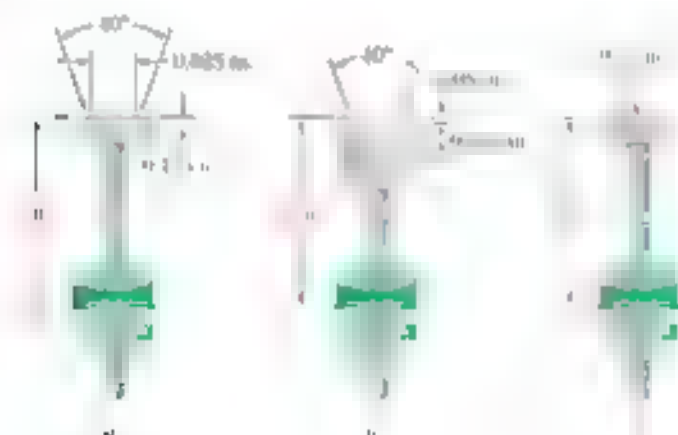


Figura P5.60

5.61 El reflector de aluminio de una pequeña lámpara de alta intensidad tiene un espesor uniforme de 1 mm. Si se sabe que la densidad del aluminio es de $2\,800\text{ kg/m}^3$, determine la masa del reflector.

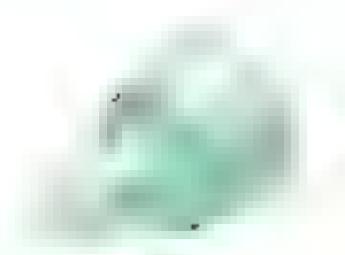


Figura P5.61

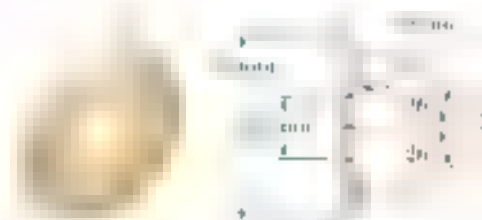


Figura P5.62

5.62 El escudete que se muestra en la figura está hecho de aluminio y descansa sobre una parte de la estructura que se muestra en la figura. Si se sabe que la densidad del aluminio es de $2\,800\text{ kg/m}^3$, determine el peso del escudete.

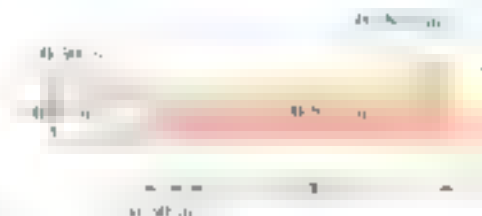


Figura P5.63 y P5.64

5.63 El tubo con el que se produce el vapor en una caldera de potencia para una planta eléctrica es de aluminio. Este tubo está formado por una placa que se dobla y se solda para formar un tubo. Si se sabe que la densidad del aluminio es de $2\,800\text{ kg/m}^3$, determine el peso del tubo.

5.64 La clavija de aluminio que se muestra en la figura se forma a partir de una placa que se dobla y se solda para formar un tubo. Determine el porcentaje del volumen de la placa inicial que se convierte en desperdicio.



Figura P5.65

5.65 El reflector de una luz montado en la pared se forma a partir de una placa de aluminio que se dobla y se solda para formar un tubo. Determine el porcentaje del volumen de la placa inicial que se convierte en desperdicio.

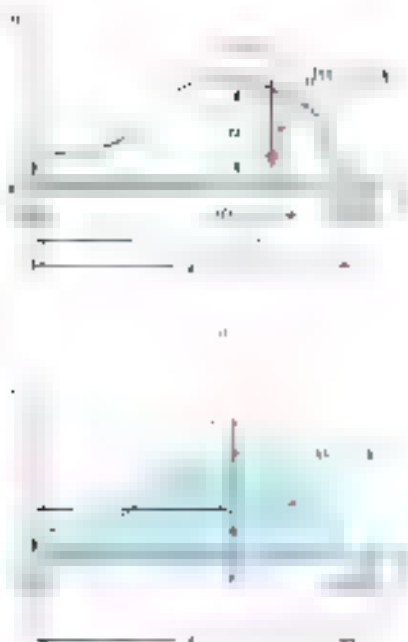
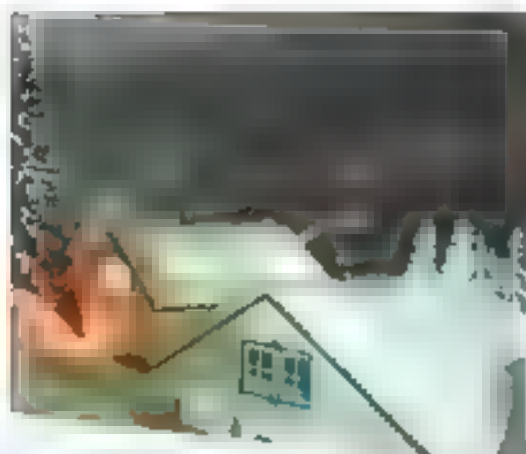


Figura 5.17



Fotografía 4.3 Los techos de las construcciones que se muestran en la fotografía pueden ser capaces de soportar no sólo el peso de la nieve sino también las cargas distribuidas no simétricas causadas por el amontonamiento de la nieve

El concepto del **centroide de un área** puede utilizarse para resolver otros problemas distintos a los relacionados con los pesos de planchas planas. Por ejemplo, considere una viga que soporta una **carga distribuida**. Esta carga puede estar constituida por el peso (en los materiales soportados) de la viga indirectamente por la carga misma sea causada por el viento o por una presión hidrostática. La carga distribuida puede representarse al graficar la carga soportada por unidad de longitud (figura 5.17); esta carga está expresada en N/m o en lbf/ft . La magnitud de la fuerza ejercida sobre un elemento de longitud dx es $dW = w dx$ y la carga total soportada por la viga es

$$W = \int_0^L w dx$$

Se observa que el producto de la intensidad en magnitud w por el área dA mostrado en la figura 5.17a. Por tanto, la carga W es igual en magnitud al área total A bajo la curva de carga:

$$W = \int dA = A$$

Ahora se procede a determinar dónde debe aplicarse sobre la viga una **carga concentrada** W la cual resulta equivalente W que la carga distribuida total, si se deben producir las mismas reacciones con los apoyos (figura 5.17b). Sin embargo, debe a la vez que la carga concentrada W la cual se aplica a resultante de la carga distribuida dada es equivalente a esta fuerza solo cuando se considera la viga como un cuerpo libre de toda la viga. El punto de aplicación P de la carga concentrada equivalente W se obtiene expresando que el momento M_W con respecto a un punto O es igual al momento de los momentos de las cargas elementales dW con respecto a O :

$$OPW = \int x dW$$

o, como $dW = w dx = dA$ y $W = A$

$$OP/A = \int_0^L x dA \quad (5.12)$$

Puesto que la integral representa el primer momento con respecto al eje O ubicado bajo la curva de carga, ésta puede ser calculada por el momento A . Por tanto, se tiene que $OP = \bar{x}$ donde \bar{x} es la distancia desde el eje O hasta el centroide C del área A (véase que también coincide con el centroide de la viga).

En este sentido, una **carga distribuida** que actúa sobre una viga puede ser reemplazada por una **carga concentrada** la magnitud de la cual es igual al área bajo la curva de carga y se la actúa en un punto pasado a través del centroide de dicha área. Se debe tener presente que la carga concentrada es equivalente a la carga distribuida sólo con los puntos respecto a las fuerzas externas. La carga concentrada puede utilizarse para determinar reacciones pero no debe ser empleada para determinar momentos internos de la viga.

5.9. FUERZAS SOBRE SUPERFICIES SUMERGIDAS

El problema que se resuelve en la sección anterior puede convertirse en el de determinar la presión de las fuerzas en presencia de la estática por las superficies *superficies rectangulares sumergidas en un líquido*. Consideremos la placa rectangular mostrada en la figura 5.18, a la que se llama $ABCD$ y que se sumerge en el líquido donde h es la profundidad al que se encuentra la figura. Como se muestra en la sección 5.9.1, se puede determinar la fuerza de la superficie de longitud dy y de ancho l y de ancho por unidad de longitud. Se sumerge esta carga dF y se puede expresar dF en términos de dy y l y de la presión p que actúa sobre el líquido. La fuerza elemental de la placa por dy es $dF = p l dy$. Como la presión es uniforme en la superficie es $p = \gamma h$ donde γ es el peso específico del líquido y h es la distancia vertical respecto de la superficie libre se conoce que

$$p = \gamma y = \gamma h \quad (5.13)$$

donde h muestra la profundidad de longitud l y es proporcional a h y, por tanto, varía linealmente con h .

De acuerdo con los resultados de la sección 5.9 se observa que la resultante R de las fuerzas horizontales por tanto solo actúa en la línea AB que es la línea de acción. Para las fuerzas verticales se debe considerar las fuerzas de flotación F que actúan sobre la placa paralela a la superficie $ABCD$ como el centro de presión.

Con frecuencia se selecciona las fuerzas horizontales por un líquido sobre las superficies que se muestra en la figura 5.19. Como la fuerza horizontal por integración resulta de la resultante R en cada una de las placas, no se puede considerar el cuerpo como un todo por la separación de la superficie $ABCD$ en esta longitud por la superficie curva AB y por las superficies planas AC y BD como se muestra en la figura 5.19. Las fuerzas horizontales sobre el cuerpo por $ABCD$ son W de volumen de líquido sumergido a través de R de las fuerzas horizontales sobre AB y la resultante R de las fuerzas horizontales sobre AC y BD es H de las fuerzas horizontales por la superficie curva sobre el líquido. La resultante R es igual y opuesta a H de la misma línea de acción que la resultante R de las fuerzas horizontales por el líquido sobre la superficie AB y las fuerzas W , R y R se puede determinar mediante los triángulos de fuerzas. Se debe tener presente que se debe tener presente que la fuerza R se refiere al peso del cuerpo sumergido y la fuerza H es el peso del cuerpo libre de la figura 5.19. Por tanto la resultante R de las fuerzas horizontales sobre la superficie curva se obtiene invirtiendo el sentido de $-R$.

Los métodos presentados en esta sección pueden emplearse para determinar la resultante de las fuerzas horizontales sobre las superficies de presión y de empujones rectangulares y alabes. Las resultantes de las fuerzas por el líquido sobre las superficies de ancho variable se determinarán en el capítulo 9.

La presión p , la cual representa una carga por unidad de área, se expresa en N/m^2 o Pa . La fuerza elemental dF se expresa en N o Pa .

Observar que la fuerza elemental dF es la fuerza elemental por unidad de longitud en el sentido h de la placa y de acuerdo con la ecuación 5.13, se puede escribir

$$R = \gamma y l = \gamma p l = \gamma p l = \gamma p l$$

donde A representa el área de la placa. Por tanto, se puede obtener la magnitud de R si se multiplica el área de la placa por la presión en un centro E . Sin embargo, la resultante R debe ser aplicada en P no en E .



Figura 5.18

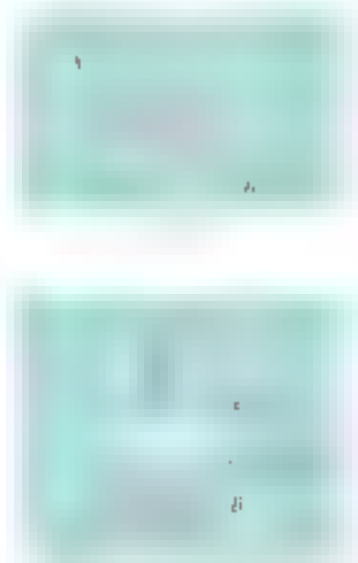
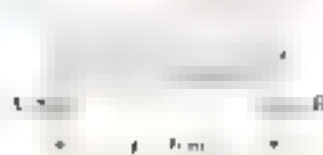
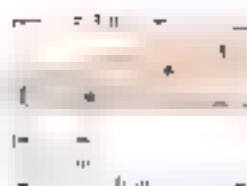


Figura 5.19



PROBLEMA RESUELTO 5.9

Una viga soportada en A y B está sometida a la carga distribuida mostrada en la figura. Determine las reacciones en los apoyos.



SOLUCIÓN

a) Carga concentrada equivalente. La magnitud de la resultante de la carga distribuida es el área del triángulo de carga. La línea de acción de la resultante pasa por el centro de gravedad del triángulo. Se construye la carga equivalente en dos triángulos y se construye la tabla que se presenta a continuación. Para simplificar los cálculos, las dimensiones dadas se han convertido a kN/m.

Componente	A, kN	2, m	ΣA , kN · m
F_{1x} (1/3) (1)	1	2	2
F_{2x} (2/3) (2)	2	4	8
	$\Sigma F_x = 3.0$		$\Sigma A = 10$

$$\text{Por tanto: } \Sigma F_x = \Sigma F_y = \Sigma M = 0 \quad \Sigma F_x = 3 \text{ kN} = 0 \quad \Sigma F_y = 10 \text{ kN}$$

La carga concentrada equivalente es:

$$W = 10 \text{ kN} \quad \leftarrow$$

y su línea de acción está localizada a una distancia

b) Reacciones. La reacción en A es vertical y se representa con A . La reacción en B está representada por las componentes B_x y B_y . Con los datos dados en el problema se puede construir como la suma de los momentos que producen las reacciones y el triángulo de carga y actúa en su centroide. Se escriben las siguientes ecuaciones de equilibrio para el cuerpo libre mostrado:

$$\Sigma \Sigma F_y = 0 \quad B_y = 0 \quad \leftarrow$$

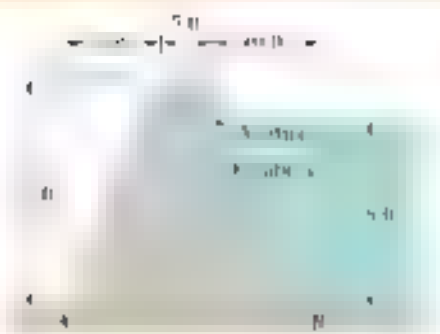
$$+\Sigma M_A = 0 \quad (1.5 \text{ kN})(2 \text{ m}) + (13.5 \text{ kN})(4 \text{ m}) + B_y(6 \text{ m}) = 0$$

$$+\Sigma M_B = 0 \quad + (4.5 \text{ kN})(4) - (13.5 \text{ kN})(2 \text{ m}) + A(6 \text{ m}) = 0$$

$$A = 1.5 \text{ kN} \quad \leftarrow$$

Solución alternativa. La carga distribuida dada se puede reemplazar por su resultante, la cual se determinó en la parte a. Las reacciones pueden determinarse con las ecuaciones de equilibrio $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma M_A = 0$ y $\Sigma M_B = 0$. De nuevo se obtiene

$$B_x = 0 \quad B_y = 1.5 \text{ kN} \uparrow \quad A = 1.5 \text{ kN} \uparrow \quad \leftarrow$$



PROBLEMA RESUELTO 5.10

Se quiere determinar la resistencia lateral de una sección de 1 ft de espesor de la presa de la figura. La sección está sujeta a la presión del agua a la izquierda de la presa. La resultante de las fuerzas de presión por el y por sobre la cara AB de la presa es de 14 850 lb. La resultante de las fuerzas de presión por el y por sobre la cara BC de la presa es de 16 500 lb. La resultante de las fuerzas de presión por el y por sobre la cara CD de la presa es de 9 000 lb. La resultante de las fuerzas de presión por el y por sobre la cara DE de la presa es de 7 488 lb. Las presiones específicas del concreto y el agua son, respectivamente, 150 lb/ft³ y 62.4 lb/ft³.

SOLUCIÓN

a) Reacción del suelo. Se selecciona como cuerpo libre la sección de 1 ft de espesor ABFCDE de la presa y el agua. Las fuerzas de reacción que actúan sobre la sección AB son representadas por un sistema equilibrante fuerza-par en A. Otras fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre son el peso de la presa, representado con los pesos de sus componentes W_1 y W_2 , el peso del agua W_3 y la resultante P de las fuerzas de presión que actúan sobre la cara BC de la presa. El peso del agua W_4 que actúa sobre la cara CD de la presa es de 9 000 lb. La resultante de las fuerzas de presión que actúan sobre la cara DE de la presa es de 7 488 lb. Así se tiene:

$$W_1 = \frac{1}{2}(10 \text{ ft})(20 \text{ ft})(1 \text{ ft})(150 \text{ lb/ft}^3) = 14 850 \text{ lb}$$

$$W_2 = (5 \text{ ft})(20 \text{ ft})(1 \text{ ft})(150 \text{ lb/ft}^3) = 14 850 \text{ lb}$$

$$W_3 = \frac{1}{2}(10 \text{ ft})(10 \text{ ft})(1 \text{ ft})(62.4 \text{ lb/ft}^3) = 3 120 \text{ lb}$$

$$W_4 = \frac{1}{2}(10 \text{ ft})(10 \text{ ft})(1 \text{ ft})(62.4 \text{ lb/ft}^3) = 3 120 \text{ lb}$$

$$P = \frac{1}{2}(10 \text{ ft})(10 \text{ ft})(1 \text{ ft})(62.4 \text{ lb/ft}^3) = 3 120 \text{ lb}$$

Ecuaciones de equilibrio

$$\sum F_x = 0 \quad R - 14 850 \text{ lb} = 0$$

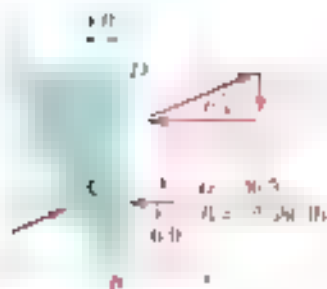
$$\sum F_y = 0 \quad V - 14 850 \text{ lb} - 14 850 \text{ lb} - 3 120 \text{ lb} - 3 120 \text{ lb} = 0$$

$$\sum M_A = 0 \quad -(14 850 \text{ lb})(6 \text{ ft}) - (14 850 \text{ lb})(11.5 \text{ ft}) - (3 120 \text{ lb})(17 \text{ ft}) - (3 120 \text{ lb})(20 \text{ ft}) + (10 000 \text{ lb})(6 \text{ ft}) + M = 0$$

$$M = 520 960 \text{ lb} \cdot \text{ft}$$

Se puede reemplazar el sistema fuerza-par obtenido por una fuerza que actúa en el punto de intersección de las líneas de acción de las fuerzas.

$$d = \frac{520 960 \text{ lb} \cdot \text{ft}}{67 440 \text{ lb}} = 7.72 \text{ ft}$$



b) Factor de seguridad. Se selecciona como cuerpo libre la sección parabólica de agua BCDE. Las fuerzas involucradas son la resultante R de las fuerzas ejercidas por la presa sobre el agua, el peso W_1 y la fuerza P . Como estas fuerzas deben ser concurrentes, R pasa por encima del punto de intersección de W_1 y P . Se debe determinar el punto de intersección de W_1 y P para determinar el punto de intersección de R y W_1 . La resultante R de las fuerzas ejercidas por el agua sobre la cara BC es igual y opuesta:

$$R = 14 850 \text{ lb} \nearrow 30^\circ$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

Las propiedades más importantes de los dos tipos de acilaciones se comparan en la siguiente tabla. Los ácidos y los anhídridos se comportan de manera similar, pero los ácidos son más reactivos. En las acilaciones $\text{S}_{\text{N}}\text{Ar}$ y $\text{S}_{\text{N}}\text{E}$ se forman aniones para los cuales los sustitutos SO_2R y SO_2OR son buenos grupos salientes. La reacción de la acetilación de la acetona con el anhídrido acético es un ejemplo de la acilación de un sustrato con un ácido.

[illegible]

Quando se considera as cargas distribuídas, depois de ter lido esse ou aquele capítulo, é possível que as fórmulas com x mostrem-se inúteis para a maioria dos problemas. É possível também que muitas vezes as áreas se possam reconhecer e por isso se não tenha necessidade de fazer as integrais. Mas se se quiser a certeza de que as fórmulas se aplicam a qualquer caso, quer se queira ou não, é melhor fazer as integrais, quer se queira ou não, é melhor fazer as integrais. É melhor fazer as integrais, quer se queira ou não, é melhor fazer as integrais.

Se pueden reconocer los siguientes puntos y las siguientes etapas al momento de resolver problemas de este tipo.

La prima cosa che mi colpì quando entrai nella stanza era la sua
aria serena e un po' orgogliosa. Si alzò e mi salutò con un sorriso
caldo. «Benvenuto», disse. «Spero che ti piacerà qui. Ho
preparato una camera per te. È un po' piccola, ma è
comoda. E la cucina è attrezzata per tutto. Se hai
bisogno di qualcosa, fammi sapere. Sono qui per te».

$$u_1 = f_{11}x = f_2y_1 = f_2x_2y_2$$

b) La línea de acción de la fuerza resultante R que actúa sobre una superficie plana sumergida es perpendicular a dicha superficie.

Seja \mathbf{A} uma matriz $n \times n$ real simétrica e \mathbf{B} uma matriz $n \times n$ real não-singular. Considere a matriz $\mathbf{C} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{B}$. Se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ são os autovalores de \mathbf{A} , então os autovalores de \mathbf{C} são $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. A matriz \mathbf{C} é simétrica se e somente se \mathbf{B} é simétrica e invertível.

It is worth

donde h_p es la distancia vertical al centro de la superficie y χ es el ángulo de la superficie.

7. En virtud de la presión del líquido en la superficie libre de un líquido que se eleva, la curva libre que se forma al interior de la capacidad del conducto libre superior de una superficie rectangular plana, sobre la que la superficie libre del líquido tiene ese efecto, es una curva parabólica. El punto de elevación está situado en el eje de simetría, a través del centro de gravedad de la superficie rectangular.

En un caso general, en lugar de analizar la trayectoria se sugiere que se use el método semejante en la parte b) del problema resuelto 5.9. Primero se divide la carga distribuida capilar en cinco tramos iguales y entonces se calcula el momento de la fuerza en el centro de gravedad. La cantidad es igual al producto de la fuerza tramo por el momento de la pila. El valor que se encuentra al actuar de la fuerza resultante pasa a través del centro de gravedad triangular correspondiente y que la suma de todas las fuerzas es igual a R . En tanto que la fuerza R se puede considerar las fuerzas en los ejes paralelos y los momentos de las fuerzas pueden ser calculados. Por supuesto, la explicación para R en el artículo es suficiente para utilizar cuando sólo se necesita conocer la magnitud de R .

Cuando la superficie superior de la de ancho constante es xy , la fuerza resultante actúa sobre la superficie si el centro de gravedad es el punto de elevación de la curva libre por la superficie plana y por planos horizontales y verticales (figura 5.10). Obsérvese que la fuerza R en la figura 5.9 es igual al peso del líquido que se eleva sobre la superficie del líquido (10). El método de semejanza para problemas que concierne superficies curvas se muestra en la parte b) del problema resuelto 5.10.

En los cursos de mecánica de fluidos, en particular el curso de mecánica de fluidos y el curso de mecánica de fluidos, se tendrá una oportunidad amplia de utilizar las ideas presentadas en esta sección.

Problemas

5.66 y 5.67 Para la viga y las cargas mostradas en la figura, determine el momento de flectura y la fuerza cortante en la sección indicada y las reacciones en los apoyos de la viga.

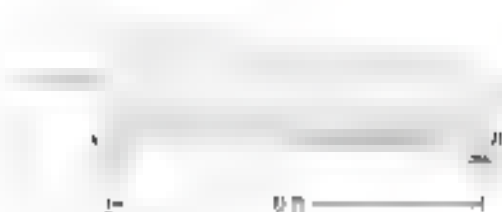


Figura P5.66

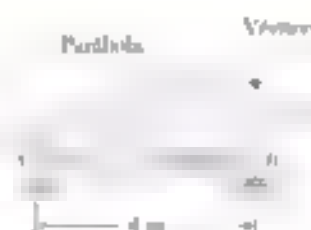


Figura P5.67

5.68 a 5.73 Para las vigas indicadas determine los momentos y las fuerzas cortantes en los apoyos de la viga.

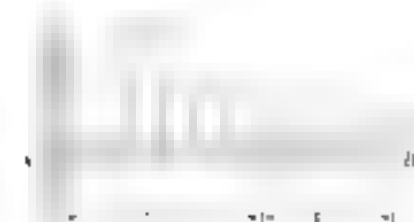


Figura P5.68

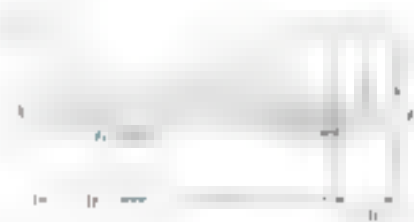


Figura P5.69



Figura P5.70

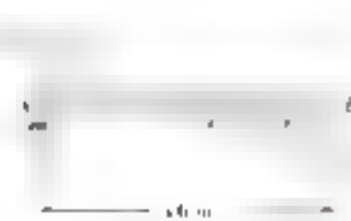


Figura P5.71

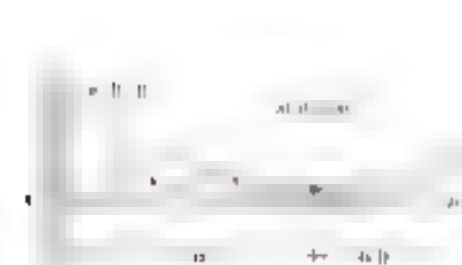


Figura P5.72

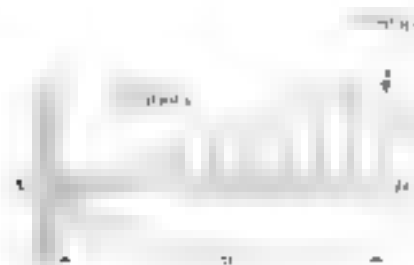


Figura P5.73

5.74 Determine la distribución de las reacciones en los apoyos A y B mostrados en las reacciones correspondientes a los apoyos.

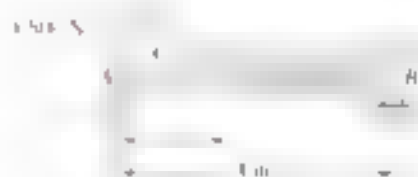


Figura P5.74 y P5.75

5.75 Determine la distribución de las reacciones en los apoyos A y B mostrados en las reacciones correspondientes a los apoyos.

5.76 La viga ABCD se muestra en la figura. Determine las reacciones en los apoyos A y B, y la carga distribuida en C.

Figura P5.76 y P5.77

5.77 Determine la carga distribuida $w(x)$ en el extremo D de la viga ABCD, para la cual la reacción en B es 10 kN y la reacción en C es 10 kN .

5.78 La viga AB soporta dos cargas puntuales y descansa sobre el suelo, el cual ejerce una carga ascendente localmente distribuida como se muestra en la figura. Determine los valores de a y b que corresponden a la posición de equilibrio.

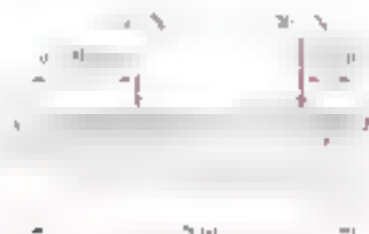


Figura P5.78

5.79 Para la viga y las cargas del problema 5.78, determine a) la reacción en A y b) la reacción en B.

5.80 La viga ABCD se muestra en la figura. Determine las reacciones en los apoyos A y B, y la carga distribuida en C.

5.81 La viga ABCD se muestra en la figura.

5.82 La viga ABCD se muestra en la figura. Determine las reacciones en los apoyos A y B, y la carga distribuida en C.

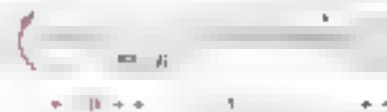


Figura P5.80



Figura P5.81



Figura P5.82 y P5.83

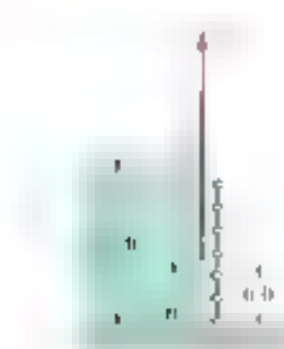


Figura P5.84

5.81 La sección transversal de un dique de concreto tiene la forma que se muestra en la figura. Cada metro horizontal (figura 1) el dique tiene 6 m de ancho en la base y la resultante de las fuerzas de reacción ejercidas por el suelo sobre la cara AB en la base es $H = 2000$ kN, que debe ser equilibrada por las fuerzas de reacción encontradas en el inciso a' y c' la resultante de las fuerzas de presión ejercidas por el agua sobre la cara BC del dique.

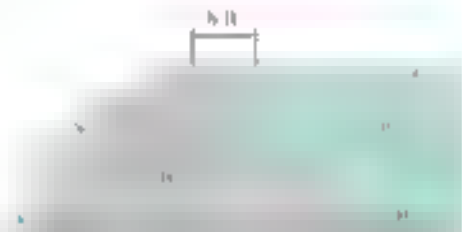


Figura P5.81

5.82 El tubo AB de un tanque de 3×4 m se sostiene mediante bloques en el fondo A y se mantiene en su lugar por medio de una barra delgada BC. La fuerza máxima de tensión que la barra puede soportar sin fracturarse es de 200 kN y las especificaciones indican que la deformación en la barra no exceda 20 por ciento de dicho valor. Si el tanque se llena de agua hasta el nivel h , determine la profundidad máxima de h que puede tener el agua en el tanque.

5.83 Un tanque abierto de 3×4 m de agua se sostiene mediante bloques en el fondo A y se mantiene en su lugar por medio de una barra delgada BC. La barra BC puede soportar una fuerza máxima de 20 kN. Si el tanque se llena de agua hasta el nivel h , determine la profundidad máxima de h que puede tener el agua en el tanque.

5.84 La fuerza de fricción entre la compuerta enclavada AB de 6×6 ft y sus guías es igual a 10 por ciento de la resultante de las fuerzas de presión ejercidas por el agua sobre la compuerta. Determine la fuerza requerida para levantar la compuerta si ésta pesa 1000 lb.

5.85 Una marmota de agua sube desde fuera el océano a través de una compuerta de marea automática que tiene 4 ft de ancho y 3 ft de alto. La compuerta se sostiene mediante muelles muelles a lo largo de su parte superior en A y se apoya sobre un tope en B. Si el nivel de agua en la marmota es $h = 6$ ft, determine el nivel d del océano para el cual la compuerta se abrirá. (El peso específico del agua salada es de 64 lb/ft³.)

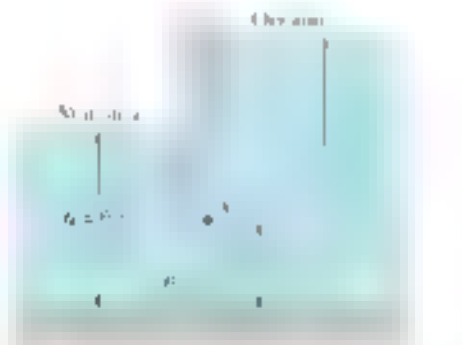


Figura P5.85

5.66 El agua en un lago se usará para soportar la fuerza horizontal producida por el sedimento que se encuentra en el fondo del lago. Si se supone que la fuerza horizontal es proporcional a la profundidad de la columna de agua, ¿cuál es la fuerza horizontal que actúa sobre el lago? ¿Cuál es el incremento en la fuerza que actúa sobre la columna de agua cuando se duplica la profundidad del sedimento en el fondo del lago?

Figure P5.06 y P5.07

El 27 de febrero de 1994, el presidente de la Corte Interamericana de Derechos Humanos, el juez Carlos Rodríguez Cordero, anunció que la Corte había aceptado la competencia de la Corte Interamericana de Derechos Humanos para conocer y resolver el caso de los desaparecidos en Chile. Este fue un hito importante en la historia de la Corte Interamericana de Derechos Humanos, ya que hasta entonces solo había aceptado conocer casos de violaciones de derechos humanos que habían sido denunciados por Estados miembros de la Corte. La decisión de la Corte Interamericana de Derechos Humanos de aceptar el caso de los desaparecidos en Chile fue una respuesta a la presión internacional y a la demanda de justicia por parte de la sociedad chilena.

5.88 Una compuerta AB de 0.5 x 0.5 m se localiza en la parte inferior de un tanque lleno de agua. La compuerta tiene bisagras a lo largo de un borde superior A y descansa sobre un tope sin fricción en B. Determine las reacciones en A y B cuando el agua BCDE se encuentra fluj.

Figura P5.88 y P5.89

[illegible]

5.80 Un cable largo se sostiene mediante dos hilos verticales en todo su borde inferior y por medio de una serie de cables horizontales unidos a su borde superior. Determine la tensión, en cada uno de los cables, en el

Figure P5.90

5.91 Una compuerta de 4×2 ft está articulada en A y se sostiene en la posición mostrada mediante la bala B y el resorte D en la cara superior a su apoyo sobre un resorte cuya constante es de 400 lb/ft. El resorte está sin deformar cuando la compuerta se encuentra en la posición vertical. Si se supone que la bala B pesa 100 lb, la compuerta AC (ver Fig. P5.91) se abre y se desliza sobre una superficie perfectamente lisa hasta la posición BD mostrada. La cara CD de la compuerta se moverá hacia el extremo de la parte cilíndrica del piso.



Figura P5.91

5.92 Retome el problema 5.91 y abra la compuerta para 1 000 lb.

5.93 Al final de un canal de agua dulce se encuentra una compuerta en forma de piruna, la cual se soporta por medio de un pasador y una rótula en A , y descansa sobre un soporte sin fricción en B . El pasador se localiza a una distancia igual $h = 0.10$ m por debajo del centro de gravedad C de la compuerta. Determine la profundidad de agua x para la cual se abra la compuerta.

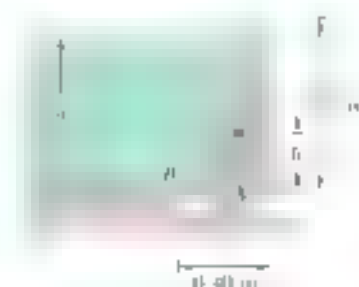


Figura P5.93 y P5.94

5.94 Al final de un canal de agua dulce se encuentra una compuerta en forma de piruna, la cual se soporta por medio de un pasador y una rótula en A , y descansa sobre un soporte sin fricción en B . Determine la distancia h si la compuerta debe abrirse cuando $d = 0.75$ m.

5.95 Un tonel de 55 galones y 21 pulgadas de diámetro se coloca sobre un soporte para ser usado como depósito de agua dulce. Determine la fuerza resultante de las fuerzas de presión que actúan sobre el tonel.

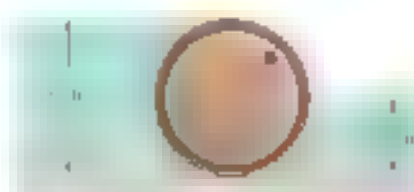


Figura P5.95

VOLUMENES

5.10. CENTRO DE GRAVEDAD DE UN CUERPO TRIDIMENSIONAL. CENTROIDE DE UN VOLUMEN

El *centro de gravedad* C_G de un cuerpo tridimensional se obtiene dividiendo el cuerpo en elementos infinitesimales y suponiendo que el peso ΔW de cada uno de ellos actúa en el centro de gravedad de cada uno de ellos. Los elementos ΔW que representan a los pesos de los elementos infinitesimales ΔV se orientan al eje y vertical con el sentido positivo hacia arriba (Figura 5.30) y el sentido negativo hacia abajo. La posición de C_G se encuentra

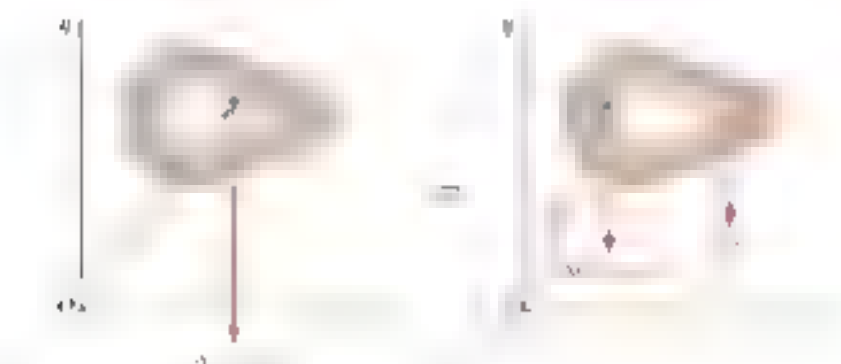


Figura 5.30

que W es igual a la suma de los pesos elementales ΔW y que su momento con respecto a O es igual a la suma de los momentos con respecto a O de los pesos elementales,

$$\sum M_O = \sum (r \times (-Wj)) = \sum (r \times (-\Delta Wj)) \quad (5.14)$$

Se reescribe la última ecuación de la siguiente forma

$$rW \times (-j) = (\sum r \Delta W) \times (-j) \quad (5.15)$$

se observa que el peso W del cuerpo es equivalente al sistema de pesos elementales ΔW si se cumplen las siguientes condiciones,

$$W = \sum \Delta W \quad rW = \sum r \Delta W$$

Si se reemplaza en la anterior ecuación el término ΔW por el momento de cada uno de ellos, se obtiene en el límite

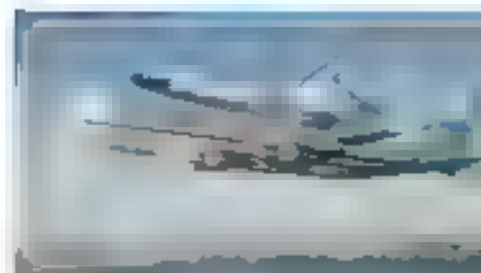
$$W = \int dW \quad rW = \int r dW \quad (5.16)$$

Se observa que las relaciones obtenidas son independientes de la orientación del cuerpo. Por ejemplo, si el cuerpo lo usas sobre los ejes x y z rotados de manera que el eje z apunte hacia arriba, el vector unitario j sería reemplazado por k en las ecuaciones 5.14 y 5.15 por las ecuaciones 5.16. Por lo tanto, las relaciones 5.16 son válidas para los vectores r y r' sus componentes rectangulares. Se observa que la segunda de las relaciones 5.16 se reduce a las tres ecuaciones escalares que se presentaban a continuación

$$\sum W = \int dW \quad \sum yW = \int y dW \quad W = \int dW \quad (5.17)$$

5.10 Centro de gravedad de un cuerpo

5.10.1 Centro de gravedad



Fotografía 5.4 Cuando el Boeing 747 fue utilizado para hacer sprinque un transbordador espacial, fue necesario determinar el centro de gravedad de cada nave para predecir las características del vuelo.

Si el cuerpo está hecho de un material homogéneo con peso específico γ , la magnitud dW del peso de un elemento de volumen dV puede expresarse en términos del volumen dV . De hecho, como la magnitud W del peso total puede expresarse en términos del volumen total V . Así, se escribe

$$dW = \gamma dV \quad W = \gamma V$$

Sustituyendo dW y W en la segunda de las ecuaciones 5.16, se escribe

$$\bar{x}V = \int x \, dV \quad (5.18)$$

donde \bar{x} es un escalar

$$\bar{x}V = \int x \, dV \quad \bar{y}V = \int y \, dV \quad \bar{z}V = \int z \, dV \quad (5.19)$$

El punto cuyas coordenadas son \bar{x} , \bar{y} y \bar{z} aquí se conoce como el *centroide* (del volumen V en el caso de un cuerpo tridimensional). Las coordenadas \bar{x} , \bar{y} y \bar{z} pueden ser expresadas en términos de las coordenadas \bar{x} y \bar{y} de los ejes de gravedad. Los mismos son válidos las ecuaciones 5.19 para el centroide de un volumen.

La integral $\int x \, dV$ se conoce como el *primer momento del volumen con respecto al plano $y = 0$* . De manera análoga, las integrales $\int y \, dV$ y $\int z \, dV$ definen, respectivamente, los primeros momentos del volumen con respecto al plano $x = 0$ y al plano $z = 0$. A partir de las ecuaciones 5.19 se observa que si el volumen de un cuerpo está homogéneo y simétrico con respecto al plano $x = 0$, los primeros momentos de dicho volumen con respecto a dicho plano es igual a cero.

Se dice que un volumen es *simétrico con respecto a un plano* cuando el para cada punto P del volumen existe un punto P' del mismo volumen tal que la línea PP' es perpendicular al plano y está dividida en dos partes por dicho plano. En otras palabras, se dice que el plano en cuestión es un *plano de simetría* para el volumen dado. Cuando un volumen V posee un plano de simetría y primer momento de V con respecto a ese plano es igual a cero y el centroide del volumen está localizado en el plano de simetría. Si un volumen posee dos planos de simetría, el centroide del volumen está localizado en la línea de intersección de los dos planos. En consecuencia, un volumen tiene tres ejes de simetría que se intersectan en un punto, luego dicho punto es que se intersectan a lo largo de una línea común, el punto de intersección de los tres planos coincide con el centroide del volumen. Esta propiedad puede aplicarse a la figura de los cuerpos simétricos tales como elipsoides, conos y paraboloides rectangulares, etc.

Los centroides de volúmenes que no son simétricos o de volúmenes mixtos, pueden ser calculados por los primeros momentos de dichos volúmenes mediante integración sencilla y 2. Las secciones de cuerpos mixtos pueden ser calculados en la figura 5.21. Se debe observar que en general, el centroide de un volumen de revolución no coincide con el centroide de su sección transversal. Por tanto, el centroide de un huso es diferente al de un área semicircular y el centroide de un cono es diferente al de un triángulo.

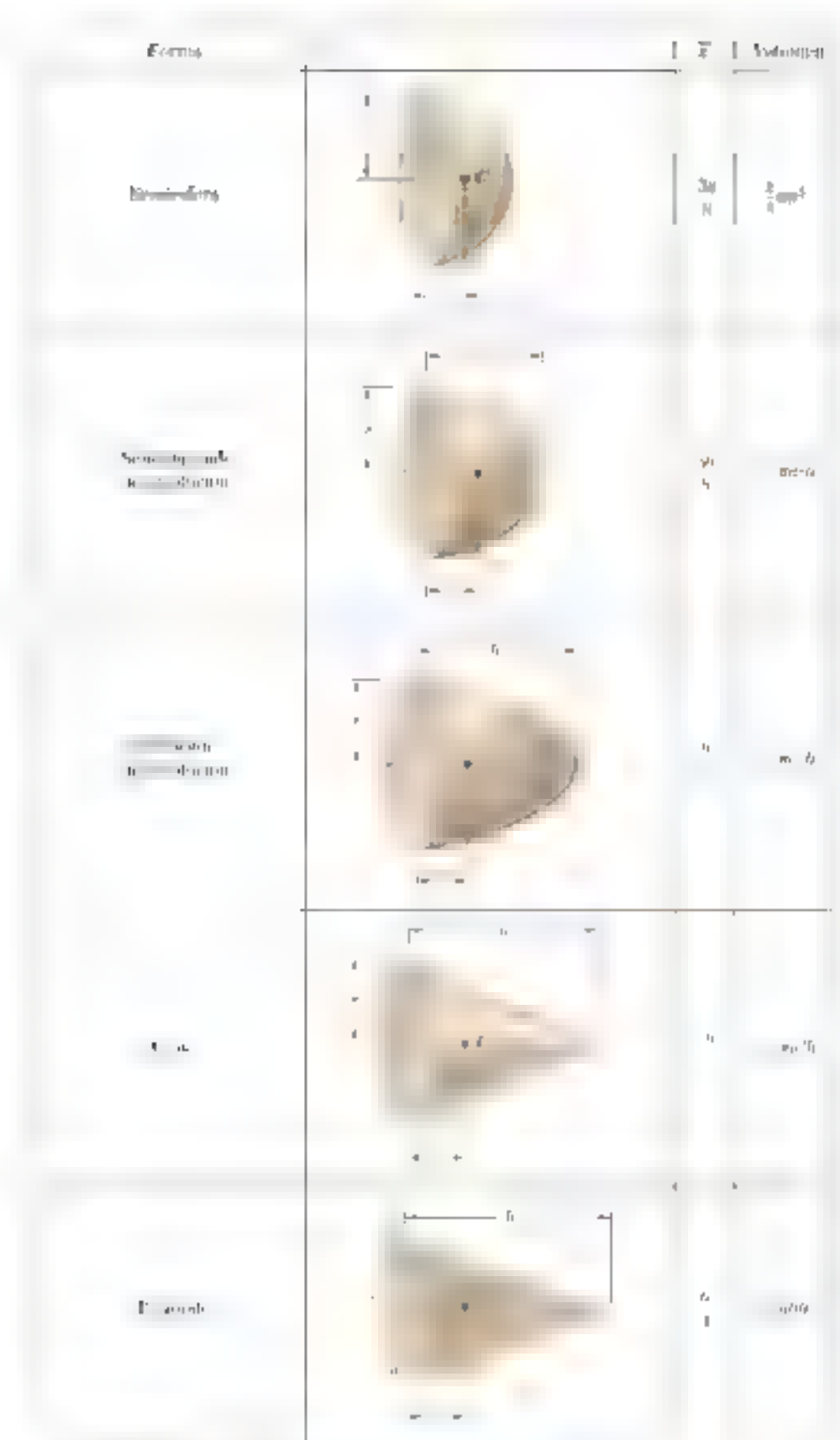


Figura 5.21

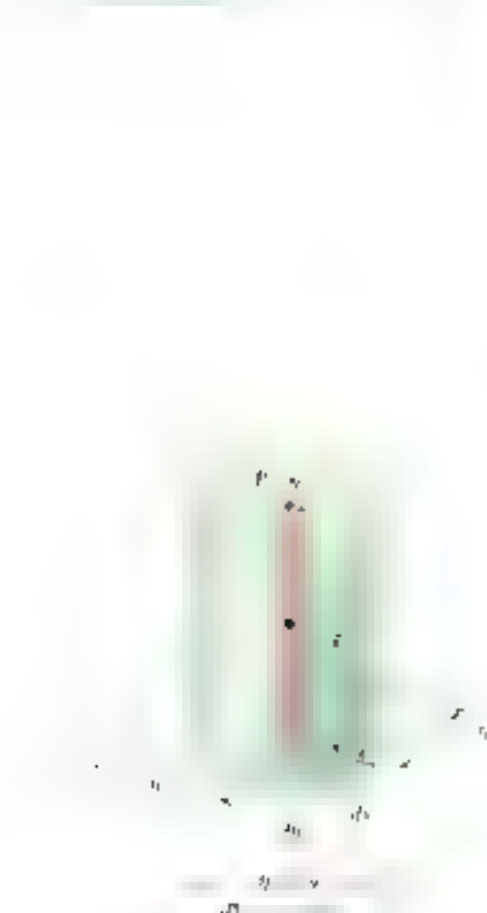


Figura 5.22

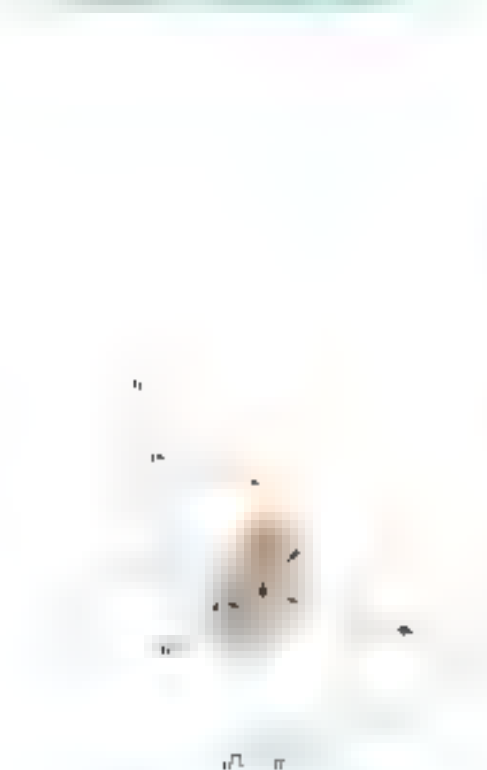


Figura 5.23

5.11 CUERPOS COMPUESTOS

Si un cuerpo está hecho de *líneas rectas* de las que se muestran en la figura 5.23, su centro de gravedad puede ser determinado al presar que el momento con respecto a O de su peso total es igual al suma de los momentos con respecto a O de los pesos de las *rectas* partes que lo componen. Si se procede de la misma forma que en la sección 5.10, se obtienen las siguientes ecuaciones para las coordenadas \bar{X} , \bar{Y} y \bar{Z} del centro de gravedad G de un cuerpo:

$$\bar{X}W = \sum x_i w_i \quad \bar{Y}W = \sum y_i w_i \quad \bar{Z}W = \sum z_i w_i \quad (5.21)$$

Si el cuerpo está hecho de un material homogéneo, su centro de gravedad coincide con el centroide de su volumen y se obtiene:

$$\bar{X}V = \frac{\sum x_i V_i}{V} \quad \bar{Y}V = \frac{\sum y_i V_i}{V} \quad \bar{Z}V = \frac{\sum z_i V_i}{V} \quad (5.22)$$

5.12. DETERMINACIÓN DE CENTROIDES DE VOLUMENES POR INTEGRACIÓN

Si un cuerpo está hecho de *placas delgadas* como las que se muestran en la figura 5.24, se puede determinar al evaluar las integrales dadas en la sección 5.10:

$$\bar{x}V = \int \bar{x} dV \quad \bar{y}V = \int \bar{y} dV \quad \bar{z}V = \int \bar{z} dV \quad (5.23)$$

Si el elemento de volumen dV se selecciona de manera que sea igual a un pequeño elemento laminar $dA \cdot \delta$, la evaluación de las integrales en las ecuaciones 5.23 se reduce a la integración de las ecuaciones 5.22. Sin embargo, es posible determinar las coordenadas del centroide de la mayoría de los volúmenes utilizando *integración doble* si dV se selecciona de tal forma que sea igual al volumen de un filamento delgado (figura 5.22). En tal caso, las coordenadas del centroide del volumen se obtienen resolviendo las ecuaciones 5.22:

$$\bar{x}V = \int \bar{x} dV \quad \bar{y}V = \int \bar{y} dV \quad \bar{z}V = \int \bar{z} dV \quad (5.24)$$

y sustituir las expresiones dadas en la ecuación 5.2 para el elemento dV en las ecuaciones 5.24. Si se utiliza la ecuación de la superficie para expresar z en términos de x y y , la integración se reduce a una integración doble en x y y .

Si el volumen se considera como una *placa delgada*, su centroide debe estar localizado sobre la línea de intersección de los dos planos. Seleccionando al y y z como las coordenadas con esta línea se tiene:

$$\bar{y} = \frac{\int \bar{y} dA}{A}$$

y la única coordenada que se tiene que determinar es \bar{z} . Esto se puede realizar con una *sola integración* dividiendo el volumen dado en *delgadas* partículas al plano yz y expresando a dV en términos de z y dA en la ecuación:

$$\bar{z}V = \int \bar{z} dV \quad (5.25)$$

Para cualquier tipo de revolución, las placas son *rectangulares* y sus coordenadas son $x = r$ y $y = r$.



PROBLEMA RESUELTO 5.11

Debido a la simetría, el centro de gravedad del objeto se encuentra sobre el eje x . Encuentre la ubicación homogénea que se muestra en la figura, el cual se obtiene al unir una semiesfera y un cilindro y removiendo un cono.

SOLUCION

Debido a la simetría, el centro de gravedad se encuentra sobre el eje x . En la figura se muestra la construcción. El cuerpo puede obtenerse sumándole una semiesfera a un cilindro y después restándole un cono. Los momentos de volumen de cada una de las partes se obtienen a partir de la figura 5.2) y se introduce en la tabla que aparece a continuación. Entonces, se determinan el volumen total del cuerpo y el primer momento de dicho volumen con respecto al plano yz .



Componente	Volumen, mm^3	\bar{x} , mm	$\bar{x}V$, mm^4
Semiesfera	$\frac{2}{3}\pi R^3 = 0.4524 \times 10^6$	32.5	-1.47×10^7
Cilindro	$\pi R^2 h = 1.131 \times 10^6$	50	-5.65×10^7
Cono	$-\frac{\pi}{3} R^2 h = -0.3770 \times 10^6$	25	-28.28×10^6
	$\Sigma V = 1.206 \times 10^6$		$\Sigma \bar{x}V = -18.00 \times 10^7$

Por tanto:

$$\bar{x} \Sigma V = \Sigma \bar{x}V \quad \bar{x} (1.206 \times 10^6 \text{ mm}^3) = -18.00 \times 10^7 \text{ mm}^4$$



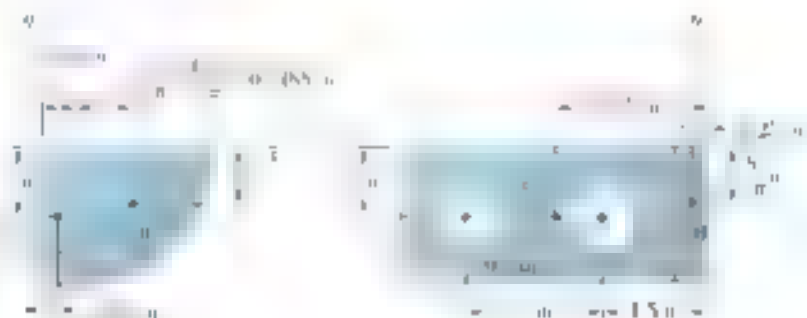
PROBLEMA RESUELTO 5.12

Calcular el momento de inercia del elemento de material que se muestra en la figura. El diámetro de cada agujero es 1 in.



SOLUCIÓN

El elemento de material se puede obtener sumándole a un rectángulo el un cuarto de cilindro (II) y, entonces, restándole dos cuartos de cilindro (III y IV). Se debe recordar que el momento de inercia de un elemento de material se puede calcular sumándole o restando el momento de inercia de las partes que lo componen, siempre que se use el teorema de Steiner.



	$V \text{ in}^3$	$\bar{x} \text{ in.}$	$\bar{y} \text{ in.}$	$\bar{x}^2 \text{ in.}^2$	$\bar{y}^2 \text{ in.}^2$	$V \bar{x}^2 \text{ in.}^4$	$V \bar{y}^2 \text{ in.}^4$
I	$4(0.25)(0.15) = 1.5$	0.125	0.075	0.0156	0.0056	0.0234	0.0084
II	$\frac{\pi}{4}(0.1)^2(0.15) = 0.0035$	0.125	0.075	0.0156	0.0056	0.0005	0.0002
III	$-\frac{\pi}{4}(0.1)^2(0.15) = -0.0035$	0.125	0.075	0.0156	0.0056	-0.0005	-0.0002
IV	$-\frac{\pi}{4}(0.1)^2(0.15) = -0.0035$	0.125	0.075	0.0156	0.0056	-0.0005	-0.0002
	$\Sigma V = 1.493$					$\Sigma V \bar{x}^2 = 0.0234$	$\Sigma V \bar{y}^2 = 0.0084$

Por tanto:

$$I_{xx} = \Sigma V \bar{x}^2 = 0.0234 \text{ in.}^4$$

$$I_{yy} = \Sigma V \bar{y}^2 = 0.0084 \text{ in.}^4$$

$$I = 0.0318 \text{ in.}^4$$



PROBLEMA RESUELTO 5.13

Debemos encontrar el momento de inercia del cono respecto al eje z. El cono tiene una altura h y una base circular en el plano xy .



SOLUCIÓN

Como el plano xy es el plano de simetría del cono, el eje z es el eje de simetría del cono. El plano xy es el plano $z=0$. Se selecciona un elemento diferencial de volumen dV en el cono. El volumen del elemento diferencial es

$$dV = \pi r^2 dz$$

La superficie lateral del cono puede ser descrita en términos de z como

$$r = \frac{R}{h} z$$

Se observa que r es proporcional a z y se escribe

$$\frac{r}{z} = \frac{R}{h} \quad r = \frac{R}{h} z$$

Así, el volumen del cuerpo está dado por

$$V = \int dV = \int_0^h \pi r^2 dz = \int_0^h \pi \left(\frac{R}{h} z \right)^2 dz = \frac{\pi R^2}{h} \int_0^h z^2 dz$$

El primer momento de volumen del cono puede ser calculado con respecto al plano xy como

$$\int_V x dV = \int_0^h \pi r^2 \int_0^{2\pi} \int_0^r x r dr d\theta dz = \frac{\pi R^2}{h} \int_0^h z^2 \int_0^{2\pi} \int_0^r x r dr d\theta dz$$

Entonces,

$$\bar{V} = \int \bar{x} dV = \frac{\pi R^2}{h} \int_0^h z^2 \int_0^{2\pi} \int_0^r x r dr d\theta dz$$

En forma similar, el momento del elemento diferencial con respecto al eje y es $\bar{y} dV$. El primer momento de volumen total del cono con respecto al eje y es

$$\int_V y dV = \frac{\pi R^2}{h} \int_0^h z^2 \int_0^{2\pi} \int_0^r y r dr d\theta dz$$

Entonces,

$$\bar{y} = \frac{\pi R^2}{h} \int_0^h z^2 \int_0^{2\pi} \int_0^r y r dr d\theta dz$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

Los problemas correspondientes a esta lección se resuelven localizando los puntos de la trayectoria de los cuerpos no homogéneos a los centros de masas correspondientes. Todas las ecuaciones se resuelven en un plano cartesiano, para poder localizar cualquier cuerpo en un sistema de coordenadas cartesianas. Las ecuaciones correspondientes a la resolución de problemas en forma independiente también pueden aplicarse para el caso tridimensional general.

En el caso de un cuerpo homogéneo, el centro de masas coincide con el centro geométrico del cuerpo, la ecuación de la trayectoria puede aplicarse para cualquier punto del cuerpo, la velocidad del cuerpo también puede localizarse con las ecuaciones (5.20)

$$V^2 W = V^2 W \quad V^2 W = V^2 W \quad Z^2 W = Z^2 W \quad (5.20)$$

Sin embargo, para el caso de un cuerpo homogéneo, el centro de masas coincide con el centro geométrico del cuerpo, la ecuación de la trayectoria puede aplicarse para cualquier punto del cuerpo, la velocidad del cuerpo también puede localizarse con las ecuaciones (5.21)

$$V^2 W = V^2 W \quad V^2 W = V^2 W \quad Z^2 W = Z^2 W \quad (5.21)$$

Debido a que estas ecuaciones son idénticas, el momento de inercia de los cuerpos homogéneos puede ser calculado directamente a partir de las ecuaciones de los centros de masas. Como se muestra en las ecuaciones (5.21) y (5.22), los momentos de inercia de los cuerpos homogéneos pueden ser calculados directamente a partir de las ecuaciones de los centros de masas. A lo largo de la resolución de problemas, se debe tener en cuenta que las ecuaciones de los centros de masas son idénticas a las ecuaciones de los centros de masas, por lo que se debe tener en cuenta que las ecuaciones de los centros de masas son idénticas a las ecuaciones de los centros de masas.

Se debe recordar que se presentan problemas que se resuelven directamente a partir de las ecuaciones de los centros de masas, por lo que se debe tener en cuenta que las ecuaciones de los centros de masas son idénticas a las ecuaciones de los centros de masas.

Para resolver los problemas de los centros de masas, se debe tener en cuenta que las ecuaciones de los centros de masas son idénticas a las ecuaciones de los centros de masas, por lo que se debe tener en cuenta que las ecuaciones de los centros de masas son idénticas a las ecuaciones de los centros de masas.

$$V^2 W = V^2 W \quad V^2 W = V^2 W \quad Z^2 W = Z^2 W$$

Las ecuaciones de los centros de masas, que se resuelven directamente a partir de las ecuaciones de los centros de masas, se pueden aplicar directamente a las ecuaciones de los centros de masas, por lo que se debe tener en cuenta que las ecuaciones de los centros de masas son idénticas a las ecuaciones de los centros de masas.

$$V^2 W = V^2 W \quad V^2 W = V^2 W \quad Z^2 W = Z^2 W$$

2. **Localización de los centros de masas por integración directa.** Cuando se aplican las ecuaciones (5.21) a los cuerpos homogéneos, se puede calcular directamente el momento de inercia de los cuerpos homogéneos a partir de las ecuaciones de los centros de masas. Como se muestra en las ecuaciones (5.21) y (5.22), los momentos de inercia de los cuerpos homogéneos pueden ser calculados directamente a partir de las ecuaciones de los centros de masas. A lo largo de la resolución de problemas, se debe tener en cuenta que las ecuaciones de los centros de masas son idénticas a las ecuaciones de los centros de masas, por lo que se debe tener en cuenta que las ecuaciones de los centros de masas son idénticas a las ecuaciones de los centros de masas.

Problemas

5.95 Determine la ubicación del centroide del cuerpo compuesto que se muestra en la figura. Ignorar cualquier agujero.



Figura P5.95

5.97 Determine la coordenada y de centroide del cuerpo mostrado en la figura.

5.98 Determine la coordenada z del centroide del cuerpo (mostrado en la figura). *Sugerencia:* Use el resultado del problema resuelto 5.13.

5.99 El cuerpo compuesto que se muestra en la figura se obtiene al cortar una semiesfera con radio a por un plano paralelo al eje z a una distancia h de su vértice. Determine *a)* la coordenada y del centroide cuando $h = a/2$ y *b)* la relación h/a para la cual $y = -0.4a$.

5.100 Para la ménsula de tope que se muestra en la figura, localice la coordenada x del centro de gravedad.

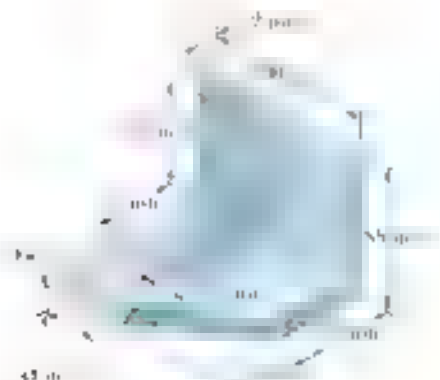


Figura P5.100 y P5.101

5.101 Para la ménsula de tope que se muestra en la figura, localice la coordenada z del centro de gravedad.



Figura P5.97 y P5.98

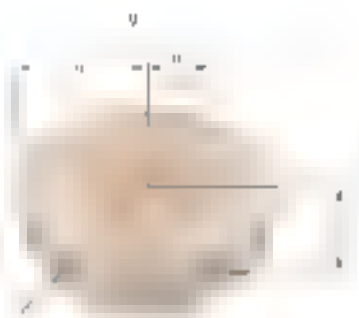


Figura P5.99



Figura P5.103 y P5.104



Figura P5.102 y P5.105

5.104 Para el elemento de máquina que se muestra en la figura, localice la coordenada z del centro de gravedad.

5.105 Para el elemento de máquina que se muestra en la figura, localice la coordenada x del centro de gravedad.

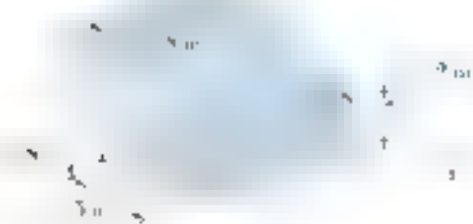


Figura P5.106

5.106 y 5.107 Localice el centro de gravedad de la hoja metálica que tiene la forma mostrada en la figura.

5.108 Una canasta de basura diseñada para colocarse en la esquina de una habitación, tiene 16 in. de altura y una base en forma de un cuarto de círculo con un radio de 6 in. La canasta está hecha de una sola pieza de hojalata, si se sabe que esta hecha de hoja metálica de espesor uniforme.



Figura P5.107



Figura P5.108

5.109 Una industria de montaje para componentes electrónicos se enfrenta a un alto porcentaje de desperdicio de material. Los técnicos que están haciendo esto son:



Figure PS.109



Figure PS.110

5.110 Una hoja delgada de plástico de espesor uniforme se coloca en un molde para la fabricación de un objeto. La hoja se genera por:

5.111 El molde para un objeto que se genera en el plano se define a partir de una hoja de metal de espesor uniforme. Los datos del objeto se dan a continuación:



Figure PS.111

5.112 El molde para un objeto que se genera en el plano se define a partir de una hoja de metal de espesor uniforme. Los datos del objeto se dan a continuación:



Figure PS.112

5.113 Un disco cilíndrico de 8 in. de diámetro y un disco rectangular de 4×8 in. se unen en la forma indicada en la figura. Localice el centro de gravedad del cuerpo, suponiendo los puntos A y B unidos por la misma hoja de metal de espesor uniforme.



Figura P5.113

5.114 Un alambre delgado de acero con una sección transversal uniforme se dobla en la forma mostrada en la figura. Localice su centro de gravedad.



Figura P5.114

5.115 y 5.116 Localice el centro de gravedad de la figura mostrada. (4 in. es igual a 10 cm.)



Figura P5.115



Figura P5.116

5.117 El bastidor de un hervidero se construye a partir de cañales de acero que pesan 100 lb/ft . Los cables de gravedad de la parte del bastidor que se muestra en la figura.

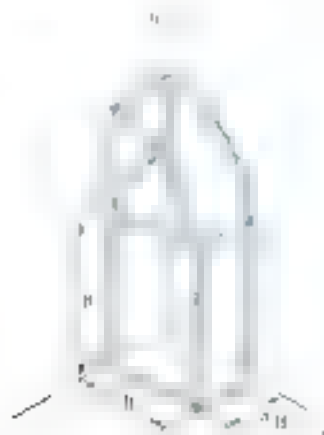


Figura P5.117

5.118 Una estructura de acero y hormigón de marcaplumas con arcos y un puente de acero. Se sabe que la densidad del hormigón es de 150 lb/ft^3 y la del acero es de 7.660 kg/m^3 . Encuentre el espesor de gravitación de la losa.

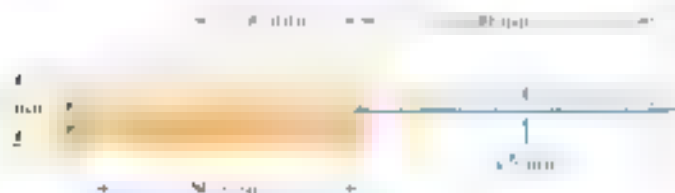


Figura P5.118

5.119 Un bloque de bronce se coloca en el centro de un arco de acero. Si se sabe que el peso específico del bronce es de 0.315 lb/in^3 y el del acero es de 0.283 lb/in^3 , determine la densidad del cuerpo de gravitación del ensamble.



Figura P5.119

5.120 Un collarín de latón, con una longitud de 2.5 m, se monta sobre una cámara de aluminio que tiene una longitud de 4 m. Encuentre el volumen de gravitación del cuerpo compuesto. Peseo específico: latón = 0.305 lb/in^3 , aluminio = 0.101 lb/in^3 .



Figura P5.120



Figura P5.121



Figura P5.125

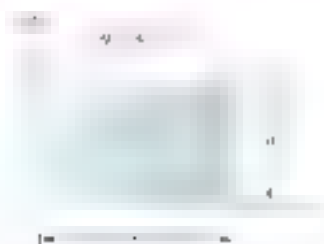


Figura P5.126



Figura P5.128 y P5.129

5.121 Las tres patas de una pequeña mesa son cubiertas de cristal con un espesor uniforme de 10 mm. Las patas tienen un diámetro exterior de 24 mm y un área de sección transversal de 150 mm^2 . El diámetro y el espesor de la cubierta de la mesa son 600 mm y 10 mm, respectivamente. Si se sabe que la densidad del cristal es 2.4 kg/m^3 , localice el centro de gravedad de la mesa.

5.122 a 5.124 Determine por integración directa los valores de \bar{x} para los volúmenes y superficies por peso, por volumen y por área, en función de las formas mostradas en la figura 5.21. El plano de corte es paralelo a la base de la forma dada y la divide en dos volúmenes de la misma altura.

5.122 Una semiesfera.

5.123 Un semielipsoide de revolución.

5.124 Un paraboloides de revolución.

5.125 y 5.126 Localice el centroide del volumen que se obtiene al rotar el área sombreada alrededor del eje x .

5.127 Localice el centroide del volumen que se obtiene al rotar el área sombreada alrededor de la línea $x = h$.

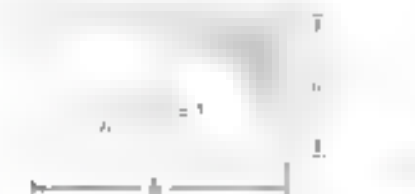


Figura P5.127

5.128 Localice el centroide del volumen generado al revolver la porción de la curva semicircular mostrada alrededor del eje x .

5.129 Localice el centroide del volumen generado al revolver la porción de la curva semicircular mostrada alrededor del eje y . Se sabe que $h = 4$ cm.

5.130 Muestre que para una pirámide regular de altura h y a lados a ($a = 3, 4, 5$) el centroide de su volumen se localiza a una distancia $h/4$ por encima de su base.

5.131 Determine por integración directa la ubicación del centroide de la mitad de un cascarón semiesférico delgado uniforme de radio R .



Figura P5.131

5.132 Las figuras a la izquierda y la parte (a) que se muestra a la derecha tienen un espesor uniforme t . Si $t \ll R$ y $R \approx 250$ mm, determine la localización del centro de gravedad de (a) la porción y (b) el poquito.

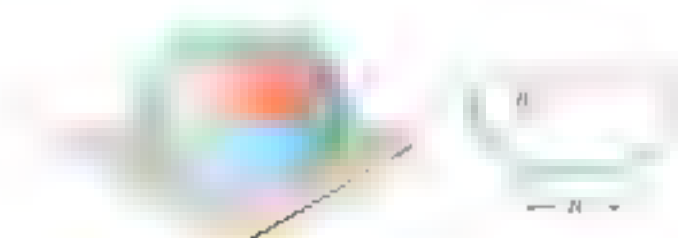


Figura P5.132

5.133 Después de un día de jugar al fútbol, un constructor coloca una alfombra para el jardín en su patio. La alfombra pesa 100 lb. Después de quitar el exceso de la alfombra, el constructor coloca un mármol de 3 in. de grosor por debajo de la alfombra. Determine el momento de gravedad que ejerce la alfombra sobre el mármol. La densidad del mármol es $\rho_m = 170$ lb/ft³. La superficie lateral de la alfombra es $A = 100$ ft². La alfombra es una alfombra cuadrada.

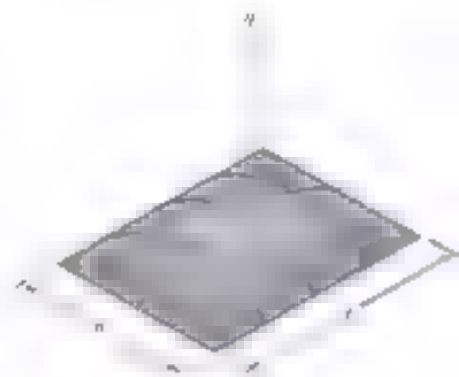


Figura P5.134

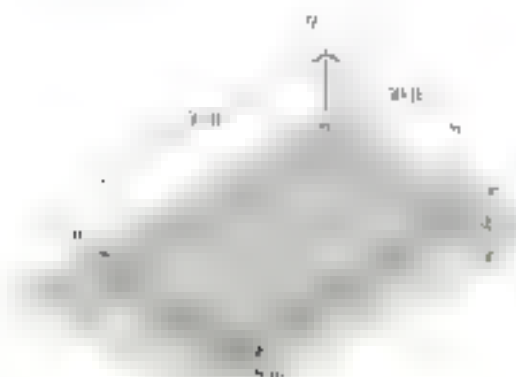


Figura P5.135

5.134 Determine el momento de gravedad sobre el mármol del centro de gravedad de la alfombra y la porción mostrada de la superficie $A = 100$ ft².

5.135 Localice el centroide de la sección que se muestra en la figura. La alfombra es una alfombra cuadrada.

5.136 Localice el centroide de la sección que se muestra en la figura. La alfombra es una alfombra cuadrada.

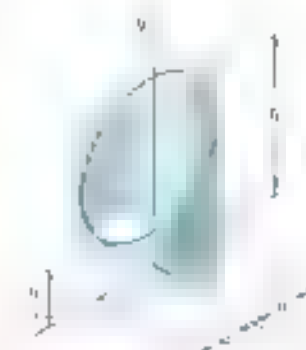


Figura P5.136

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 5

El 1.º capítulo «desarrolla una idea básica sobre la interacción de gravedad de un cuerpo rígido con un cuerpo deformable compuesto de continencia y una sola fuerza W actuando por el centro de masa, suponiendo que el cuerpo en cuestión es un cuerpo rígido. La interacción de la Tierra sobre el cuerpo en cuestión.

Control de gravedad de un cuerpo

Para el polímero i en la capital de la columna se considera un momento de torsión M_i en los ejes principales x e y en los puntos a y b de la figura. A partir de componentes de fuerza en la dirección vertical y sobre momentos con respecto a los ejes horizontales x y y [ecuación 5.2] se derivaron las relaciones:

$$W = \int t dV \quad sW = \int x t dV \quad gW = \int y t dV \quad \bar{s}W = \int \bar{s} t dV$$

Los ejes de un cuerpo rígido que pasa por el centro de gravedad.

En el caso de una placa plana homogénea de espesor uniforme δ , en la que se supone un gradiente de temperatura constante $T_0 - T_\infty$, la ley de Fourier aplicada a los elementos de longitud δ da como resultado las siguientes expresiones:

$$\bar{x}A = \int x dA \quad \bar{y}A = \int y dA \quad (5.3)$$

Se muestra, también, el efecto que produce el punto de giro de la línea alambres homopólicos de sección transversal uniforme que está continuamente girando, cuando se reduce la velocidad de rotación (de la línea L que representa al alambre; así, se tiene

21	111	411	111	11
----	-----	-----	-----	----

Se hace referencia a las integrales en las ecuaciones (5.3) como *integrables separables* (en t), $\int_0^t f(s) ds$ y $\int_0^t f(s) ds$ y, con respecto a u y v , las *no* se representan, respectivamente, con Q_u y Q_v (sección 5.4). Así, se tiene:

$$Q_v = \alpha A \quad Q_i = \eta A \quad (5.6)$$

Los primeros puntos de debate son: ¿cómo puede haber un "bien" común?

La determinación del centroide C de un área o de una línea se simplifica cuando el área o la línea poseen ciertas *propiedades de simetría*. Si el área o la línea es simétrica con respecto a un eje su centroide C se encuentra sobre dicho eje; si el área o la línea es simétrica con respecto a dos ejes C está localizada en su intersección.

Propiedades de simetría

sección de los dos ejes: si el área o la línea es simétrica con respecto a un centro O , C coincide con O .

Las áreas A_i de centros de partes formadas por curvas limitadas en una figura S cuando en principio se dividen en varias de estas formas, las coordenadas X y Y de su centro de gravedad G_i se pueden determinar a partir de las coordenadas \bar{x}_i y \bar{y}_i de los centros de gravedad G_1, G_2, \dots de las diferentes partes (sección 5.5). Asimismo, respecto al centro de gravedad en relación a los ejes y y x (figura 5.24) se tiene que

$$\sum x_i W = \bar{x} W \quad \sum y_i W = \bar{y} W \quad (5.7)$$



Figura 5.24

Si el plano es homogéneo y de espesor uniforme se se reduce en gravedad se reemplaza con centro de C la area de las partes y las coordenadas (5.7) se reducen a

$$\bar{Q}_x = \bar{x} A = \sum x_i A \quad \bar{Q}_y = \bar{y} A = \sum y_i A \quad (5.8)$$

De estas ecuaciones se obtiene a los primeros momentos \bar{Q}_x y \bar{Q}_y y existen las partes resolverse para las coordenadas \bar{x} y \bar{y} de su centro de (problema resuelto 5.1). La determinación del centro de gravedad en un área C cuando se lleva a cabo se reduce a la (problema resuelto 5.2).

Cuando un área está limitada por curvas analíticas, las coordenadas de su centro de gravedad se obtienen por integración (sección 5.6). Esto se puede realizar evaluando por integración las funciones x y y evaluando en cada una de las partes de la figura 5.25. Se toma la forma de un rectángulo de grosor δ de un elemento de gravedad. Al representar con \bar{x}_d y \bar{y}_d las coordenadas del centro de gravedad de la parte dA se tiene que

$$\bar{Q}_x = x A = \int x dA \quad \bar{Q}_y = y A = \int y dA \quad (5.9)$$

Es ver que de la misma manera se obtiene la area para calcular los primeros momentos \bar{Q}_x y \bar{Q}_y en el misma elemento de gravedad se puede utilizar para determinar la area A (problema resuelto 5.4).



Figura 5.25

Los *teoremas de Pappus-Centroides* relacionan la determinación del área de una superficie de revolución o el volumen de un cuerpo de revolución con el área o el volumen de la curva generatriz o del área generatriz, respectivamente, y la distancia h de la superficie generatriz al eje de rotación. La longitud L con respecto a un eje fijo (figura 5.25a) es igual a

$$A = 2\pi hL \quad (5.10)$$

donde h es la perpendicular distancia desde el eje fijo a la curva generatriz y A es el área de la superficie generatriz. El volumen V de un cuerpo de revolución rotado alrededor de un eje fijo (figura 5.25b) es igual a

$$V = 2\pi hA \quad (5.11)$$

donde h es la perpendicular distancia desde el eje fijo al área generatriz y A es el área.

El concepto de centro de gravedad también se puede utilizar en el estudio de las condiciones de equilibrio de cuerpos con el peso de placas planas. Por ejemplo, para determinar las reacciones en los apoyos de una viga (sección 5.8), se puede reemplazar una *carga distribuida* por una *carga puntual* W igual a la integral de la carga w sobre la curva de carga, que pasa a través del centroide C de dicha área (figura 5.26). Se puede utilizar el mismo procedimiento para determinar la resultante de las fuerzas hidrostáticas ejercidas sobre una *placa plana* (sección 5.9) o sobre una *placa curva* (sección 5.9).



Figura 5.26

Centro de gravedad de un cuerpo

La última parte del capítulo estuvo dedicada a la determinación del *centro de gravedad* G de un *cuerpo tridimensional*. Las coordenadas \bar{x} , \bar{y} y \bar{z} de G se definirán por las relaciones

$$\bar{x}W = \int x \, dW \quad \bar{y}W = \int y \, dW \quad \bar{z}W = \int z \, dW \quad (5.12)$$

donde W es el *peso* de la *carga* o el *volumen* V de *cuerpo*. Las coordenadas de G están definidas por las relaciones

$$\bar{x}V = \int x \, dV \quad \bar{y}V = \int y \, dV \quad \bar{z}V = \int z \, dV \quad (5.13)$$

Si el volumen tiene un *plano de simetría*, su *centroide* G estará en dicho *plano*. Si el volumen posee los *planos de simetría* xy , xz y yz , entonces G coincidirá con el *punto de intersección* de los dos planos si el cuerpo tiene *tres ejes de simetría* que se interseccionan en solo un *punto*. G coincidirá con dicho punto (sección 5.10).

Centroide de un volumen

[illegible]

$$\bar{F}\Sigma W = \Sigma \bar{F} W \quad \bar{F}\Sigma W = \Sigma \bar{F} W \quad \bar{Z}\Sigma W = \Sigma \bar{Z} W \quad (5.20)$$

Si el cuerpo es finito en el sentido de que el número de elementos es finito, entonces el cuerpo es finito. Si el cuerpo es infinito, entonces el número de elementos es infinito. En este caso, el cuerpo es infinito.

$$X\Sigma V = \Sigma_X V \quad Y\Sigma V = \Sigma_Y V \quad Z\Sigma V = \Sigma_Z V \quad (5.31)$$

Consequently, the stability of the proposed algorithm is less sensitive to the choice of the step size α than the previous algorithms. In fact, the proposed algorithm is stable for all α satisfying $\alpha \geq \frac{1}{2} \frac{\|A\|}{\|A\| + \|B\|}$, where $\|A\|$ and $\|B\|$ are the spectral norms of the matrices A and B , respectively.

Figure 5.27

en la ecuación (5.19) se pueden usar elementos de volumen que no sólo son de elementos de guiso como se muestra en la figura 5.27. Al representar con x_{10} , y_{10} y z_{10} las coordenadas del centro de gravedad del Δ , se considera las coordenadas \bar{x} , \bar{y} y \bar{z} como

[illegible]

Las cuales involucran esculpir grandes volúmenes. Si se comienza con una *plataforma de sustentación* su función es estar localizada al centro del volumen de trabajo de dichos planos. Se selecciona una arista que quedará a lo largo de esa línea y se divide el volumen en placas delgadas, paralelas al plano de sustentación, se puede dividir en 10 a partir de la relación.

$$xV = \int x_n dV \quad (5.24)$$

Երևանում հրատարակվող լրագրության բաժանիկ 513 Է. Բոլոր
 հոդվածները տպագրվում են լատինական այբուբենով և հայերենով
 չեն թարգմանվում 528

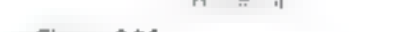
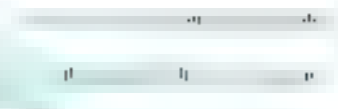


Figure 6.28

Problemas de repaso

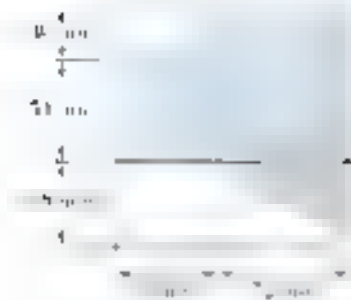


Figura P5.137

Figura P5.138

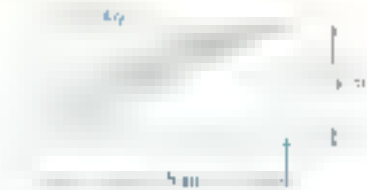


Figura P5.138

5.139 El bastidor para un señalamiento se fabrica a partir de una barra de longitud 10 m y 10 kg de masa por unidad de longitud. El bastidor se sostiene en un punto A y se conecta al cable AB . Determine $a)$ la tensión en el cable $b)$ la reacción en C .

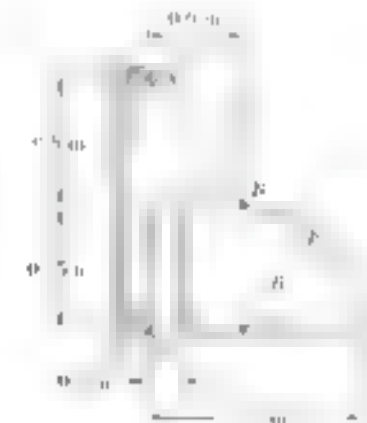


Figura P5.139

5.140 Determine por integración directa el centroide del área mostrada en la figura. Exprese la respuesta en términos de a y b .



Figura P5.140

5.141 Determine qué porcentaje del área total de la figura mostrada en la figura. Exprese la respuesta en términos de a y b .

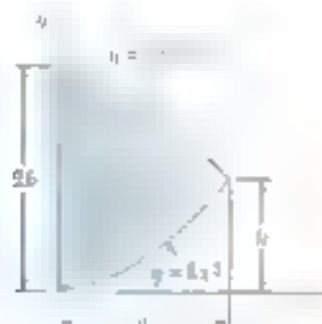


Figura P5.141

5.142 Si se sabe que se han retirado dos tapas iguales de la esfera de radio $r = 1$ cm, determine qué porcentaje de la superficie total de la porción restante.



Figura P5.142

5.143 Para las cargas dadas, determine las reacciones en los apoyos de E_1 y E_2 .



Figura P5.143

5.144 Una viga está sometida a una carga descentente linealmente distribuida y descansa sobre dos apoyos simples P_1 y P_2 (ver cargas y apoyos indicados sobre la viga). Determine las reacciones en los apoyos P_1 y P_2 para una viga con una longitud total de 10 m y una carga total de 1000 N/m.



Figura P5.144

5.145 La compuerta circular A/B se mantiene en la posición mostrada en la figura con una fuerza horizontal P aplicada en el punto B . La compuerta está sujeta a una presión hidrostática que varía con la profundidad. Determine la fuerza P necesaria para mantener la compuerta en la posición mostrada en la figura.



Figura P5.145

5.145 Considere el cuerpo compuesto que se muestra en la figura. Determine los valores de x cuando $I_x = I_y$ de la manera que $I_x = I_y$.

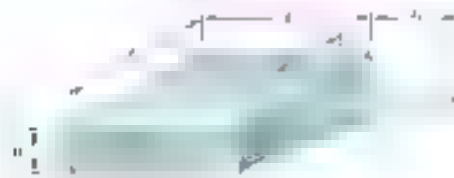


Figura P5.145

5.147 Localice el centro de gravedad de una hoja metálica que tiene la forma mostrada en la figura.



Figura P5.147

5.148 Localice el centro de la rodadura que se obtiene al cortar el área mostrada alrededor del eje x .

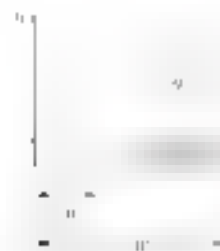


Figura P5.148

5.C.4 Aplica el método de momentos en la figura 5.C.4 para encontrar \bar{x} y \bar{y} de la figura sombreada después de que se retire para el control la subsección. Los centroides de la figura 1 se dan para el control. Para determinar la coordenada del centroide cuando $\sigma = 1$ in, $L_1 = 11$ in, $h_1 = 2$ in, $h_2 = 2$ in, $L_2 = 17$ in, $L_3 = 3$ in, $a = 5$ in, $b = 12$ in, $L_4 = 3$ in.

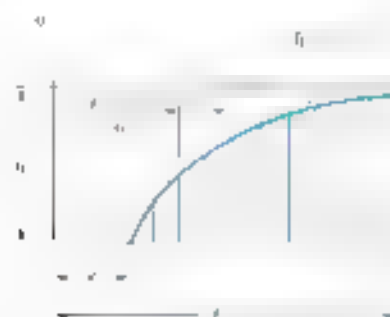


Figura P5.C4

5.C.5 Aplica el método de momentos en la figura 5.C.5 para encontrar \bar{x} y \bar{y} de la figura sombreada después de que se retire para el control la subsección. Los centroides de la figura 1 se dan para el control. Para determinar la coordenada del centroide cuando $a) m = 2$, $n = 30$ mm, $b = 30$ mm, $h_1 = 2$, $n = 30$ mm, $h_2 = 30$ mm, $c = 5$, $n = 30$ mm, $L_1 = 30$ mm, $d) m = 5$, $n = 30$ mm, $h_2 = 30$ mm, $c = 5$, $n = 30$ mm. Compara tus respuestas obtenidas con los valores exactos de \bar{x} y \bar{y} calculados a partir de la fórmula exacta en el apéndice A y con los valores de \bar{x} y \bar{y} calculados de la figura 5.C.5.

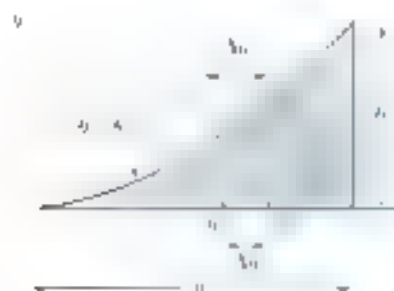


Figura P5.C5

5.C.6 Resuelve el problema 5.C.5 ahora con los rectángulos de la figura 5.C.6.

5.C.7 Un granjero pide a un grupo de estudiantes de ingeniería que determine el momento de inercia de agua en un recipiente cuadrado. Alguien dice que se debe usar la fórmula de un sólido rectangular en el punto 1 para encontrar I_{xx} de la subsección en el lado izquierdo y agregarla al momento de inercia del agua en el lado derecho para obtener el momento de inercia total. Otro estudiante dice que se debe usar la fórmula de un sólido rectangular en el punto 1 para encontrar I_{xx} de la subsección en el lado izquierdo del centro de gravedad del agua. Aprender la importancia de que el

es una la agenda 3 x 30 donde el producto de las probabilidades se asigna en las cuatro esquinas de dicho elemento

	Cuerda									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1					0	0	0			
2			0	0	0	1	0	0	0	
3		0	0	1	3	3	3	1	0	0
4	0	0	1	3	6	6	6	3	1	0
5	0	1	2	6	8	6	6	3	1	0
6	0	1	3	6	8	7	7	3	0	0
7	0	3	4	6	6	6	4	1	0	
8	0	3	3	3	3	3	1	0	0	
9	0	0	0	1	1	0	0			
10			0	0	0	0				

Las armaduras, como los puentes de arco
con voladizo están firmes al estado de
Nueva York, proporcionan una solución
práctica y económica para muchos pro-
blemas de ingeniería.

CAPITULO

6

Analisis de estructuras



En este capítulo se considerarán tres categorías amplias de estructuras de ingeniería:

1. **Armaduras**, las cuales están diseñadas para soportar cargas y por lo general son estructuras estacionarias que están totalmente restringidas. Las armaduras consisten exclusivamente de elementos rectos que están conectados en nodos localizados en los extremos de cada elemento. Por tanto, los elementos de una armadura son elementos puros de fuerzas (los elementos solo son sometidos a fuerzas iguales y opuestas por sus extremos y al largo del elemento).
2. **Armazones**, los cuales están diseñados para soportar cargas, se usan también como estructuras estacionarias que están totalmente restringidas. Sin embargo, como se ilustra a guisa de la figura 6.1, los armazones siempre contienen por lo menos un elemento sujeto a varias fuerzas; esto es, un elemento sobre el cual actúan tres o más fuerzas que, en general, no están dirigidas a lo largo del elemento.
3. **Magudas**, las cuales están diseñadas para transmitir y recibir cargas, son estructuras que contienen partes en movimiento. Las magudas al igual que los armazones, siempre contienen por lo menos un elemento sujeto a varias fuerzas.



Fotografía 6.1 En la foto se muestra una conexión con juntas de pander sobre el acero del puente de la Bahía de San Francisco y el puente de la Bahía de San Francisco y el puente de la Bahía de San Francisco.

ARMADURAS

6.2. DEFINICIÓN DE UNA ARMADURA

Las armaduras son uno de los principales tipos de estructuras que se usan en ingeniería. Esta preferencia es una solución práctica y económica para muchas situaciones. El interés en especial para el diseño de puentes y edificios, en la figura 6.2a se muestra una armadura típica. Una armadura consta de elementos rectos que se conectan en nodos (véase el apartado 6.2.1). En cada nodo, los elementos se conectan y se extienden, pero tanto, ningún elemento continúa más allá de un nodo. Por ejemplo, en la figura 6.2a no existe un elemento AB; en su lugar existen dos elementos distintos AD y DB. La mayoría de las estructuras reales están hechas a partir de varias armaduras unidas entre sí para formar una estructura espacial. Cada armadura está diseñada para soportar cargas que actúan en su plano y, por tanto, pueden ser tratadas como estructuras bidimensionales.

Las armaduras de una armadura, por lo general, son delgadas y sólo pueden soportar cargas laterales perpendiculares; por eso todas las cargas deben estar aplicadas en los nodos y no sobre los elementos. Cuando se va a aplicar una carga concentrada entre dos nodos o cuando la armadura debe soportar una carga distribuida, como en el caso de la armadura de un puente, debe proporcionarse un sistema de soporte al momento de el uso de travaseros y vigueras, transmite la carga a los nodos (figura 6.2b).

Los pesos de los elementos de la armadura y las cargas los nodos aplicándose la mitad del peso de cada elemento a cada uno de los nodos a los que éste se conecta. A pesar de que en realidad los elementos están unidos por medio de conexiones empalmadas o soldadas es común suponer que los elementos están conectados por medio de pernos; por tanto, las fuerzas que actúan en cada uno de los extremos del elemento se consideran como fuerzas de apoyo y de reacción.



Figura 6.2



Figura 6.4



Figura 6.3

es evidente se supone que las barras o las fuerzas que actúan sobre y dentro de la armadura son una sola fuerza en cada uno de los extremos de los elementos. Entonces, cada elemento puede tratarse como sometido a la acción de dos fuerzas, mientras que la armadura como un todo, puede considerarse como un grupo de pernos y elementos sujetos a dos fuerzas, como se ilustra en el elemento convencional sometido a dos fuerzas, como se ilustra en la figura 6.4. En la figura 6.5 se muestran las fuerzas de tracción y compresión en la armadura y las fuerzas de tracción y compresión en el elemento y la fuerza de tracción y compresión en la figura 6.5 se muestran algunas armaduras típicas.

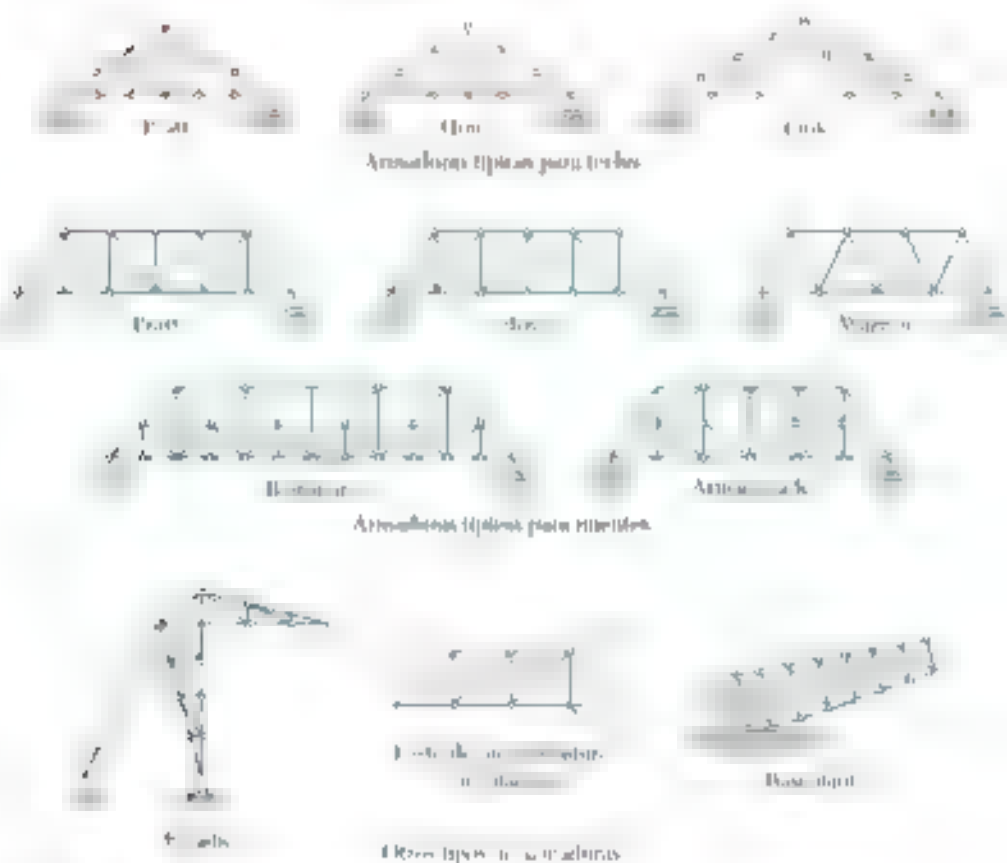


Figura 6.5

6.3. ARMADURAS SIMPLES

Considere la armadura mostrada en la figura 6.6a, la cual está constituida por cuatro elementos verticales y dos rectos de puentes AB y CD . Si se aplica una carga en B la armadura se deformará hacia el exterior por el peso de la estructura original. Por el contrario, la armadura de la figura 6.6b, la cual está constituida por tres elementos verticales y dos rectos de puentes AB y CD , solo se deformará ligeramente si tiene la misma forma y carga aplicada en B . Las tres deformaciones posibles de esta armadura se muestran por medio de las líneas AB , BC y CD en la figura 6.6c. Por lo tanto, se dice que la armadura de la figura 6.6b es una armadura simple, puesto que se ha conseguido que a indicar que la armadura no se colapsa.

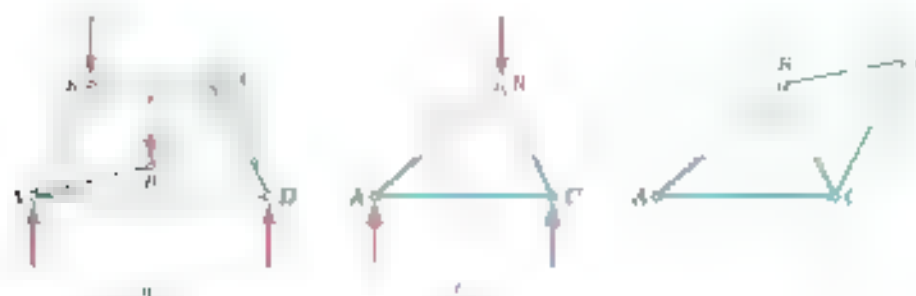


Figura 6.6

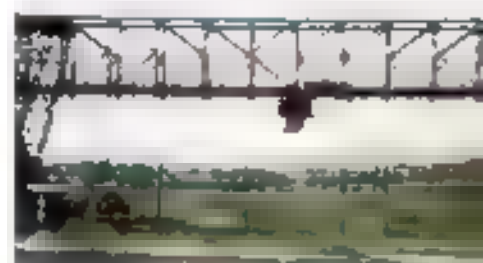
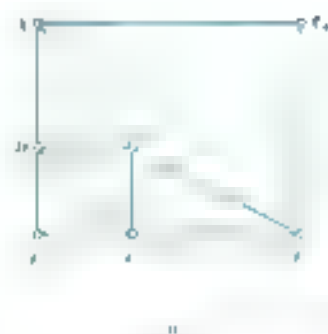
Cuando se muestra en la figura 6.6b, se puede obtener una armadura rígida al agregar los elementos BD y CD a la armadura simple de la figura 6.6a. Este proceso puede repetirse tantas veces como se desee y la armadura resultante se agrega a sí cada vez que se agregan dos nuevos elementos, estos se unen a dos nodos ya existentes y además se conectan entre sí. ¿Por qué? Una armadura que se puede construir de esta forma se denomina armadura simple.

Se debe señalar que una armadura simple no es la única necesaria para la construcción de puentes. Por ejemplo, la armadura de la figura 6.6d es una armadura simple que no puede ser construida a partir de un solo triángulo. Al agregar los elementos BD y CD a la armadura simple de la figura 6.6a, se obtiene una armadura rígida. Si se agrega los elementos BD y CD a la armadura simple de la figura 6.6b, se obtiene una armadura rígida. Por lo tanto, las armaduras de Pink y Baltimore mostradas en la figura 6.3, no son armaduras simples, puesto que no pueden construirse a partir de un solo triángulo. La forma más sencilla de una armadura rígida es la de una armadura simple que se muestra en la figura 6.6b. Las armaduras rígidas se construyen a partir de una armadura simple y se agregan los elementos BD y CD a la armadura simple de la figura 6.6a. Para la armadura K se debe comenzar con uno de los triángulos centrales.

En la figura 6.6 se observa que la armadura triangular básica de la figura 6.6a tiene tres elementos y tres nodos. La armadura de la figura 6.6b tiene dos elementos y un nodo adicionales, esto es, cuatro elementos y cuatro nodos en total. Si se repite este proceso una vez que se agregan dos nuevos elementos, los nodos se incrementan en dos y los elementos en dos. Por lo tanto, la armadura simple de la figura 6.6b tiene n elementos y $n+1$ nodos, donde n es el número de elementos.

Las armaduras que tienen un elemento.

www.geocienciasvirtual.blogspot.com.co



Fotografía 6.2 Dos armaduras K se están usando como los principales componentes del puente móvil que se muestra en la foto. En cada una hay una gran cantidad de un gran monón de mineral de reserva. El cubo que se encuentra debajo de las armaduras levanta mineral y lo redistribuye hasta que el mineral estuvo completamente mezclado. Después el mineral se envía al molino para incorporarlo a un proceso de producción de acero.



Figura 6.7



Fotografía 6.3 Las armaduras para fuerzas colgadas que se muestran en la foto requieren apoyo solo en los extremos. Gracias a esto es posible utilizar construcciones con grandes áreas de cobertura en el piso.

6.4. ANÁLISIS DE ARMADURAS MEDIANTE EL MÉTODO DE LOS NODOS

En la sección 6.2 se vio cómo una armadura simple puede ser analizada como un grupo de pernos y elementos sometidos a fuerzas. En los ejemplos de la figura 6.2, como muestra el diagrama de cuerpo libre de la figura 6.7a, se puede desarmar y dibujar un diagrama de cuerpo libre que muestra a los pernos y a los elementos de la figura 6.7a. Cada elemento de esta estructura es sometido a dos fuerzas, una en cada uno de sus extremos. Estas fuerzas tienen la misma magnitud, la misma dirección de acción y sentidos opuestos (sección 4.6). Además, la tercera ley de Newton implica que las fuerzas en acciones y reacciones entre los pernos y los elementos son iguales y opuestas. Por tanto, las fuerzas pernos por elemento sobre los dos pernos a los cuales se conecta deben estar dirigidos a lo largo de ese elemento y deben ser iguales y opuestas. Como conveniencia se hace referencia a la magnitud común de las fuerzas ejercidas por un elemento sobre dos pernos y a las que se ejercen sobre el elemento por los dos pernos y solo se denota con F por esta cantidad en realidad es un escalar. Como las líneas de acción de todas las fuerzas actúan en el mismo plano, las ecuaciones de equilibrio de la estructura se reducen a determinar las fuerzas en los elementos, que lo constituyen y a determinar si cada uno de ellos se encuentra en tensión o en compresión.

Como la armadura en su totalidad está en equilibrio, cada perno de la estructura es libre. El que un perno esté en equilibrio se expresa dibujando un diagrama de cuerpo libre y escribiendo dos ecuaciones de equilibrio (sección 2.2). Para cada uno de los n pernos de la figura 2a se hacen disponibles las ecuaciones de equilibrio de los nudos. En el caso de una armadura simple se tiene $n = 2m + 1$, es decir $2n - m = m + 1$ ecuaciones más que se pueden escribir a partir de las ecuaciones de equilibrio de los pernos de la estructura. Esto significa que las fuerzas en todos los elementos, las fuerzas de puntos de la reacción R_1 y la reacción R_2 se determinan construyendo los diagramas de cuerpo libre de los pernos.

El hecho de que la armadura como un todo sea un cuerpo rígido que está en equilibrio se puede utilizar para escribir tres ecuaciones adicionales que involucren a las fuerzas mostradas en el diagrama de cuerpo libre de la figura 6.7a. Puesto que estas ecuaciones no contienen ninguna incógnita, una vez se han determinado las reacciones, estas dadas con los diagramas de cuerpo libre de los pernos se pueden utilizar las tres ecuaciones en cuestión se pueden emplear para determinar los componentes de las reacciones en los apoyos. El arreglo de pernos y elementos en una armadura simple es tal que siempre será posible encontrar un nudo que involucre a un conjunto de tres fuerzas desconocidas. Las fuerzas se determinan por medio de los métodos de la sección 2.11 y sus valores se transfieren a los nudos adyacentes tratándolos como conocidos. Conociendo los nudos adyacentes este procedimiento se puede repetir para determinar todas las fuerzas desconocidas.

Como ejemplo se analiza la armadura de la figura 6.7 como si se desarmara sucesivamente. En primer lugar cada perno se trata con el método de la sección 2.11 y solo dos fuerzas son desconocidas. En dicha armadura todos los pernos son sujetos y cada uno tiene tres fuerzas desconocidas. Por tanto, primero se deben determinar las reacciones en los apoyos considerando a toda la armadura como cuerpo libre y utilizando las ecuaciones de equilibrio para un cuerpo rígido. De esta forma, R_1 es vertical y se determinan las magnitudes de R_1 y R_2 .

El análisis de las fuerzas de estructura en el nodo A se puede hacer de dos maneras. Si se pueden determinar considerando el equilibrio del perno A, es decir, H_A y las fuerzas F_{AC} y F_{AD} , es decir, las sales del perno A por los elementos AC y AD respectivamente, deben formar un triángulo de fuerzas. Primer se dibuja H_A hacia la izquierda, luego se F_{AC} y F_{AD} se dibujan de largo de AC y AD respectivamente. Se completa el triángulo de fuerzas y se obtiene la magnitud y sentido de F_{AC} y F_{AD} . Las magnitudes F_{AC} y F_{AD} representan las fuerzas en los AC y AD. Como F_{AC} está dirigida hacia abajo, hacia la izquierda es, hacia el nodo A, el elemento AC empuja el perno A y, por consiguiente, la fuerza en el elemento es de compresión. Como F_{AD} está dirigida alejándose del nodo A, el elemento AD tira al perno A y, por consiguiente, la fuerza en el elemento es de tensión.

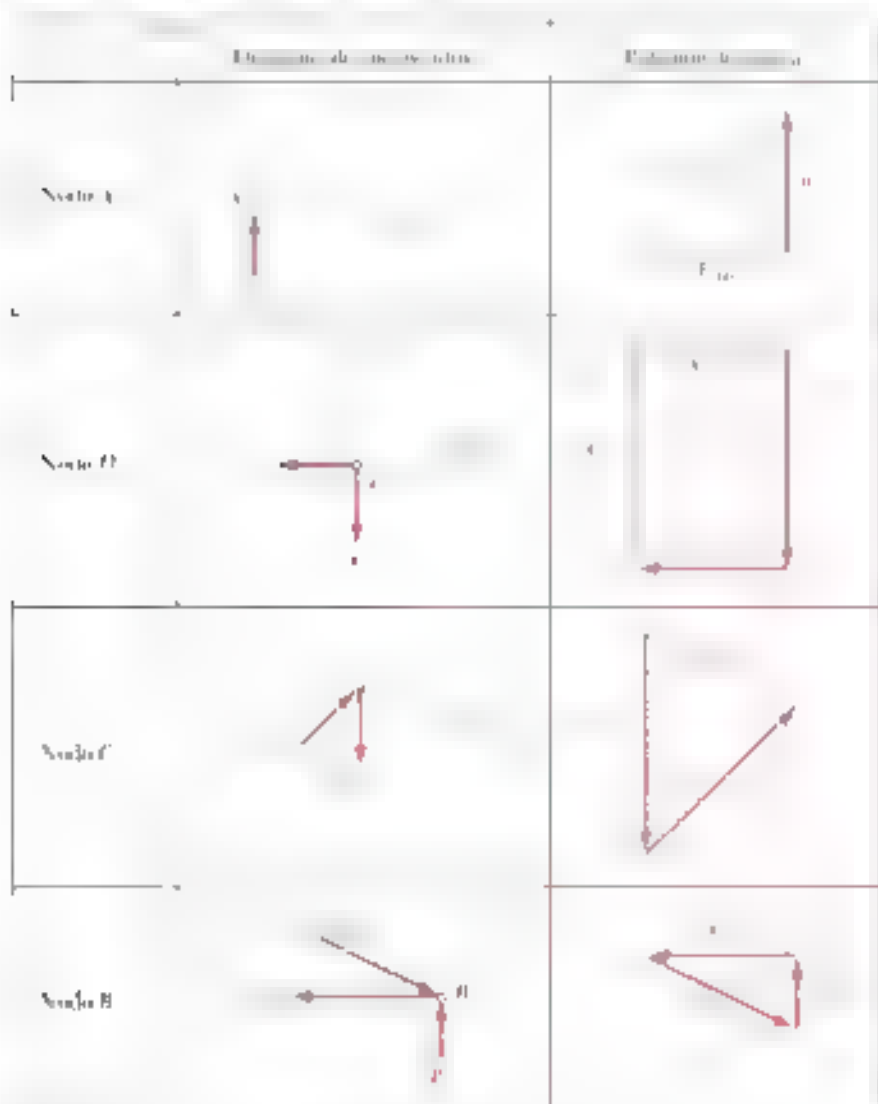


Figura 6.8

Ahora se procede a considerar el nodo D en el cual sólo dos fuerzas F_{AD} y F_{BD} que son las sales de las fuerzas en los elementos AC y AD respectivamente. Como se sabe que la fuerza F_{AD} es igual y opuesta a la fuerza F_{AD} ejercida por el mismo elemento sobre el perno A, como se muestra en la figura 6.9 se puede dibujar el polígono de fuerzas correspondiente al nodo D y obtener



Figura 6.9

Figura 6.10

eliminar las fuerzas F_{DC} y F_{DB} a partir de dicho polígono. Sin embargo, cuando estas dos fuerzas se eliminan, las ecuaciones de equilibrio $\sum F_x = 0$ y $\sum F_y = 0$ permanecen como ecuaciones desequilibradas. Como se encuentra que ambas fuerzas se alejan del nodo D , los elementos DC y DB jalan al perno y se concluye que ambos están en tensión.

Después se considera el nodo C cuyo diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura 6.8. Se observa que tanto F_{CD} como F_{CA} son conocidas a partir del análisis de los nodos anteriores y que solo F_{CB} es desconocida. Como el equilibrio se alcanza solo por el efecto de la fuerza F_{CB} , los dos ángulos se eligen de tal manera que la suma de las fuerzas en el plano de este nodo se balancee y, en consecuencia, las fuerzas se determinan directamente a partir de F_{CD} . Como F_{CB} se aleja de la barra, como F_{CD} el elemento CB empuja por lo que F_{CB} está en compresión. La conclusión se obtiene al aplicar por la fuerza F_{CB} y el elemento CB son paralelos.

En el nodo B todas las fuerzas son conocidas. Puesto que el perno en este punto está en equilibrio, el ángulo de las fuerzas debe ser perpendicular a esta línea, una disposición que funciona al analizar los demás.

Para evitar la confusión que se genera al tener fuerzas mostradas en el lugar de las ecuaciones, cada uno de los polígonos de fuerzas se realiza con la configuración de un nodo. Por eso que cuando se tienen fuerzas que se alejan de un nodo, el polígono se muestra como en la figura 6.11. De esta manera se evita la confusión que se obtiene al tener las tres fuerzas F_{CB} , F_{CD} y F_{CA} en el punto de reunión de tres miembros que actúan en el mismo punto. Se recomienda seguir los pasos de resolución al realizar un diagrama de cuerpo libre de un miembro de las siguientes maneras: primero, dibujar el miembro y las fuerzas que actúan sobre él; segundo, se pueden tener un solo diagrama, como se ilustra en la figura 6.10. Un ejemplo de este tipo de construcción es una de las que se muestra en la figura 6.11, mediante el análisis de grifos de problemas que involucran arcos.

6.5 NODOS BAJO CONDICIONES ESPECIALES DE CARGA

Observe la figura 6.11a, en la cual el nodo empuja a cuatro elementos que están unidos por dos líneas rectas que se cruzan. Puesto que cada elemento se mueve en la dirección de muestra, por lo tanto, la suma de las fuerzas debe estar en equilibrio. Por tanto, el módulo de las fuerzas debe ser el mismo de los dos lados. Las fuerzas que actúan en elementos que están unidos deben ser iguales.

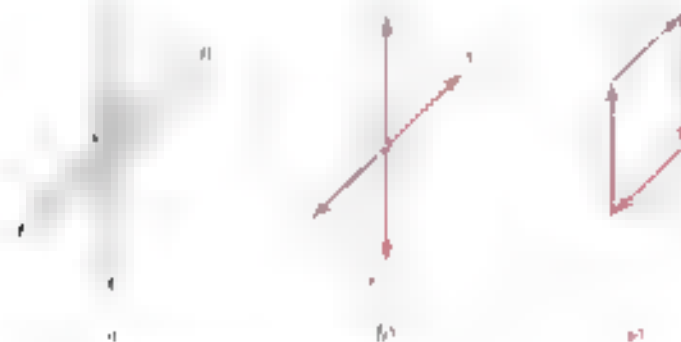


Figura 6.11

A continuación considere la figura 6.13e, en la cual el nodo muestra los miembros, elementos y soportes, una carga P . Dos de los elementos se encuentran en equilibrio sobre la misma línea y la carga P actúa a lo largo del eje x de los miembros. El diagrama de cuerpo libre del nodo A y el postulado de fuerzas correspondiente de ser un elemento se muestran en la figura 6.13f y es reemplazado a F_{AC} por la carga P . Por tanto, las fuerzas en los dos miembros que están en la misma línea y en el mismo sentido se llaman también una igual a F_{AC} y la fuerza P se muestra a lo largo de la línea AC interna, que es la única fuerza externa actuando al nodo A de modo que $F_{AC} = 0$. La fuerza en el elemento AC es igual a cero. Por tanto, se dice que el elemento AC es un elemento de fuerza cero.

Consideremos ahora un cuerpo que subyace a dos fuerzas concurrentes. A partir de la sección 2.9 se sabe que una partícula sobre la que actúan dos fuerzas estará en equilibrio si las dos fuerzas tienen la misma magnitud, la misma línea de acción y sentidos opuestos. En el caso del cuerpo de la figura 6.13a, el equilibrio se alcanza cuando las fuerzas \vec{A} y \vec{B} que se aplican son iguales en magnitud, tienen la misma línea de acción y sentidos opuestos. Si las fuerzas que se aplican a este cuerpo no cumplen con este requisito, el cuerpo no puede estar en equilibrio ni siquiera que las fuerzas en ambas direcciones sean iguales a cero. Por tanto, los miembros de un cuerpo como se muestra en la figura 6.13b deben ser elementos de fuerza cero.

[illegible]

Se debe observar que las condiciones descritas en el párrafo anterior son válidas para cualquier sistema de fuerzas P y D de la figura 14, y a su vez, son necesarias para que el sistema P y D sea un S.E.N. que actúe sobre los elementos AB y BD con igualdad. Las fuerzas en estos elementos y en los testeros se encuentran en equilibrio con los nodos A , B y D E , F , G , H y I en la columna lateral. Y tanto hasta que se supiera la naturaleza de las condiciones y permitiera aplicar las condiciones dadas en el párrafo anterior, el diagrama de momentos en los testeros por los y en los nodos de las columnas se pudo determinar directamente por los polígonos de fuerzas correspondientes, si se aplican las reglas de construcción de los mismos, se obtienen los momentos en los testeros y en las columnas que se describirán anteriormente.

Un comentario final en relación con los elementos de fuerza certifica-
dos: estos elementos no son mutuos. Por ejemplo, la presencia de un elemento

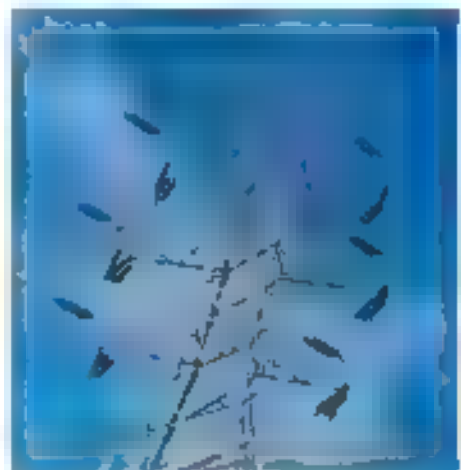


Figure 6.12

Figure 4.13



Figure 6.14



Fotografía 8.4 Las armaduras bidimensionales o espaciales se usan para las torres de transmisión de energía eléctrica y también en estructuras de muelle y para aplicaciones a naves espaciales, como en los componentes de la Estación Espacial Internacional.



PROBLEMA RESUELTO 6.1

Con el uso del método de los nodos, determine la fuerza en cada uno de los elementos de la armadura mostrada.

SOLUCIÓN

Cuerpo libre: armadura completa. Se dibuja un diagrama de cuerpo libre de toda la armadura. Las fuerzas que actúan en este cuerpo libre consisten en las cargas aplicadas y en las reacciones en C y en E. Se escriben las ecuaciones de equilibrio siguientes:

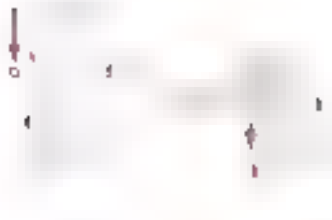
$$+\circlearrowleft \Sigma M_i = 0: \quad (2,000 \text{ lb})(24 \text{ ft}) + (1,000 \text{ lb})(12 \text{ ft}) - E(30 \text{ ft}) = 0$$

$$E = +10,000 \text{ lb} \quad E = 10,000 \text{ lb} \uparrow$$

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0: \quad C_x = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad -2,000 \text{ lb} - 1,000 \text{ lb} + 10,000 \text{ lb} + C_y = 0$$

$$C_y = -7,000 \text{ lb} \quad C_y = 7,000 \text{ lb} \downarrow$$



Cuerpo libre: miembro AB. El parte superior a los miembros desmembrados, se les a las fuerzas que actúan por los elementos AB. Se usa un diagrama de cuerpo libre de un miembro AB. Se sabe que el miembro AB puede moverse hacia la izquierda, hacia la derecha, hacia arriba y hacia abajo. Además, el miembro AB puede girar sobre su punto de apoyo. Se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la que muestra se dibujan a partir de la proporción:

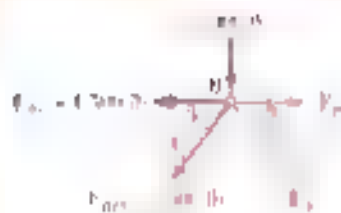
$$\frac{2,000 \text{ lb}}{4} = \frac{F_{AB}}{3} = \frac{F_{AB}}{5}$$



Cuerpo libre: miembro DE. Como la fuerza ejercida por el elemento AB en el nodo B, que debe ser la misma que la ejercida en el nodo A, se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la que muestra se dibujan a partir de la proporción de los miembros desmembrados en los elementos DB y DE.

$$F_{DE} = F_{AB} \quad F_{DE} = 2,000 \text{ lb} \uparrow$$

$$F_{DE} = 2(1/5)F_{AB} \quad F_{DE} = 1,000 \text{ lb} \uparrow$$



Cuerpo libre: nodo B. Como en este nodo actúan más de tres fuerzas, se determinan las dos fuerzas desconocidas F_{BE} y F_{BF} resolviendo las ecuaciones de equilibrio $\sum F_x = 0$ y $\sum F_y = 0$. De manera arbitraria se supone que algunas fuerzas le se sumadas al nodo y las otras restando. Si es por los elementos están en tensión. El valor positivo obtenido para F_{BE} indica que la suposición hecha fue correcta, por tanto el elemento BC está en tensión. El valor negativo de F_{BF} indica que la suposición hecha fue incorrecta, por tanto el elemento BE está en compresión.

$$\sum F_x = 0 \quad 1000 - 2000 + F_{BF} = 0 \quad F_{BF} = 1000 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0 \quad F_{BE} - 1000 - \frac{3}{5}(2000) - \frac{4}{5}(1000) = 0 \quad F_{BE} = 3000 \text{ N}$$



Cuerpo libre: nodo E. Se supone que la fuerza desconocida F_{EC} actúa hacia fuera del nodo. Si se suman las componentes x, se escribe

$$\sum F_x = 0 \quad F_{EC} + 3000 + \frac{3}{5}(3000) = 0 \quad F_{EC} = -3000 \text{ N}$$

Al sumar las componentes y se obtiene una comprobación de los cálculos realizados

$$\sum F_y = 1000 - \frac{4}{5}(3000) = 1000 - 2400 = -1400 \text{ N}$$



Cuerpo libre: nodo C. Con los valores de F_{CB} y F_{CD} calculados previamente se puede determinar las reacciones en el apoyo de este nodo. Como dichas reacciones ya se determinaron a partir del problema anterior, se omiten los cálculos. Los valores de las reacciones y las fuerzas que actúan sobre el nodo (fuerzas en los elementos y reacciones) y comprobar que éste se encuentra en equilibrio

$$\sum F_x = 3000 + \frac{3}{5}(3000) = 3000 + 1800 = 4800 \text{ N}$$

Problemas

5.1 a 5.8 Utilice el método de los nodos para determinar la fuerza en cada elemento y si el elemento está en tensión o en compresión.

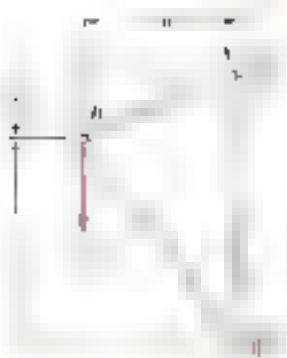


Figura P6.1



Figura P6.2



Figura P6.3

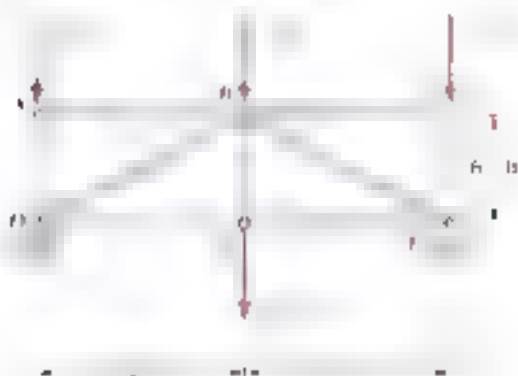


Figura P6.4



Figura P6.5

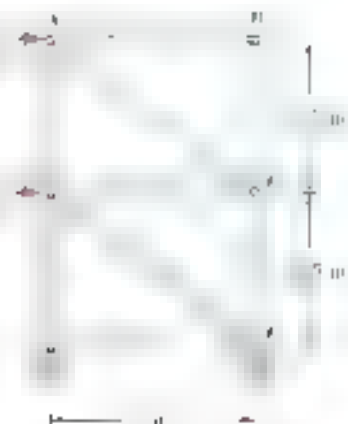


Figura P6.6

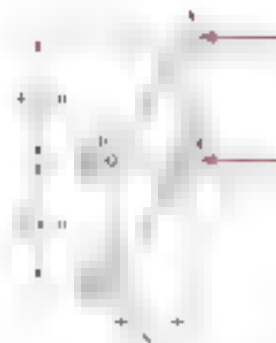


Figura P6.7

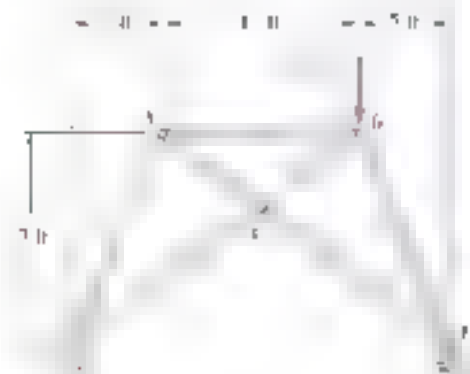


Figura P6.8

6.9 Determine la fuerza en cada elemento de la armadura P6.9 para techo que se muestra en la figura. Establezca si los elementos están en tensión o en compresión.



Figura P6.9

6.10 Determine la fuerza en cada elemento de la armadura para ventilador de techo que se muestra en la figura. Establezca si los elementos están en tensión o en compresión.

6.11 Determine la fuerza en cada elemento de la armadura Howe para techo que se muestra en la figura. Establezca si los elementos están en tensión o en compresión.



Figura P6.11

6.12 Determine la fuerza en cada elemento de la armadura Camber para techo que se muestra en la figura. Establezca si los elementos están en tensión o en compresión.

6.13 Determine la fuerza en cada elemento de la armadura que se muestra en la figura.



Figura P6.13

6.14 Determine la fuerza en cada elemento de la armadura para techo que se muestra en la figura. Establezca si los elementos están en tensión o en compresión.



Figura P6.10



Figura P6.12



Figura P6.14

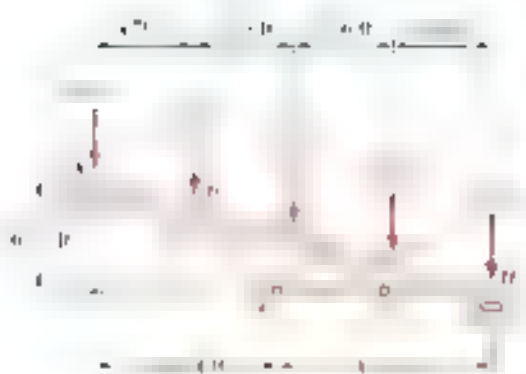


Figura P6.17 y P6.18



Figura P6.19 y P6.20

6.5. Dada una armadura de tejado para tejado que se muestra en la figura, determine la fuerza en el elemento DE y en cada uno de los elementos localizados a la derecha de DE . Además, establezca si los elementos están en tensión o en compresión.

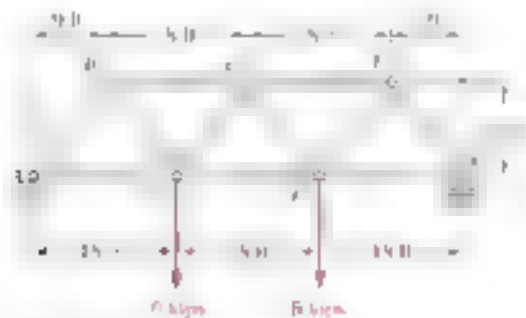


Figura P6.15

6.16. Resuelva el problema 6.15 y ahora suponga que se eliminan las cargas aplicadas en F .

6.17. En la armadura Howe invertida para tejado que se muestra en la figura, determine la fuerza en el elemento DE y en cada uno de los elementos localizados a la derecha de DE . Además, establezca si los elementos están en tensión o en compresión.

6.18. En la armadura Howe invertida para tejado que se muestra en la figura, determine la fuerza en el elemento DE y en cada uno de los elementos localizados a la derecha del elemento DE . Además, establezca si los elementos están en tensión o en compresión.

6.19. En la armadura de tejado para tejado que se muestra en la figura, determine la fuerza en el elemento FG y en cada uno de los elementos localizados a la derecha del elemento FG . Además, establezca si los elementos están en tensión o en compresión.

6.20. En la armadura de tejado para tejado que se muestra en la figura, determine la fuerza en el elemento FG y en cada uno de los elementos localizados a la derecha de FG . Además, establezca si los elementos están en tensión o en compresión.

6.21. En la armadura para tejado de estudio que se muestra en la figura, determine la fuerza en el elemento FG y en cada uno de los elementos localizados a la derecha de FG . Además, establezca si los elementos están en tensión o en compresión.



Figura P6.21 y P6.22

6.22. En la armadura para tejado de estudio que se muestra en la figura, determine la fuerza en el elemento FG y en cada uno de los elementos localizados a la derecha de FG . Además, establezca si los elementos están en tensión o en compresión.

6.23 En la armadura mostrada para recibir que se muestra en la figura, determine la fuerza en cada uno de los elementos que conectan los nodos del 4 al 7. A la vez, indique si los elementos están en tracción o en compresión.

6.24 La porción de la armadura mostrada representa la parte superior de una estructura de concreto reforzado. Se le aplica una carga vertical $P = 100$ kN, como se ilustra. Determine la fuerza en cada uno de los elementos. Las alfileres poseen un área de 300 mm^2 . Además, establezca si los elementos están en tensión o en compresión.

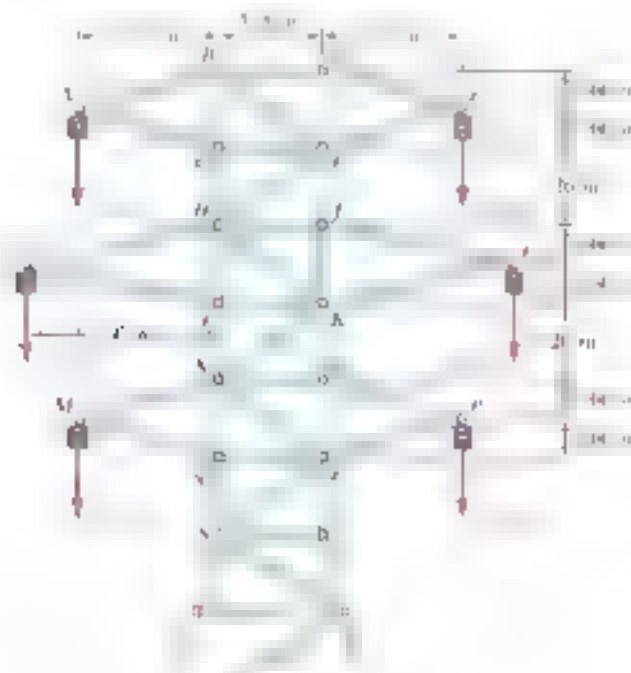


Figure PB.24

6.25 Para la torre y las cargas del problema 6.24, ahora se sabe que $P_A = P_B = 13 \text{ kN}$ y $P_C = P_D = 10 \text{ kN}$. a) Dibuje el diagrama de fuerzas H_f y en cada uno de los elementos localícelos entre H_f y N . Además, establezca si los elementos están en tensión o en compresión.

6.28 Retorne al problema 6.24, y ahora suponga que los cables que cuelgan del lado derecho de la torre se cierran al suelo.

E 27 Determine la fuerza en cada elemento de la armadura que se muestra en la figura. Establezca si los elementos están en tensión o en compresión.



Figure P6.27

8-28 Determine la fuerza en cada elemento de la estructura que se muestran en la figura. Establezca si los elementos están en tensión o en compresión.



Figure P6.28



Figura P6.31

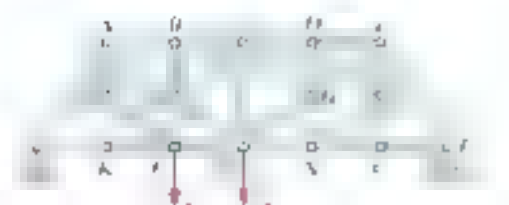


Figura P6.32

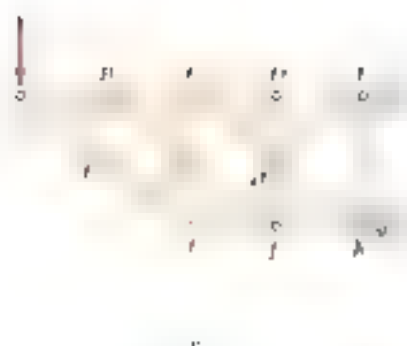


Figura P6.33



6.29 Determine si las armaduras de los problemas 6.31 a 6.33a son armaduras simples.

6.30 Determine si las armaduras de los problemas 6.31b), 6.32a) y 6.33b) son armaduras simples.

6.31 Para las cargas dadas, determine los elementos de fuerza como en cada una de las dos armaduras que se muestran en la figura.

6.32 Para las cargas dadas, determine los elementos de fuerza como en cada una de las dos armaduras que se muestran en la figura.

6.33 Para las cargas dadas, determine los elementos de fuerza como en cada una de las dos armaduras que se muestran en la figura.

6.34 Determine si las armaduras de los problemas 6.31 a 6.33a son armaduras simples.

***6.35** La armadura que se muestra en la figura consta de seis elementos y se sostiene mediante una rótula en B , un eslabón corto en C y dos eslabones cortos en D . Determine la fuerza en cada uno de los elementos para $P = 0$ y $Q = 1.200 \text{ N}$.



Figura P6.35

***6.36** La armadura que se muestra en la figura consta de seis elementos y se sostiene mediante una rótula en B , un eslabón corto en C y dos eslabones cortos en D . Determine la fuerza en cada uno de los elementos para $P = (-2.184 \text{ N})\mathbf{j}$ y $Q = 0$.

***6.37** La armadura que se muestra en la figura consta de seis elementos y se sostiene mediante una rótula en B , un eslabón corto en C y dos eslabones cortos en D . Determine la fuerza en cada uno de los elementos para $P = 0$ y $Q = (2.984 \text{ N})\mathbf{j}$.

***6.38** La armadura que se muestra en la figura consta de seis elementos y se sostiene mediante una rótula en B , un eslabón corto en C y dos eslabones cortos en D . Determine la fuerza en cada uno de los elementos para $P = 0$ y $Q = (2.984 \text{ N})\mathbf{j}$.

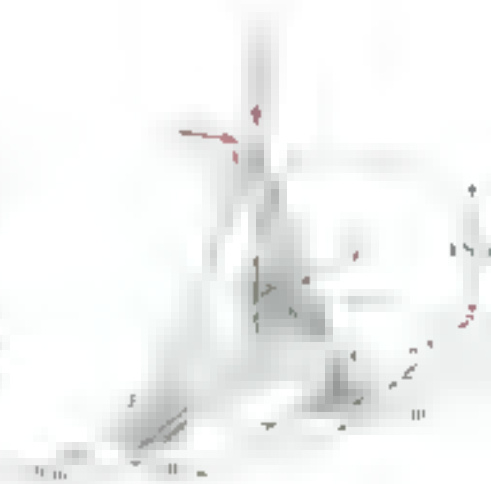


Figura P6.36 y P6.37



Figura P6.38

***6.39** La armadura que se muestra en la figura consta de nueve elementos y se sostiene mediante una rótula en B , un eslabón corto en C y dos eslabones cortos en D . Verifique que es una armadura simple que está completamente restringida y que las reacciones en sus apoyos son estáticamente determinables. Determine la fuerza en cada uno de los elementos para $P = (-1.200 \text{ N})\mathbf{j}$ y $Q = 0$.



Figura P6.39

***6.40** Retorne el problema 6.39 para $P = 0$ y $Q = (2.984 \text{ N})\mathbf{j}$.

El hecho de que el cuerpo rígido ABC está en equilibrio se puede expresar en tres ecuaciones, las cuales pueden resolverse para encontrar tres fuerzas desconocidas. Si sólo se desea determinar la fuerza F_{BD} , sólo se necesita escribir una ecuación, siempre y cuando dicha ecuación no contenga a las otras incógnitas. Por tanto, la ecuación $\sum M_A = 0$ proporciona el valor de F_{BD} en la fuerza F_{BD} (figura 6.16b). Un signo positivo en el resultado indicará que la suposición original de tensión para el miembro BD es correcta y que el elemento BD está en tensión; un signo negativo indicará que la suposición original fue incorrecta y que BD está en compresión.

Por otra parte, si sólo se desea encontrar la fuerza F_{AC} , se debe escribir una ecuación que incluya sólo a F_{AC} y a F_{BD} , es decir, caso 1. La ecuación apropiada es $\sum M_B = 0$. Un signo positivo para la ecuación F_{AC} indicará que la suposición de tensión es correcta; una ecuación negativa indica que el elemento está en tensión y un signo negativo indica que la suposición fue incorrecta, esto es, que el elemento está en compresión.

Si sólo se desea encontrar la fuerza F_{AB} , la ecuación apropiada es $\sum F_y = 0$. De nuevo, a partir del signo del resultado se determina si el elemento está en tensión o en compresión.

Cuando se determina únicamente la fuerza de un solo elemento, no se tiene que escribir una forma independiente de encontrar las demás fuerzas. Sin embargo, al determinar el tamaño de las fuerzas desconocidas que actúan sobre el cuerpo, se puede verificar si las ecuaciones se satisfacen a satisfacción alguna. Por ejemplo, si F_{AB} , F_{BD} y F_{AC} se determinan de la manera señalada en los párrafos anteriores, las ecuaciones pueden comprobarse verificando que $\sum F_x = 0$.

6.8. ARMADURAS FORMADAS POR VARIAS ARMADURAS SIMPLES

Considere las armaduras simples ABC y DEF . Si estas armaduras están conectadas por tres barras BF , BE y CE como se muestra en la figura 6.17a, entonces formarán en conjunto una armadura rígida $ABDEF$. Las armaduras ABC y DEF también se pueden considerar como una sola estructura rígida formada por los nodos B y D , como si el nodo B y el nodo D fueran los nodos C y E sobre la estructura CE (figura 6.17b). La armadura que se obtiene de ABC y DEF se muestra en la figura 6.17c. Se debe señalar que las armaduras de la figura 6.17a y b no son armaduras simples, como se muestra y muestra a partir de la figura 6.17a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z, aa, ab, ac, ad, ae, af, ag, ah, ai, aj, ak, al, am, an, ao, ap, aq, ar, as, at, au, av, aw, ax, ay, az, ba, bb, bc, bd, be, bf, bg, bh, bi, bj, bk, bl, bm, bn, bo, bp, bq, br, bs, bt, bu, bv, bw, bx, by, bz, ca, cb, cc, cd, ce, cf, cg, ch, ci, cj, ck, cl, cm, cn, co, cp, cq, cr, cs, ct, cu, cv, cw, cx, cy, cz, da, db, dc, dd, de, df, dg, dh, di, dj, dk, dl, dm, dn, do, dp, dq, dr, ds, dt, du, dv, dw, dx, dy, dz, ea, eb, ec, ed, ee, ef, eg, eh, ei, ej, ek, el, em, en, eo, ep, eq, er, es, et, eu, ev, ew, ex, ey, ez, fa, fb, fc, fd, fe, ff, fg, fh, fi, fj, fk, fl, fm, fn, fo, fp, fq, fr, fs, ft, fu, fv, fw, fx, fy, fz, ga, gb, gc, gd, ge, gf, gh, gi, gj, gk, gl, gm, gn, go, gp, gq, gr, gs, gt, gu, gv, gw, gx, gy, gz, ha, hb, hc, hd, he, hf, hg, hh, hi, hj, hk, hl, hm, hn, ho, hp, hq, hr, hs, ht, hu, hv, hw, hx, hy, hz, ia, ib, ic, id, ie, if, ig, ih, ii, ij, ik, il, im, in, io, ip, iq, ir, is, it, iu, iv, iw, ix, iy, iz, ja, jb, jc, jd, je, jf, jg, jh, ji, jj, jk, jl, jm, jn, jo, jp, jq, jr, js, jt, ju, jv, jw, jx, jy, jz, ka, kb, kc, kd, ke, kf, kg, kh, ki, kj, kk, kl, km, kn, ko, kp, kq, kr, ks, kt, ku, kv, kw, kx, ky, kz, la, lb, lc, ld, le, lf, lg, lh, li, lj, lk, ll, lm, ln, lo, lp, lq, lr, ls, lt, lu, lv, lw, lx, ly, lz, ma, mb, mc, md, me, mf, mg, mh, mi, mj, mk, ml, mm, mn, mo, mp, mq, mr, ms, mt, mu, mv, mw, mx, my, mz, na, nb, nc, nd, ne, nf, ng, nh, ni, nj, nk, nl, nm, nn, no, np, nq, nr, ns, nt, nu, nv, nw, nx, ny, nz, oa, ob, oc, od, oe, of, og, oh, oi, oj, ok, ol, om, on, oo, op, oq, or, os, ot, ou, ov, ow, ox, oy, oz, pa, pb, pc, pd, pe, pf, pg, ph, pi, pj, pk, pl, pm, pn, po, pp, pq, pr, ps, pt, pu, pv, pw, px, py, pz, qa, qb, qc, qd, qe, qf, qg, qh, qi, qj, qk, ql, qm, qn, qo, qp, qq, qr, qs, qt, qu, qv, qw, qx, qy, qz, ra, rb, rc, rd, re, rf, rg, rh, ri, rj, rk, rl, rm, rn, ro, rp, rq, rr, rs, rt, ru, rv, rw, rx, ry, rz, sa, sb, sc, sd, se, sf, sg, sh, si, sj, sk, sl, sm, sn, so, sp, sq, sr, ss, st, su, sv, sw, sx, sy, sz, ta, tb, tc, td, te, tf, tg, th, ti, tj, tk, tl, tm, tn, to, tp, tq, tr, ts, tt, tu, tv, tw, tx, ty, tz, ua, ub, uc, ud, ue, uf, ug, uh, ui, uj, uk, ul, um, un, uo, up, uq, ur, us, ut, uu, uv, uw, ux, uy, uz, va, vb, vc, vd, ve, vf, vg, vh, vi, vj, vk, vl, vm, vn, vo, vp, vq, vr, vs, vt, vu, vv, vw, vx, vy, vz, wa, wb, wc, wd, we, wf, wg, wh, wi, wj, wk, wl, wm, wn, wo, wp, wq, wr, ws, wt, wu, wv, ww, wx, wy, wz, xa, xb, xc, xd, xe, xf, xg, xh, xi, xj, xk, xl, xm, xn, xo, xp, xq, xr, xs, xt, xu, xv, xw, xx, xy, xz, ya, yb, yc, yd, ye, yf, yg, yh, yi, yj, yk, yl, ym, yn, yo, yp, yq, yr, ys, yt, yu, yv, yw, yx, yy, yz, za, zb, zc, zd, ze, zf, zg, zh, zi, zj, zk, zl, zm, zn, zo, zp, zq, zr, zs, zt, zu, zv, zw, zx, zy, zz.



Figura 6.17



Figura 6.17 (repetido)



Figura 6.18

estas armaduras de barras articuladas simples y unidas únicamente en sus extremos como armaduras compuestas.

En una armadura compuesta, el número de elementos m y el número de nodos n están relacionados por la fórmula $m = 2n - 3$. Esto puede corroborarse observando que, si una armadura con pinos está apoyada por un pino y dos rodillos, o por un rodillo y dos pinos, o por tres rodillos descorrelados, el número total de incógnitas es $m + 3$ y el número de ecuaciones de equilibrio es $2n$. Las ecuaciones de equilibrio tienen al expresar que los pinos están en equilibrio; por tanto, $m + 3 = 2n$ y $m = 2n - 3$. Las armaduras de barras articuladas simples por un pino y un rodillo, o por un sistema equivalente de apoyo, son estructuralmente determinadas y se comportan como una rigidez. Esto se puede ver que todas las reacciones de sostenimiento y las fuerzas en las barras de miembros que de hecho no se producen en los miembros de la estructura que la armadura no se comporta como una rigidez. Sin embargo, si se aplican las fuerzas a las barras de la estructura, el número de reacciones de los nodos n es $m + 3$ y el número de ecuaciones de equilibrio es $2n$. Como $m + 3 > 2n$, el número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones de equilibrio, por lo tanto, la armadura es estructuralmente indeterminada.

Por último, supóngase que las dos armaduras simples ABC y DEF están apoyadas por un pino y dos rodillos, o por un rodillo y dos pinos. El número de elementos m es $m = 2n - 3$. Si la armadura está apoyada por un pino y dos rodillos, o por un rodillo y dos pinos, el número de incógnitas es $m + 3$ y el número de ecuaciones de equilibrio es $2n$. Como $m + 3 > 2n$, el número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones de equilibrio, por lo tanto, la armadura es estructuralmente indeterminada.

Por último, supóngase que las dos armaduras simples ABC y DEF están apoyadas por un pino y dos rodillos, o por un rodillo y dos pinos. El número de elementos m es $m = 2n - 3$. Si la armadura está apoyada por un pino y dos rodillos, o por un rodillo y dos pinos, el número de incógnitas es $m + 3$ y el número de ecuaciones de equilibrio es $2n$. Como $m + 3 > 2n$, el número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones de equilibrio, por lo tanto, la armadura es estructuralmente indeterminada.



Figura 6.19



PROBLEMA RESUELTO 6.2

Determine la fuerza en los elementos EF y CD de la armadura mostrada en la figura.



SOLUCIÓN

Como se trata de un problema de estructura rígida, se descomponen las fuerzas en las uniones de la estructura en sus componentes horizontales y verticales. Las fuerzas externas producidos sobre la estructura libre consisten en las cargas aplicadas y las reacciones en B y F. Se escriben las ecuaciones de equilibrio y se resuelve.

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0:$$

$$-(25 \text{ kips})(10 \text{ ft}) - (25 \text{ kips})(20 \text{ ft}) - (16 \text{ kips})(10 \text{ ft}) + F(20 \text{ ft}) = 0$$

$$F = +23 \text{ kips} \quad \text{F} = 23 \text{ kips}$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0: \quad B_x + 16 \text{ kips} = 0$$

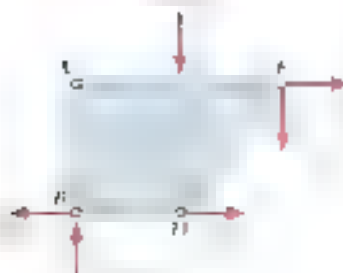
$$B_x = -16 \text{ kips} \quad B_x = 16 \text{ kips}$$



$$+\circlearrowleft \sum M_F = 0:$$

$$25 \text{ kips}(20 \text{ ft}) + (25 \text{ kips})(10 \text{ ft}) - (16 \text{ kips})(10 \text{ ft}) - B_y(20 \text{ ft}) = 0$$

$$B_y = +23 \text{ kips} \quad B_y = 23 \text{ kips}$$



Fuerza en el elemento EF. Se pasa la sección una a través de la armadura de manera que sólo intersecte al elemento EF y a otros dos elementos adyacentes. Después de que se han removido los elementos intersectados, la porción del lado izquierdo de la armadura se selecciona como el cuerpo libre. Se muestra a qué cargas y fuerzas reaccionantes se someten las fuerzas horizontales y verticales.

$$+\rightarrow \sum F_x = 0: \quad -16 \text{ kips} + 25 \text{ kips} - F_{EF} = 0$$

$$F_{EF} = +9 \text{ kips}$$

El sentido de F_{EF} se seleccionó suponiendo que el elemento EF está en tensión; el signo negativo obtenido indica que en realidad el elemento está en compresión.

$$F_{EF} = 9 \text{ kips C}$$



Fuerza en el elemento CD. Se pasa la sección una a través de la armadura de manera que sólo intersecte al elemento CD y a otros dos elementos adyacentes. Después de que se han removido los elementos intersectados, la porción del lado derecho de la armadura se selecciona como el cuerpo libre. Se muestra a qué cargas y fuerzas reaccionantes se someten las fuerzas horizontales y verticales.

$$+\circlearrowleft \sum M_F = 0: \quad (9 \text{ kips})(10 \text{ ft}) - (16 \text{ kips})(10 \text{ ft}) + F_{CD}(10 \text{ ft}) = 0$$

$$F_{CD} = -7 \text{ kips}$$



PROBLEMA RESUELTO 6.3

Determinar la fuerza en los elementos $II-I$, $III-II$ y $III-IV$ de la armadura para el arco mostrada en la figura.

SOLUCION

Cuerpo libre: armadura completa. A partir del diagrama de cuerpo libre de la armadura se obtienen las reacciones en A y D .

$$A = 12.50 \text{ kN} \quad D = 7.50 \text{ kN}$$

Se observa que

$$\frac{EF}{CF} = \frac{8 \text{ m}}{15 \text{ m}} = 0.533 \quad \alpha = 33.69^\circ$$



Fuerza en el elemento $III-II$. Se pasa la sección por el arco de la armadura, como se muestra en la figura. Con el uso de la porción $III-II$ de la armadura como el cuerpo libre, se obtiene el valor de F_{II-III} al escribir

$$+\sum M_H = 0 \quad (7.50 \text{ kN})(10 \text{ m}) - (1 \text{ kN})(5 \text{ m}) - F_{II-III}(5.33 \text{ m}) = 0$$

$$F_{II-III} = +1.11 \text{ kN}$$



Fuerza en el elemento $I-II$. El valor de F_{I-II} se obtiene a partir de la ecuación $\sum M_C = 0$ de la porción $I-II$ de la armadura, como se muestra en la figura. Se observa que el momento de F_{I-II} con respecto al punto C es igual a $F_{I-II} \cos \alpha (5 \text{ m})$.

$$+\sum M_C = 0$$

$$(7.50 \text{ kN})(15 \text{ m}) - (1 \text{ kN})(10 \text{ m}) - (1 \text{ kN})(5 \text{ m}) + F_{I-II} \cos \alpha (5 \text{ m}) = 0$$

$$F_{I-II} = 1.11 \text{ kN}$$



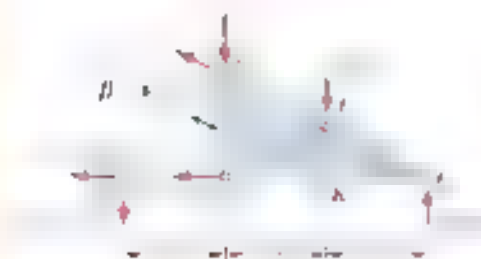
Fuerza en el elemento $I-III$. Primero se observa que

$$\tan \beta = \frac{CF}{HI} = \frac{5 \text{ m}}{\frac{8}{3} (8 \text{ m})} = 0.9375 \quad \beta = 43.15^\circ$$

Entonces, el valor de F_{I-III} se determina descomponiendo la fuerza F_{I-II} en sus componentes x y y en el punto C y al resolver la ecuación $\sum M_A = 0$.

$$+\sum M_A = 0 \quad (1 \text{ kN})(10 \text{ m}) + (1 \text{ kN})(5 \text{ m}) + F_{I-III} \cos \beta (15 \text{ m}) = 0$$

$$F_{I-III} = -1.11 \text{ kN}$$



E En relación con los armadores que están determinando

It is not clear whether the authors' definition of "highly" is based on a comparison with the mean or with the median. The authors also do not mention the number of subjects who were excluded from the analysis because of missing data.

El sistema de ecuaciones (1) puede escribirse en forma matricial como

$$A_1 \dot{x} + A_2 x = b_1 u + b_2 v \quad (2)$$

donde $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$.

Los vectores u y v representan las acciones de los controladores de trayectoria en sus ejes x_1 y x_2 respectivamente. Los vectores x_1 y x_2 representan la posición de las gotitas con respecto al punto de equilibrio independiente de las acciones de control.

Las ecuaciones (5) y (6) se rescriben a solo una *función* restringida

den drei ersten Aussagen ist das negierte Aussage 4. falsch, wenn alle Aussagen wahr sind.

Se sabe que hay lindes constituidos como se describen. Se alega que no sabemos quiénes son los que los hacen y los que los hacen, y se afirma que es un hecho. La evidencia se encuentra en el texto. *My opinion is that the* se debe tratar de determinar las relaciones entre las cosas y las cosas en sus relaciones. Se debe se un hecho a la evidencia *empíricamente construida y de la* *Exposición*.

Problemas

6.43 Una armadura Warren para puentes se carga en la forma que muestra la figura. Determine la fuerza en los elementos CE , DE y DF .

6.44 Una armadura Warren para puentes se carga en la forma que muestra la figura. Determine la fuerza en los elementos CE , DE y DF .

6.45 Determine la fuerza en los elementos BD y DE en la armadura que se muestra en la figura.



Figura P6.43 y P6.44

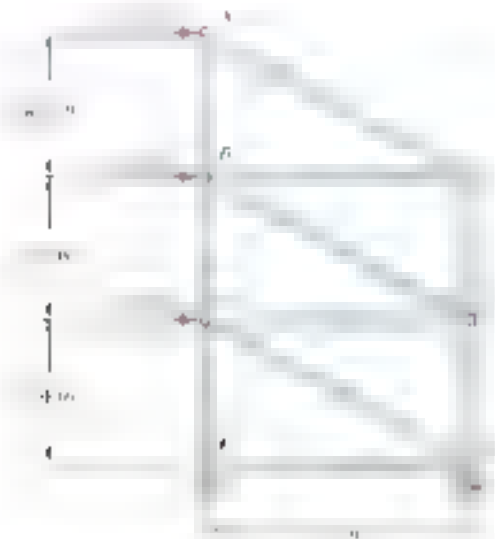


Figura P6.45 y P6.46

6.46 Determine la fuerza en los elementos DC y EG de la armadura que se muestra en la figura.

6.47 Una armadura para piso se carga en la forma que muestra la figura. Determine la fuerza en los elementos CE , DE y DF .



Figura P6.47 y P6.48

6.48 Una armadura para piso se carga en la forma que muestra la figura. Determine la fuerza en los elementos CE , DE y DF .

6.49 Una armadura de tan plano para techo se carga en la forma que muestra la figura. Determine la fuerza en los elementos CE , DE y DF .

6.50 Una armadura de tan plano para techo se carga en la forma que muestra la figura. Determine la fuerza en los elementos CE , DE y DF .



Figura P6.49 y P6.50

6.51 Una armadura (ver tipo Igua para techo) se carga en la forma que muestra la figura. Determine la fuerza en los elementos DE , EF y FG .



Figura P6.51 y P6.52

6.52 Una armadura (ver tipo Igua para techo) se carga en la forma que muestra la figura. Determine la fuerza en los elementos DE y EF .

6.53 Una armadura Pratt para techo se carga en la forma que muestra la figura. Determine la fuerza en los elementos CD , DE y DF .



Figura P6.53 y P6.54

6.54 Una armadura Pratt para techo se carga en la forma que muestra la figura. Determine la fuerza en los elementos EF , FI y GI .

6.55 Determine la fuerza en los elementos AD , CD y CE de la armadura que se muestra en la figura.

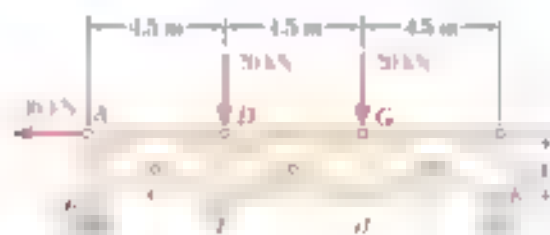


Figura P6.55 y P6.56

6.56 Determine la fuerza en los elementos DC , FG y FI de la armadura que se muestra en la figura.

6.57 Una armadura para techo de estadio se carga en la forma que muestra la figura. Determine la fuerza en los elementos AB , BC y FG .

6.58 Una armadura para techo de estadio se carga en la forma que muestra la figura. Determine la fuerza en los elementos AF , FI y FG .

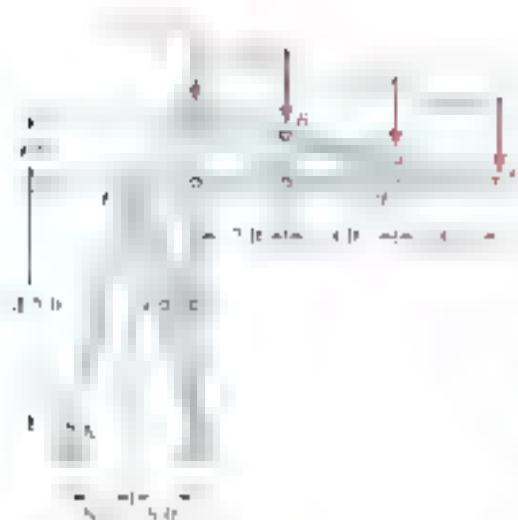


Figura P6.57 y P6.58

6.59 Una armadura plana está sujeta a la carga mostrada. Determine la fuerza en los elementos GH y HI cuando $P = 2$ kN y $Q = 1$ kN.

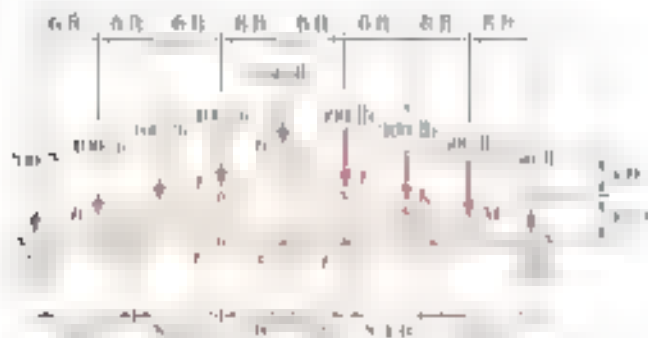


Figura P6.59 y P6.60

6.60 Una armadura poligonal, o de dos tipos, para techo se carga en la forma que muestra la figura. Determine la fuerza en los elementos HI , GI y IJ .

6.61 Determine la fuerza en los elementos AF y EJ de la armadura que se muestra en la figura, cuando $P = Q = 1.2$ kN. (Sugerencia: Use la sección aa)

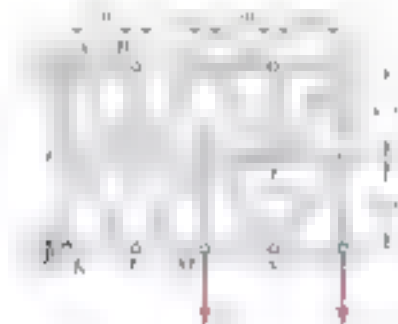


Figura P6.61 y P6.62

6.62 Determine la fuerza en los elementos AF y EJ de la armadura que se muestra en la figura, cuando $P = 1.2$ kN y $Q = 0$. (Sugerencia: Use la sección aa)

6.63 Determine la fuerza en los elementos EH y GI de la armadura que se muestra en la figura. (Sugerencia: Use la sección aa)



Figura P6.63 y P6.64

6.64 Determine la fuerza en los elementos HJ y IL de la armadura que se muestra en la figura. (Sugerencia: Use la sección bb)

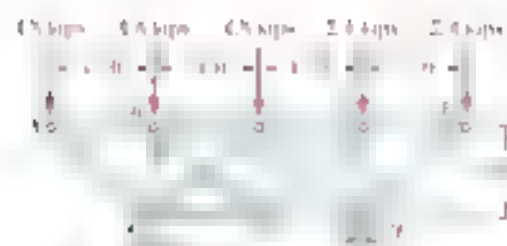


Figura P6.57

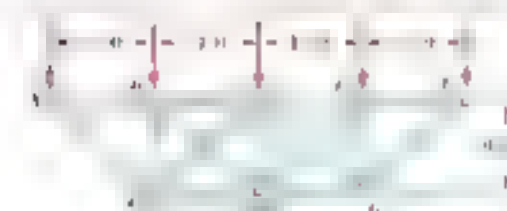


Figura P6.58



Figura P6.59

6.65 y 6.66 Los elementos diagonales en los puentes centrales de la torre de transmisión que se muestran en la figura son muy delgados y sólo pueden actuar en tensión; a tales elementos se les conoce como *contravientos*. Para las cargas dadas, determine *a*) cuál de los dos contravientos actuados actúa, *b*) la fuerza en ese contraviento.

6.65 Contravientos *CE* y *DE*.

6.66 Contravientos *JO* y *KA*.

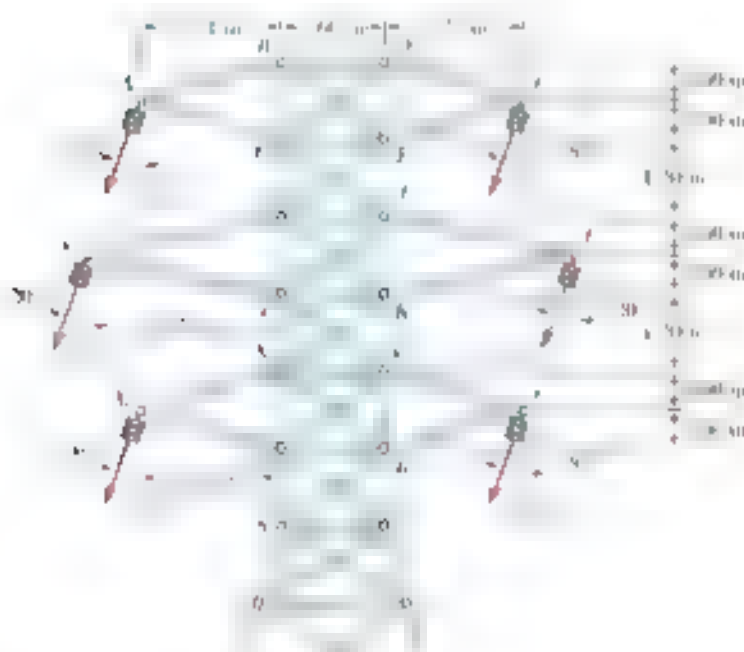


Figura P6.65 y P6.66

6.67 y 6.68 Los elementos diagonales en los puentes centrales de las armaduras que se muestran en las figuras son muy delgados y sólo pueden actuar en tensión; a tales elementos se les conoce como *contravientos*. Determine las fuerzas en los contravientos que actúan bajo las cargas dadas.

6.69 ¿Qué tipo de apoyo de la estructura se muestra en la figura? ¿es completa, parcial o inequívocamente restringida; si la estructura está completa o parcialmente restringida, ¿qué tipo de apoyo puede ser? ¿es un apoyo fijo, un apoyo móvil o un apoyo de rodadura? ¿qué tipo de reacción actúa sobre el apoyo? ¿es una fuerza o una presión?



6.70 a 6.74 Clasifique cada una de las estructuras mostradas en las figuras como a) plegamiento por compresión, b) plegamiento por extensión, c) plegamiento por torsión, d) plegamiento por flexión, e) plegamiento por compresión y extensión, f) plegamiento por compresión y torsión, g) plegamiento por compresión y flexión, h) plegamiento por extensión y flexión, i) plegamiento por extensión y torsión, j) plegamiento por extensión y compresión, k) plegamiento por extensión y flexión y compresión, como en compresión.)

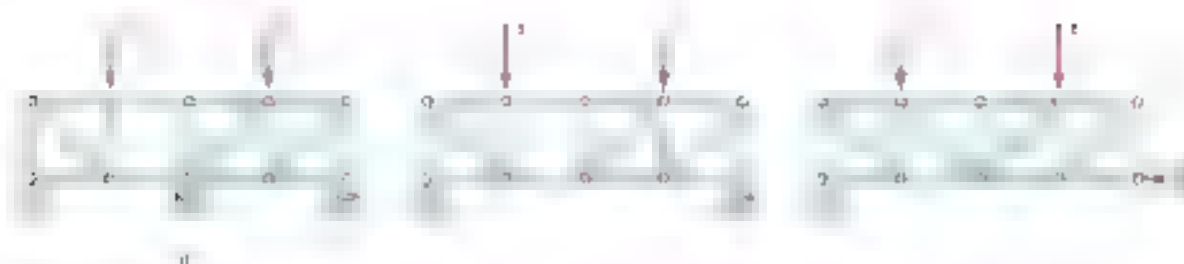


Figura P6.70



Figura P6.71

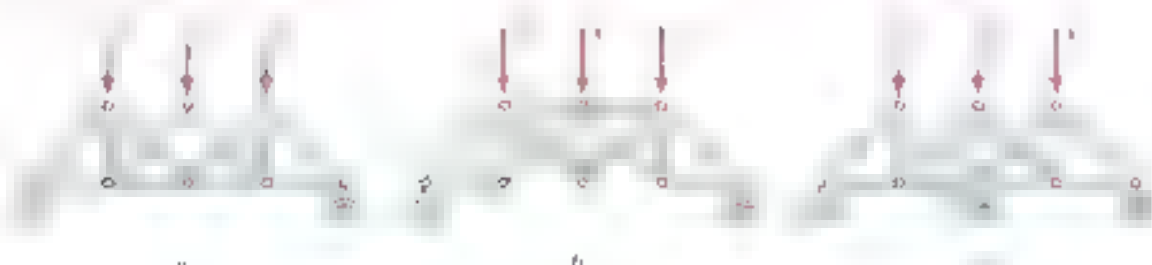


Figura P6.72

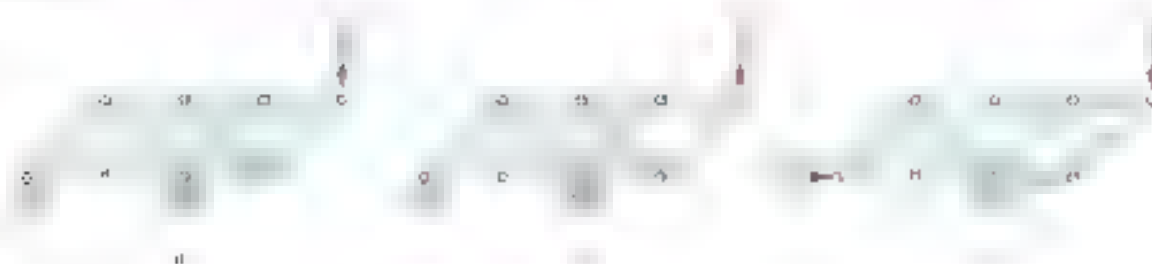


Figura P6.73



Figura P6.74

6.9. ESTRUCTURAS QUE CONTIENEN ELEMENTOS SUJETOS A FUERZAS MÚLTIPLES

El término de denominación de armazones, máquinas o maquinarias se considera estructura totalmente constituida por pernos y elementos rectos sujetos a la acción de dos fuerzas. Se afirma que las fuerzas que actúan sobre los elementos son iguales y opuestas a lo largo de los mismos. Ahora se considerará estructuras en las cuales por lo menos uno de los elementos está sometido a la acción de fuerzas múltiples. En general, las dos fuerzas no están alineadas a lo largo de los elementos sobre los cuales actúan, su dirección es desviada y, por tanto, se debe considerar por dos componentes desviadas.

Las armazones y las máquinas son estructuras que contienen elementos sometidos al acción de varias fuerzas. Las armazones están diseñadas para soportar cargas y son estructuras stationarias o fijas. Las máquinas están diseñadas para transmitir o transformar fuerzas, las puede o no ser estacionarias y pueden contener partes móviles.

6.10. ANALISIS DE UN ARMAZÓN

Como primer ejemplo de análisis de un armazón se recurrirá a la estructura que se puede ver en la figura 6.20a. La carga W que actúa sobre el punto A la seguimos la figura 6.20b. El diagrama de cuerpo libre para la estructura en esta se muestra en la figura 6.20c. Este diagrama se puede utilizar para determinar las fuerzas externas que actúan sobre la estructura. La carga W se divide en dos, respectivamente A_x y A_y , la fuerza T que se aplica a los miembros AB y AC se descompone en A_x y A_y se determinan las componentes A_x y A_y de la reacción en el perno A .

Con el fin de determinar las fuerzas internas que contienen a las diversas partes del armazón, este se le divide en secciones y se hacen diagramas de cuerpo libre de cada una de las partes que constituyen la figura 6.20a. Cuando se deben considerar los elementos sometidos a la acción de dos fuerzas, en este armazón el elemento BE es el único sobre el que actúan dos fuerzas. Las fuerzas que actúan en cada uno de los extremos de este elemento de pernos B y E se representan como F_{BE} y F_{EB} que son sentidos opuestos. Sección CD . En tanto de cada fuerza F_{CD} y F_{DC} a lo largo de CD y se representan respectivamente por F_{CD} y F_{DC} . De modo arbitrario se supone que F_{CD} se aplica sobre C y F_{DC} sobre D a lo largo de CD . Después el siguiente elemento que se agota es el elemento DE las fuerzas F_{DE} y F_{ED} que se aplican a lo largo de DE se representan.

En seguida se consideren los elementos sometidos a la acción de varias fuerzas los elementos sobre los que actúan tres o más fuerzas. De momento en adelante se le N y W a la fuerza que actúa en el elemento BE sobre el elemento AD de la misma manera que la fuerza F_{BE} que actúa AD sobre BE . En forma similar a lo que se hizo con el elemento DE sobre el elemento E debe ser igual a lo que se hizo a la fuerza F_{DE} que actúa sobre E sobre BE . Por tanto las fuerzas en el elemento BE sometido a la acción de dos fuerzas BE que se llama AD y CF son iguales, respectivamente, $N = F_{BE}$ y $W = F_{DE}$, estas fuer-



Figura 6.20

zas $H_x = 0$ a $H_n = 0$ ag H_n y sentidos opuestos a H deben estar dirigidas como se muestran en la figura 6.20c.

Dos elementos sometidos a la acción de varias fuerzas están representados en la figura 6.21a. En el elemento AB se aplican las fuerzas que actúan en C . Dichas fuerzas se representarán por sus componentes x y y . Las componentes C_x y C_y de la fuerza que actúa sobre el elemento AD serán dirigidas de acuerdo a la misma forma que en el elemento AB . De igual modo que la fuerza H en B , las fuerzas ejercidas por el elemento CE sobre AD y las fuerzas ejercidas por el elemento AD sobre CE serán iguales y opuestas. Las componentes de la fuerza que actúa sobre el elemento CE deben estar dirigidas hacia la izquierda y hacia abajo; dichas componentes se representarán respectivamente por C_x y C_y . Si la fuerza C_x en realidad está dirigida hacia la derecha y la fuerza C_y hacia la izquierda se determinará después a partir de la ecuación de equilibrio $\sum F_x = 0$ según sea necesario. La suposición hecha de la fuerza H no afecta a la suposición de la dirección de la fuerza C . Las ecuaciones de equilibrio de los elementos sujetos a la acción de fuerzas H y C son las mismas las fuerzas externas son iguales a H y C .

Ahora se puede determinar las fuerzas internas considerando el elemento BC sometido a cualquiera de los los elementos sujetos a la acción de varias fuerzas. Por ejemplo, se le sumará un desplazamiento Δ que tiene un desplazamiento al elemento CE se sumará un desplazamiento Δ $\sum M = 0$ $\sum M_x = 0$ $\sum M_y = 0$ y las fuerzas internas respectivas serán iguales a las fuerzas H_x , H_y , C_x , C_y y H y C . Estos valores se aplicarán a la ecuación de equilibrio $\sum F_x = 0$ y $\sum F_y = 0$ para el elemento AD donde se encuentra en equilibrio.

Se debe señalar que en la figura 6.20 se supuso que los miembros no están sujetos a la acción de cargas distribuidas que se modelan con las cargas puntuales P . Como se puede ver, se asumió que se trata de un cuerpo libre. Esta suposición siempre se puede utilizar para simplificar el análisis de los armazones y las vigas. Sin embargo, cuando se permite a los miembros soportar los apoyos y los apoyos de los miembros, se debe tener en cuenta la suposición de que pertenece el apoyo. (Si son elementos sujetos a la acción de fuerzas distribuidas se debe tener en cuenta la suposición de que pertenece el apoyo). Esto se ilustra en el problema resuelto 6.6.

6.11 ARMAZONES QUE DEJAN DE SER RÍGIDOS CUANDO SE SEPARAN DE SUS SOPORTES

La siguiente analiza la sección de la estructura en la que se puede mover o separar de los miembros en la parte de sus apoyos, como se

* No es necesario utilizar un signo positivo para distinguir la forma ejercida por un elemento sobre otro de la forma ejercida por el elemento de otro elemento sobre el primero. En la parte que actúan fuerzas perpendiculares a diferentes diagramas de cuerpo libre y por tanto, no pueden confundirse fácilmente. En los problemas restrictos se usa el mismo símbolo H y C para las fuerzas que se aplican a los miembros.

Se debe señalar que en la figura 6.21a se asumió que la fuerza H en B es una fuerza de fuerza hacia la izquierda directamente al sentido de la fuerza C_x y C_y en C . En la figura 6.21a se asumió que la fuerza H en B es una fuerza hacia la izquierda directamente al sentido de la fuerza C_x y C_y en C . En la figura 6.21a se asumió que la fuerza H en B es una fuerza hacia la izquierda directamente al sentido de la fuerza C_x y C_y en C . En la figura 6.21a se asumió que la fuerza H en B es una fuerza hacia la izquierda directamente al sentido de la fuerza C_x y C_y en C .

www.geocienciasvirtuales.blogspot.com.co

6.11 Armazones que dejan de ser rígidos cuando se separan de sus soportes

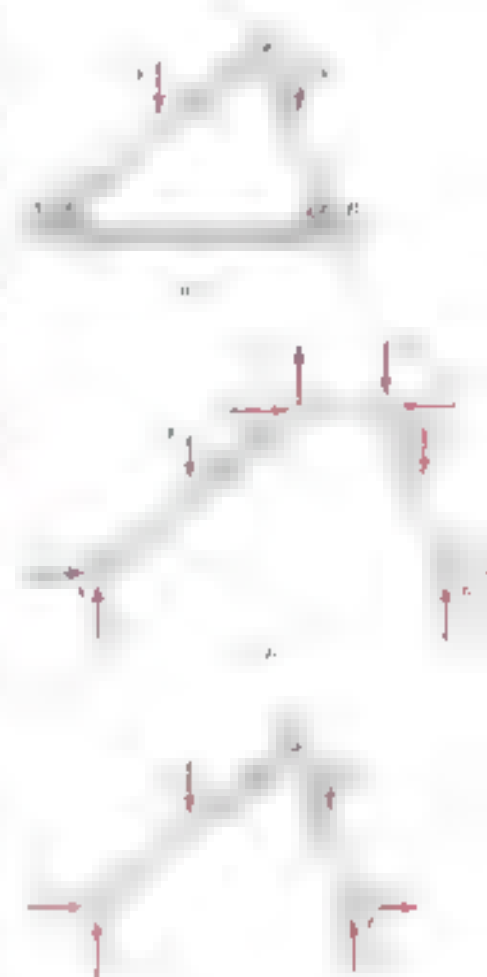


Figura 6.21

Puesto que las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre AC satisfacen las ecuaciones de equilibrio $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$ y $\sum M = 0$ (con respecto a cada punto libre y fijo), se deduce que las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre CB también pueden satisfacer las tres ecuaciones de equilibrio. También deben satisfacerse las tres ecuaciones de equilibrio para las fuerzas que actúan sobre los dos cuerpos libres. Como las fuerzas internas en C se cancelan entre sí, se concluye que las fuerzas de reacción en el diagrama de cuerpo libre para el propio armazón AB, que satisface las tres ecuaciones de equilibrio, también satisfacen las tres ecuaciones de equilibrio. Las ecuaciones se deducen para el conjunto de miembros de los empalmes y las uniones en A y B. Sin embargo, también se concluye que no pueden determinarse por completo las reacciones en los empalmes y uniones de un cuerpo libre para un armazón completo. Por tanto, si se sabe que se satisfacen las tres ecuaciones de equilibrio para el armazón completo, las partes de cuerpo libre de las partes que lo constituyen (figura 6.21b), aun cuando solo se deseen determinar las reacciones externas. Lo antes notado es que aquí las ecuaciones de equilibrio de un cuerpo libre AC dan información necesaria para las superficies para un cuerpo libre de una estructura que no es rígida.

El resultado de esta discusión es el siguiente: para la estructura mostrada en la figura 6.21a, las reacciones simultáneas A continuando se presentan las ecuaciones de equilibrio, el cual utiliza tanto el cuerpo libre ACB como a los cuerpos libres A y CB. Se escribe $\sum M_A = 0$ y $\sum M_B = 0$ para el cuerpo libre ACB se obtiene $B_y = C_y$. Escribiendo $\sum M = 0$, $\sum F_x = 0$ y $\sum F_y = 0$ para el cuerpo libre AC se obtienen, sucesivamente, $A_x = C_x$ y $C_y = 1$ unitario, al ser $\sum F_y = 0$ para ACB se obtiene $B_y = 1$ unitario.

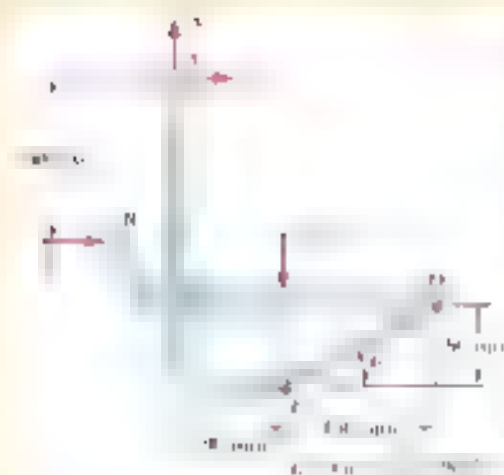
Se sabe que una estructura que no sea rígida puede ser rígida o no, como se ilustra en la figura 6.21a. Para determinar si una estructura es rígida o no, se debe considerar si la estructura es rígida o no. Las ecuaciones de equilibrio se deducen a partir de las tres ecuaciones de equilibrio para cada una de las partes de la estructura. Por tanto, no son independientes. Aunque se concluye que una estructura puede ser rígida o no, se debe considerar si la estructura es rígida o no. Por tanto, el armazón considerado es *estáticamente indeterminado y rígido*. En general, para determinar si una estructura es rígida o no, se debe considerar si la estructura es rígida o no. Se debe dibujar un diagrama de cuerpo libre para cada una de las partes de la estructura, considerando el momento y la fuerza de reacción en las partes de la estructura. También se debe determinar el número de ecuaciones de equilibrio que se debe escribir y la ecuación se puede resolver el equilibrio de la estructura a cada uno de los grupos de partes de la estructura que se han considerado. Si la estructura es rígida o no, se debe considerar si la estructura es *estáticamente indeterminada*. Si hay menos incógnitas que ecuaciones, la estructura *no es rígida*. Si hay tantas incógnitas como ecuaciones, se puede determinar si la estructura es rígida o no. Si hay más incógnitas que ecuaciones, la estructura es *estáticamente indeterminada y rígida*. Si la estructura es rígida o no, se debe considerar si la estructura es rígida o no. Si hay más incógnitas que ecuaciones, la estructura es *estáticamente indeterminada y no es rígida*.

La palabra rígida se usa para indicar que el armazón mantendrá su forma mientras que permanece unido o no unido.



PROBLEMA RESUELTO 6.4

En el armazón que se muestra en la figura, los elementos ACE y BCD están conectados por medio de un perno en C y por el estribo DE. Para la condición de carga mostrada, determine la fuerza en el estribo DE y las componentes de la fuerza ejercida por los elementos BCD en C.



SOLUCIÓN

Como se trata de un problema de estática, se debe escribir el diagrama de cuerpo libre para todo el armazón.

$$\begin{aligned}
 +\sum M_A = 0: & \quad (300 \text{ N})(300 \text{ mm}) - (400 \text{ N})(400 \text{ mm}) + F_{DE} \sin \alpha (200 \text{ mm}) = 0 \\
 +\sum F_x = 0: & \quad 300 \text{ N} - F_{DE} \cos \alpha = 0 \\
 +\sum F_y = 0: & \quad 400 \text{ N} - 400 \text{ N} + F_{DE} \sin \alpha = 0
 \end{aligned}$$

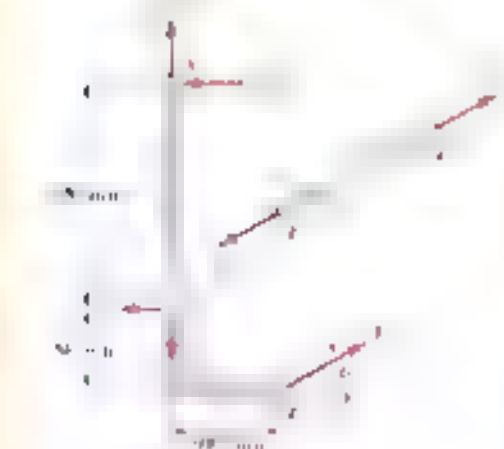
Elementos. Ahora se desensambla el armazón. Como sólo dos elementos se desconectan, en C las componentes de fuerza de desmembramiento que actúan sobre ACE y BCD son, respectivamente, iguales y opuestas y se señalan por ser dirigidas como se muestra en la figura. Se supone que el estribo DE está en tensión y ejerce fuerzas iguales y opuestas en D y E, las cuales están dirigidas como muestra la figura.



Cuerpo libre: elemento BCD. Con el cuerpo libre BCD, se escribe

$$\begin{aligned}
 +\sum M_C = 0: & \quad -(F_{DE} \sin \alpha)(250 \text{ mm}) - (300 \text{ N})(400 \text{ mm}) + (400 \text{ N})(400 \text{ mm}) = 0 \\
 & \quad F_{DE} = 581 \text{ N} \\
 +\sum F_x = 0: & \quad C_x - F_{DE} \cos \alpha + 300 \text{ N} = 0 \\
 & \quad C_x = (-581 \text{ N}) \cos 28.07^\circ + 300 \text{ N} = 0 \quad C_x = -505 \text{ N} \\
 +\sum F_y = 0: & \quad C_y - F_{DE} \sin \alpha - 400 \text{ N} = 0 \\
 & \quad C_y = (-581 \text{ N}) \sin 28.07^\circ - 400 \text{ N} = 0 \quad C_y = -735 \text{ N}
 \end{aligned}$$

A partir de los signos obtenidos para C_x y C_y se concluye que las componentes de la fuerza en C por el elemento BCD están dirigidas, respectivamente, hacia la izquierda y hacia arriba. Así se tiene



Como se trata de un problema de estática, se debe escribir el diagrama de cuerpo libre para todo el armazón. Se desconectan los miembros BCD y ACE.

$$\begin{aligned}
 +\sum M_A = 0: & \quad (F_{DE} \cos \alpha)(400 \text{ mm}) + (F_{DE} \sin \alpha)(300 \text{ mm}) - (C_x)(200 \text{ mm}) \\
 & \quad - (-505 \text{ N}) \cos 28.07^\circ + (-735 \text{ N}) \sin 28.07^\circ = 0
 \end{aligned}$$



PROBLEMA RESUELTO 6.5

Determinar las componentes de las fuerzas que actúan sobre cada elemento de la estructura que se muestra a continuación.



SOLUCIÓN

Como en el problema anterior, al tener sólo tres incógnitas, se calculan dichas reacciones considerando el diagrama de cuerpo libre para el armazón completo.

$$\begin{aligned} +\uparrow \Sigma M_B &= 0; & -(2400 \text{ N})(3.6 \text{ m}) + F(4.8 \text{ m}) &= 0 \\ F &= +1800 \text{ N} \\ +\uparrow \Sigma F_y &= 0; & -2400 \text{ N} + 1800 \text{ N} + B_y &= 0 \\ B_y &= +600 \text{ N} \\ +\Sigma F_x &= 0 \end{aligned}$$

$$F = 1800 \text{ N} \uparrow$$

Elementos. Ahora se desmenuzaba el armazón como si estuvieran en equilibrio dos elementos en cada nodo, en la figura se muestran componentes iguales y opuestas sobre cada elemento en cada nodo.

Cuerpo libre elemento BC D

$$\begin{aligned} +\uparrow \Sigma M_B &= 0; & -(2400 \text{ N})(3.6 \text{ m}) + C_y(2.4 \text{ m}) &= 0 \\ +\uparrow \Sigma M_C &= 0; & -(2400 \text{ N})(1.2 \text{ m}) + B_y(2.4 \text{ m}) &= 0 \\ -\Sigma F_x &= 0; & B_x &= C_x \end{aligned}$$

$$C_y = 3600 \text{ N}$$

$$B_y = 600 \text{ N} \uparrow$$

Se observa que ni B_x ni C_x se obtienen considerando sólo al elemento BC D. Los valores se obtienen sólo para C_x y C_y cuando se pone en equilibrio la fuerza B_x y C_y están dirigidas como se supuso.



Cuerpo libre elemento AC F

$$\begin{aligned} +\uparrow \Sigma M_A &= 0; & B_x(2.4 \text{ m}) &= 0 \\ +\Sigma F_x &= 0; & B_x &= 0 \\ +\Sigma F_y &= 0; & -A_y + B_y + 600 \text{ N} &= 0 \\ & & -A_y + 1200 \text{ N} + 600 \text{ N} &= 0 \end{aligned}$$

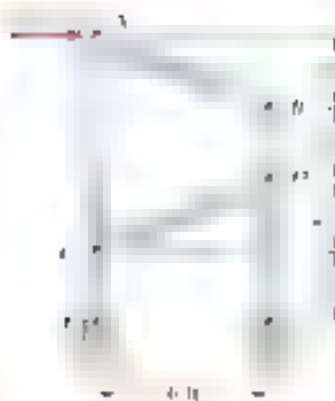
$$A_y = +1800 \text{ N}$$

Cuerpo libre elemento BC D. Ahora, considerando al elemento BC D en equilibrio.

$$+\Sigma F_x = 0; \quad B_x = C_x = 0; \quad C_x = 0$$

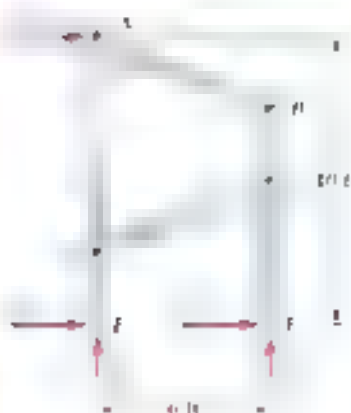
Cuerpo libre elemento AC F (compresión). Ahora ya se han calculado todas las reacciones de apoyo, así que se verifica que el elemento AC F esté en equilibrio.

$$\begin{aligned} +\uparrow \Sigma M_A &= (1800 \text{ N})(2.4 \text{ m}) - A_y(2.4 \text{ m}) - A_x(2.7 \text{ m}) \\ &= (1800 \text{ N})(2.4 \text{ m}) - (1800 \text{ N})(2.4 \text{ m}) = 0 = 0 \text{ queda comprobado} \end{aligned}$$



PROBLEMA RESUELTO 6.6

Una fuerza horizontal de 600 lb se aplica sobre el punto A del armazón mostrada en la figura; determine las fuerzas que actúan sobre los dos elementos verticales del armazón.



SOLUCIÓN

Cuerpo libre: armazón completa. Se selecciona al armazón completo en cuerpo libre; a pesar de que las reacciones involucran a cuatro incógnitas, se pueden determinar E_y y F_{dy} escribiendo

$$\begin{aligned} +\sum M_B = 0 & \quad - (600 \text{ lb})(10 \text{ ft}) + F_{dy}(10 \text{ ft}) = 0 & F_{dy} = 600 \text{ lb} \uparrow \\ +\sum F_y = 0 & \quad F_B + F_{dy} - 600 = 0 & F_B = 1000 \text{ lb} \uparrow \end{aligned}$$

Elementos. Las ecuaciones de equilibrio para el armazón completo se usan para determinar F_B y F_{dy} . Ahora se libera el armazón completo de los dos miembros verticales, dejando un cuerpo libre que tiene dos incógnitas de reacción en cada uno de los puntos A y D. Se selecciona el elemento AC y se libera el elemento CD. Se muestran los diagramas de cuerpo libre de estos dos miembros. En el elemento AC, se aplican las fuerzas de reacción F_B y F_{dy} en los puntos B y D, respectivamente. En el elemento CD, se aplican las fuerzas de reacción F_B y F_{dy} en los puntos B y D, respectivamente. Se muestran los diagramas de cuerpo libre de estos dos miembros.



Cuerpo libre: elemento AC

$$\begin{aligned} +\sum F_x = 0 & \quad 600 \text{ lb} - F_{dy} = 0 & F_{dy} = 600 \text{ lb} \\ +\sum F_y = 0 & \quad F_B - 1000 \text{ lb} = 0 & F_B = 1000 \text{ lb} \end{aligned}$$

Se resuelve simultáneamente estas ecuaciones, se obtiene el valor

Las ecuaciones de equilibrio para el elemento CD se aplican. Se muestra el diagrama de cuerpo libre del elemento CD. Se muestran las fuerzas de reacción F_B y F_{dy} en los puntos B y D, respectivamente. Se muestran las fuerzas de reacción F_B y F_{dy} en los puntos B y D, respectivamente. Se muestran las fuerzas de reacción F_B y F_{dy} en los puntos B y D, respectivamente.

$$+\sum F_x = 0 \quad 600 \text{ lb} + \frac{10}{12.5}(1000 \text{ lb}) + \frac{10}{12.5}(1500 \text{ lb}) + E_x = 0$$

Cuerpo libre: armazón completa. Como ya se ha determinado E_x , se puede regresar al diagrama de cuerpo libre para el armazón completo, escribir

$$+\sum F_x = 0 \quad 600 \text{ lb} - 1000 \text{ lb} + F_x = 0 \quad F_x = 400 \text{ lb}$$

Cuerpo libre: elemento BDF (compresión). Se pueden escribir las ecuaciones de equilibrio para el elemento BDF. Se muestran las fuerzas de reacción F_B y F_{dy} en los puntos B y D, respectivamente. Se muestran las fuerzas de reacción F_B y F_{dy} en los puntos B y D, respectivamente. Se muestran las fuerzas de reacción F_B y F_{dy} en los puntos B y D, respectivamente.

$$\begin{aligned} +\sum M_B & \quad 0 = 1500 \text{ lb}(2.5 \text{ ft}) + 400 \text{ lb}(7.5 \text{ ft}) \\ & \quad 3600 \text{ lb} \cdot \text{ft} + 3600 \text{ lb} \cdot \text{ft} = 0 \quad (\text{presión compresión}) \end{aligned}$$

Problemas

6.75 Para el armazón y la carga que se muestran en la figura, determine la fuerza que actúa sobre el elemento AB y la reacción en C .



Figura P6.75

6.76 Determine la fuerza que actúa sobre el elemento BD y las componentes de la reacción en C .

6.77 La varilla CD se ajusta a un collarín en D , el cual puede moverse libremente a lo largo de la AB . Determine la fuerza en la varilla CD y la reacción en C para la posición en la que $\theta = 30^\circ$. Determine α y la fuerza en la varilla AB y la reacción en B .

6.78 Determine la fuerza en la varilla AB y la reacción en C .

6.79 Determine las componentes de todas las fuerzas que actúan sobre el elemento ABD y la reacción en C .

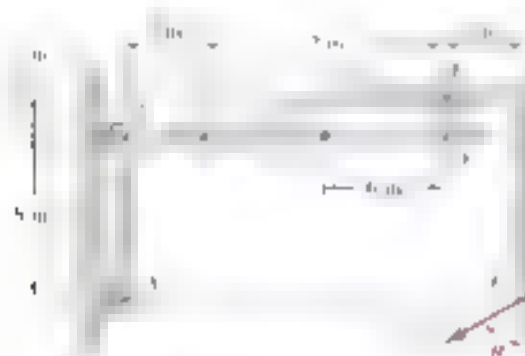


Figura P6.79 y P6.80

6.80 Determine las componentes de todas las fuerzas que actúan sobre el elemento ABD y la reacción en C .

6.81 Para el armazón y la carga que se muestran en la figura, determine las componentes de todas las fuerzas que actúan sobre el elemento ABC .

6.82 Determine la fuerza en la varilla AB y la reacción en C para la posición en la que $\theta = 30^\circ$. Determine α y la fuerza en la varilla CD y la reacción en B .



Figura P6.76



Figura P6.77



Figura P6.81



Figura P6.83 y P6.85



Figura P6.84 y P6.86

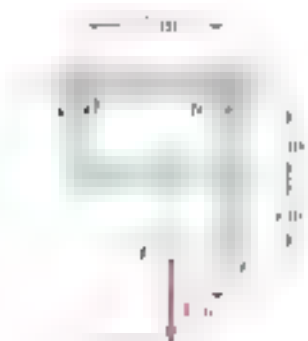


Figura P6.87



Figura P6.88 y P6.89

6.83 y 6.84 Determine las componentes x y y de las reacciones en A y B si se aplica a) a) una fuerza de 500 N en el extremo libre b) una fuerza de 500 N en el extremo libre.

6.85 y 6.86 Determine las componentes de las reacciones en A y B si el brazo está cargado con un par de 36 N \cdot m de magnitud, que actúa en el sentido de las manecillas del reloj y se aplica a) en B b) en D .

6.87 Determine las componentes de las reacciones en A y B si se aplica a) una fuerza de 500 N en el extremo libre b) una fuerza de 500 N en el extremo libre.

6.88 La carga de 48 lb que se muestra en la figura puede moverse a lo largo de su línea de acción y, por tanto, puede aplicarse en A , D o E . Determine las componentes de las reacciones en B y F si la carga de 48 lb se aplica a) en A b) en D c) en E .

6.89 La carga de 48 lb se elimina y ahora se aplica sucesivamente en A , D y E un par de 36 lb \cdot in. que actúa en el sentido de las manecillas del reloj. Determine las componentes de las reacciones en B y F si el par se aplica a) en A b) en D c) en E .

6.90 a) Muestre que cualquier armazón sostenido a una profundidad A por una carga puntual en cualquier punto de la estructura puede ser sustituido por una carga puntual en cualquier punto de la estructura. b) Muestre que cualquier armazón sostenido a una profundidad A por una carga puntual en cualquier punto de la estructura puede ser sustituido por una carga puntual en cualquier punto de la estructura.

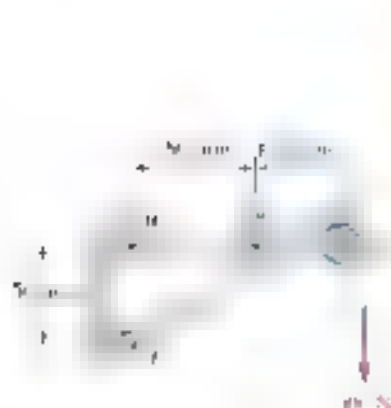


Figura P6.91



Figura P6.90

6.91 Determine las componentes de las reacciones en B y F si se sabe que el par de 36 lb \cdot in. que actúa en el sentido de las manecillas del reloj.

6.92 Dos tubos de igual longitud L y radios r_1 y r_2 se apoyan sobre una superficie horizontal, como se muestra en la figura. Suponga que cada polea tiene un radio de 250 mm.



Figura P6.92

6.93 Dos tubos de 4 m de diámetro y de 10 kN se apoyan en cada 7.5 m mediante un armazón pequeño como el que se muestra en la figura. Se supone que cada tubo está en contacto con el suelo y con las superficies sin fricción. Determine las componentes de las reacciones en A y C.



Figura P6.93

6.94 Retorne el problema 6.93, y ahora suponga que el tubo 1 se retira y que los armazones sólo sostienen al tubo 2.

6.95 Un remolque que pesa 2 400 lb está enganchado a una camioneta de 2 800 lb, como se muestra en la figura. Se supone que las reacciones en cada una de las seis ruedas cuando la camioneta y el remolque están en reposo. (a) La carga adicional debida al remolque sobre cada una de las ruedas de la camioneta.

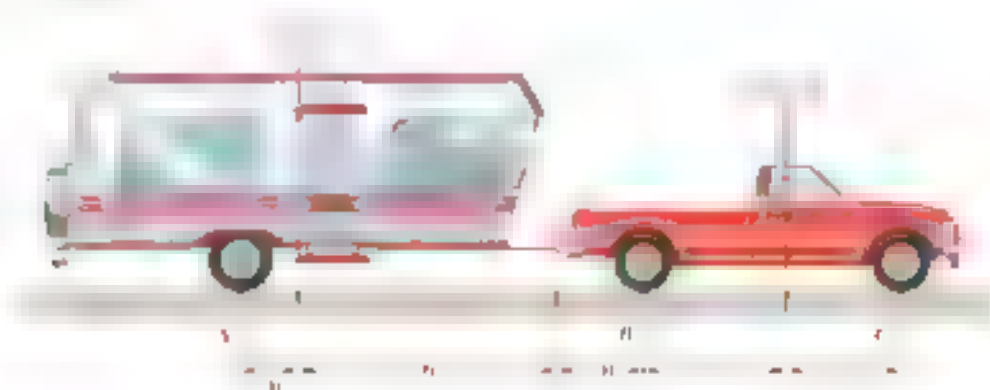


Figura P6.95

6.96 A un diámetro de 1 m, el hidrocilindro de pistón simple de cámara sencilla en la figura muestra un cilindro de 1.5 m de diámetro de un peso suelto de 100 kN. El pistón tiene un peso de 10 kN. El pistón está conectado a la camioneta. El gancho consiste en dos resortes de barra (en la figura sólo se muestran uno) que se ajustan a cojinetes de 10 m de un soporte rígido fijado a la camioneta. Los resortes también están conectados mediante cables adosados a la camioneta. Las barras de 1 m de longitud están conectadas a la camioneta y a la camioneta. Determine las reacciones resultantes en cada una de las seis ruedas de la camioneta y el remolque.



Figura P6.96

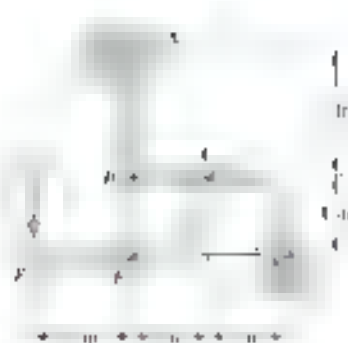


Figura P6.99



Figura P6.100

6.97 La cabina y la unidad motriz de la retroexcavadora que se muestran en la figura están sujetadas a un sistema de poleas y cables como se ilustra. Las distancias de la retroexcavadora a la distancia h son 2.5 m y 1.5 m . El centro de gravedad de la unidad motriz de 300 kN está localizado en G_m , mientras que los centros de gravedad de la cabina de 100 kN y de la carga de 75 kN se localizan respectivamente en G_c y G_L . Se supone que la retroexcavadora está en reposo sobre una superficie horizontal. Las reacciones en la columna de la izquierda son A y B . Las fuerzas ejercidas sobre la unidad motriz son C y D .

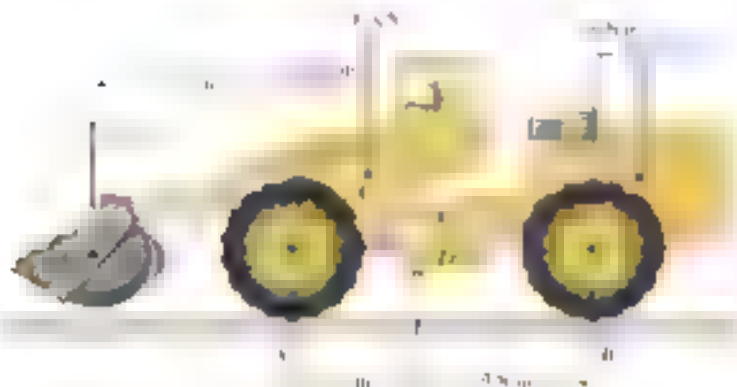


Figura P6.97

6.98 Retorne el problema 6.97 y ahora suponga que se eliminó la carga de 75 kN .

6.99 Para el armazón y la carga mostrados en la figura, determine las componentes de las fuerzas que actúan sobre el elemento CDE en C y D .

6.100 Para el armazón y la carga mostrados en la figura, determine las componentes de las fuerzas que actúan sobre el elemento CDE en C y D .

6.101 y 6.102 Para el armazón y la carga mostrados en la figura, determine la magnitud de las fuerzas que actúan sobre el elemento WDE .



Figura P6.101



Figura P6.102

6.103 Si se sabe que $P = 15$ lb y $Q = 65$ lb, determine las componentes de las fuerzas ejercidas *a)* sobre el elemento $BCDE$ en C y D , *b)* sobre el elemento $ACFG$ en E .

6.104 Si se sabe que $P = 25$ lb y $Q = 55$ lb, determine las componentes de las fuerzas ejercidas *a)* sobre el elemento $BCDE$ en C y D , *b)* sobre el elemento $ACFG$ en E .

6.105 Para el armazón y la carga mostrados en la figura, determine las componentes de las fuerzas que actúan sobre el elemento $DABC$ en B y D .

6.106 Retorne el problema 6.105, y ahora suponga que la carga de 6 kN ha sido retirada.

6.107 El eje del arco ABC con tres articulaciones es una parábola con vértice en B . Si se sabe que $P = 10$ kN y $Q = 10$ kN, determine las componentes de la reacción en A y B , las componentes de la fuerza ejercida sobre el segmento AB en B .



Figura P6.107 y P6.108

6.108 El eje del arco ABC con tres articulaciones es una parábola con vértice en B . Si se sabe que $P = 140$ kN y $Q = 112$ kN, determine las componentes de la reacción en A y B , las componentes de la fuerza ejercida sobre el segmento AB en B .

6.109 Si se sabe que las superficies en A y D están libres de fricción, determine las fuerzas ejercidas en B y C sobre el elemento BC .



Figura P6.109

6.110 Para el armazón y la carga mostrados en la figura, determine *a)* las reacciones en C y D , *b)* las componentes de la fuerza ejercida en E .

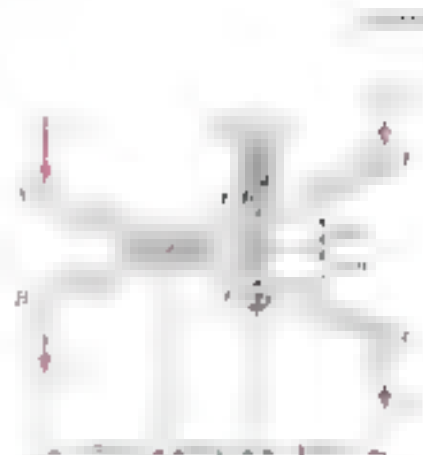


Figura P6.103 y P6.104

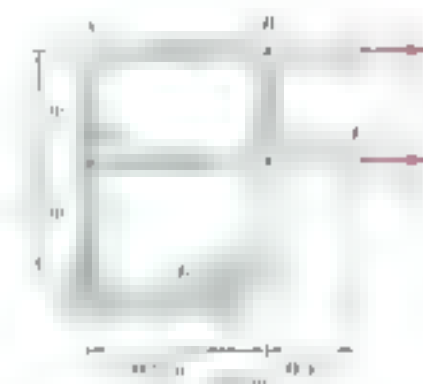


Figura P6.105



Figura P6.110

6.111, 6.112 y 6.113 Las elementos ABD y DEF están articulados en C y se sostienen mediante los cuatro apoyos mostrados. Para las cargas mostradas en cada figura, determine la fuerza en cada elemento.



Figura P6.111



Figura P6.112



Figura P6.113

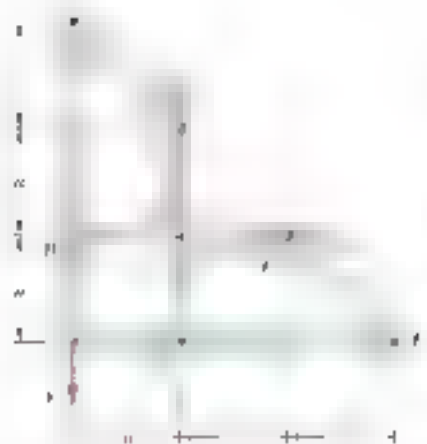


Figura P6.114

6.114 Las elementos ABC y CDE están articulados en C y se sostienen mediante los cuatro apoyos AF , BC , DE y EH . Para la carga mostrada determine la fuerza en cada elemento.

6.115 Retome el problema 6.113, y ahora suponga que la fuerza P se sustituye por un par de torsión que actúa en sentido horario en el punto D con un momento M , y se aplica sobre el elemento CDE en D .

6.116 Retome el problema 6.114, y ahora suponga que la fuerza P se sustituye por un par de torsión que actúa en sentido horario en el punto D con un momento M , y se aplica sobre el elemento CDE en D .

6.117 Considere las estructura de azcúmenes de la figura, donde se supone que se sostiene sobre el eje xy simple en A , B y C . La viga está unida a un apoyo que se encuentra a una distancia a de un extremo de la viga, como se muestra en la figura. Si se supone que en las conexiones solo se ejercen fuerzas verticales, determine las reacciones verticales en E , F , G y H .



Figura P6.117

6.118 Cuatro vigas de madera, cada una de las cuales tiene una longitud de $2a$, se clavan en el suelo en sus puntos medios para formar el sistema de soporte que se muestra en la figura. Si se supone que en las conexiones solo actúan las fuerzas perpendiculares a las vigas, ¿cuál es el Δ en D y E ?



Figura P6.118

6.119 a 6.121 Cada una de las estructuras que se muestran en las figuras consta de dos elementos en forma de L, conectados mediante dos cables. En cada figura, para $a = 200$ mm, $b = 300$ mm, $c = 400$ mm y $d = 500$ mm, indique si el armazón es rígido o no.

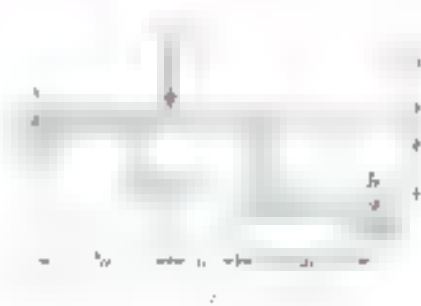
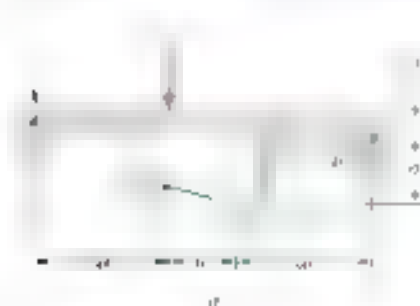


Figura P6.119



Figura P6.120



Figura P6.121



Fotografía 6.5 La lámpara que se muestra puede colocarse en muchas posiciones. La fuerza en sus resortes y las fuerzas internas en sus nodos se pueden determinar mediante la consideración de varios cuerpos libres.



Figura 6.24

6.12. MÁQUINAS

Las máquinas son estructuras diseñadas para transmitir y modificar fuerzas. No importa si una máquina opera en su nivel más básico o en mecanismos complicados, su propósito principal es transmitir *fuerzas de entrada* a *fuerzas de salida*. Por ejemplo, considere una muela de corte que se emplea para cortar un alambre (figura 6.22a). Si se aplican dos fuerzas iguales y opuestas $P_x = -P$ sobre sus mangos, éstas ejerce dos nuevas fuerzas iguales y opuestas $Q_x = -Q$ sobre el alambre (figura 6.22b).

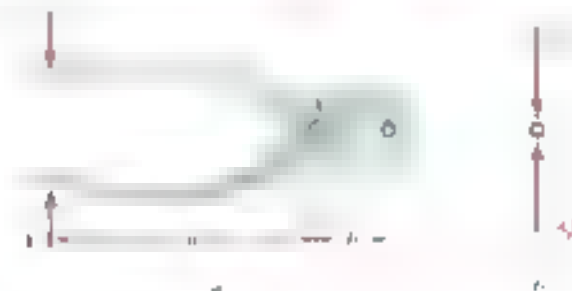


Figura 6.22

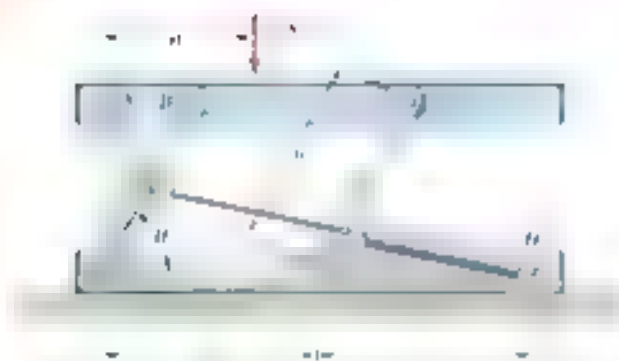
Para determinar la magnitud Q de las fuerzas de salida, primero se considera la magnitud P de las fuerzas de entrada como la fuerza dada. Entonces P mismo se conoce Q se encuentra leyendo a través de la boca de las piezas, *por lo tanto*, una vez que se conocen las fuerzas de entrada $P_x = P$ y la magnitud $Q_x = Q$ que el alambre ejerce sobre las piezas (figura 6.23).



Figura 6.23

Si se imagina que las piezas forman una estructura que no se deforma, se puede analizar una de las piezas y la sustituir con el otro cuerpo que ejerce sobre ella, determinando las fuerzas de reacción. Por ejemplo, en la figura 6.24a, si se toma como cuerpo libre el mango izquierdo con respecto a A, se obtiene la ecuación $P_x = Q$; luego, se refiere a la magnitud de Q en términos de P y a la magnitud de P en términos de Q . Se puede emplear el mismo diagrama de cuerpo libre para determinar las componentes de la fuerza interna en A. De esta forma, se encuentra que $A_x = 0$ y $A_y = P + Q$.

En el caso de máquinas más complejas, es necesario utilizar varios diagramas de cuerpo libre y, posiblemente, se requieren que resuelvan ecuaciones simultáneas para determinar las fuerzas internas. Las ecuaciones libres se deben seleccionar de manera que incluyan a las fuerzas de entrada y a las reacciones de las fuerzas de salida, y el número total de componentes de las fuerzas desconocidas no debe ser mayor que el número de ecuaciones simultáneas que están disponibles. Antes de intentar resolver un problema, es recomendable conocer si la estructura considerada es determinada o no. Sin embargo, en la mayoría de los casos, basta con la regla de un cuerpo a prueba que está en equilibrio para determinar si el problema es solvable.



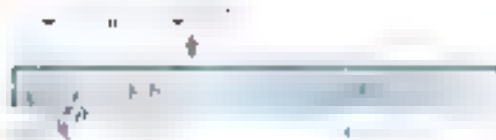
PROBLEMA RESUELTO 6.7

Un elevador hidráulico se emplea para levantar una caja de 400 kg. El elevador consta de una plataforma y dos cilindros idénticos sobre los cuales los cilindros hidráulicos ejercen fuerzas iguales. En la figura sólo se muestra uno de los cilindros y uno de los cables. Cada uno de los elementos BC y CG tienen una longitud de $2a$ y el elemento AD está sujeto con un perno en el punto medio de EDB . Si la caja se encuentra sobre la plataforma de modo que la mitad de su peso es soportado por el sistema que se muestra, determine la fuerza ejercida por cada cilindro para levantar la caja cuando $\theta = 60^\circ$, $a = 0.70$ m y $L = 1.20$ m. Demuestre que el resultado obtenido es independiente de la distancia a .

SOLUCIÓN

La máquina en consideración consta de la plataforma y de los cables. Su diagrama de cuerpo libre incluye una fuerza centrada F_{mg} ejercida por el cilindro, el peso W y la reacción en E y G cuyas direcciones se muestran en la figura. Como están involucradas más de tres magnitudes, no se utiliza este diagrama de cuerpo libre. Se desensambla el mecanismo y se dibuja un diagrama de cuerpo libre para cada una de las partes que lo constituyen. Se observa que AD , BC y CG son elementos sujetos a las fuerzas. Ya se supuso que el elemento BC está en compresión; ahora se supone que los elementos AD y BC están en tensión y las fuerzas ejercidas sobre ellos se dibujan como se muestra en la figura. Se muestran vectores iguales y opuestos para representar las fuerzas ejercidas por los elementos que se unen. Las fuerzas sobre la plataforma, sobre el elemento ADB y sobre el rodillo E





$$\sum F_x = 0 \quad F - R = 0 \quad R = F$$

$$\sum F_y = 0 \quad R + C - W = 0 \quad R + C = W$$

Cuerpo libre: rodillo C. Se dibuja un triángulo de fuerzas y se obtiene $F_{AC} = C \cos \theta$



Cuerpo libre: elemento BDE. Recordando que $F_{CB} = 0$,

$$+\sum M_B = 0: \quad F_{DE} \cos(\phi - 90^\circ) - B(2a \cos \theta) - F_{BC}(2a \sin \theta) = 0$$

$$F_{DE} \sin \phi - B(2a \cos \theta) - C(2a \sin \theta) = 0$$

$$F_{DE} \sin \phi = 2a(B + C) \cos \theta \quad (1)$$

Recordando la ecuación 1, se tiene que

$$F_{DE} = W \frac{\cos \theta}{\sin \phi} \quad (2)$$

y se observa que el resultado obtenido es independiente de a

Primero se aplica la ley de los senos al triángulo EDE se escribe

$$\frac{\sin \phi}{EH} = \frac{\sin \theta}{DH} \quad \sin \phi = \frac{EH}{DH} \sin \theta \quad (3)$$

Además, con la ley de los cosenos se tiene que

$$(DH)^2 = a^2 + L^2 - 2aL \cos \theta$$

$$= (0.70)^2 + (3.20)^2 - 2(0.70)(3.20) \cos 60^\circ$$

$$(DH)^2 = 9.40 \quad DH = 3.07 \text{ m}$$

También se observa que

$$W = mg = (1000 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 9810 \text{ N} = 9.81 \text{ kN}$$

Si el ángulo θ se mide de otro modo, se puede utilizar la ley de los senos, pero en este caso, se escribe

$$F_{DE} = W \frac{DH}{EH} \sin \theta = (9.81 \text{ kN}) \frac{3.07 \text{ m}}{3.20 \text{ m}} \sin 60^\circ$$

$$F_{DE} = 5.13 \text{ kN} \quad \blacktriangleleft$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

Este ejercicio es una actividad de análisis de *manera libre*. Con estas características y parámetros, el estudiante debe encontrar las fuerzas que actúan en los cuerpos sin recurrir a las ecuaciones que se establecieron en el estudio de equilibrio. ¿Puede o no encontrar el apoyo con el que actúan las fuerzas requeridas para mantener el equilibrio de la maqueta?

Las fuerzas conocidas son el peso de los cuerpos, el peso que se aplica a cada uno de los cuerpos de la maqueta. En algunos casos, puede haber fuerzas de fricción entre los cuerpos de la maqueta. Las fuerzas de sustentación de los cuerpos de la maqueta son iguales a las fuerzas de peso que se aplican a cada uno de los cuerpos de la maqueta para mantener el equilibrio.

Algunos de los cuerpos de la maqueta pueden ser considerados como cuerpos rígidos y otros como cuerpos deformables.

El estudiante debe considerar que las fuerzas de sustentación de los cuerpos de la maqueta son iguales a las fuerzas de peso que se aplican a cada uno de los cuerpos de la maqueta.

2. *Descomponer la maqueta y determinar las fuerzas que actúan en los elementos que la constituyen.*

2. *Considerar primero a los elementos sujetos a las fuerzas que se aplican.* Las fuerzas que actúan en los elementos de la maqueta se pueden considerar como fuerzas que actúan en los puntos de apoyo de los elementos. Si en este momento no se puede establecer si el elemento de la maqueta es rígido o deformable, se puede considerar como un cuerpo rígido. Si el elemento de la maqueta es rígido, se puede considerar como un cuerpo rígido. Si el elemento de la maqueta es deformable, se puede considerar como un cuerpo deformable. Las fuerzas que actúan en los elementos de la maqueta son iguales a las fuerzas de peso que se aplican a cada uno de los elementos de la maqueta.

3. *Considerar ahora a los elementos sujetos a las fuerzas que se aplican.* Las fuerzas que actúan en los elementos de la maqueta se pueden considerar como fuerzas que actúan en los puntos de apoyo de los elementos. Si en este momento no se puede establecer si el elemento de la maqueta es rígido o deformable, se puede considerar como un cuerpo rígido. Si el elemento de la maqueta es rígido, se puede considerar como un cuerpo rígido. Si el elemento de la maqueta es deformable, se puede considerar como un cuerpo deformable. Las fuerzas que actúan en los elementos de la maqueta son iguales a las fuerzas de peso que se aplican a cada uno de los elementos de la maqueta.

4. *Considerar ahora a los elementos sujetos a las fuerzas que se aplican.* Las fuerzas que actúan en los elementos de la maqueta se pueden considerar como fuerzas que actúan en los puntos de apoyo de los elementos. Si en este momento no se puede establecer si el elemento de la maqueta es rígido o deformable, se puede considerar como un cuerpo rígido. Si el elemento de la maqueta es rígido, se puede considerar como un cuerpo rígido. Si el elemento de la maqueta es deformable, se puede considerar como un cuerpo deformable. Las fuerzas que actúan en los elementos de la maqueta son iguales a las fuerzas de peso que se aplican a cada uno de los elementos de la maqueta.

5. *Considerar ahora a los elementos sujetos a las fuerzas que se aplican.* Las fuerzas que actúan en los elementos de la maqueta se pueden considerar como fuerzas que actúan en los puntos de apoyo de los elementos. Si en este momento no se puede establecer si el elemento de la maqueta es rígido o deformable, se puede considerar como un cuerpo rígido. Si el elemento de la maqueta es rígido, se puede considerar como un cuerpo rígido. Si el elemento de la maqueta es deformable, se puede considerar como un cuerpo deformable. Las fuerzas que actúan en los elementos de la maqueta son iguales a las fuerzas de peso que se aplican a cada uno de los elementos de la maqueta.

6. *Considerar ahora a los elementos sujetos a las fuerzas que se aplican.* Las fuerzas que actúan en los elementos de la maqueta se pueden considerar como fuerzas que actúan en los puntos de apoyo de los elementos. Si en este momento no se puede establecer si el elemento de la maqueta es rígido o deformable, se puede considerar como un cuerpo rígido. Si el elemento de la maqueta es rígido, se puede considerar como un cuerpo rígido. Si el elemento de la maqueta es deformable, se puede considerar como un cuerpo deformable. Las fuerzas que actúan en los elementos de la maqueta son iguales a las fuerzas de peso que se aplican a cada uno de los elementos de la maqueta.

7. *Considerar ahora a los elementos sujetos a las fuerzas que se aplican.* Las fuerzas que actúan en los elementos de la maqueta se pueden considerar como fuerzas que actúan en los puntos de apoyo de los elementos. Si en este momento no se puede establecer si el elemento de la maqueta es rígido o deformable, se puede considerar como un cuerpo rígido. Si el elemento de la maqueta es rígido, se puede considerar como un cuerpo rígido. Si el elemento de la maqueta es deformable, se puede considerar como un cuerpo deformable. Las fuerzas que actúan en los elementos de la maqueta son iguales a las fuerzas de peso que se aplican a cada uno de los elementos de la maqueta.

8. *Considerar ahora a los elementos sujetos a las fuerzas que se aplican.* Las fuerzas que actúan en los elementos de la maqueta se pueden considerar como fuerzas que actúan en los puntos de apoyo de los elementos. Si en este momento no se puede establecer si el elemento de la maqueta es rígido o deformable, se puede considerar como un cuerpo rígido. Si el elemento de la maqueta es rígido, se puede considerar como un cuerpo rígido. Si el elemento de la maqueta es deformable, se puede considerar como un cuerpo deformable. Las fuerzas que actúan en los elementos de la maqueta son iguales a las fuerzas de peso que se aplican a cada uno de los elementos de la maqueta.

9. *Considerar ahora a los elementos sujetos a las fuerzas que se aplican.* Las fuerzas que actúan en los elementos de la maqueta se pueden considerar como fuerzas que actúan en los puntos de apoyo de los elementos. Si en este momento no se puede establecer si el elemento de la maqueta es rígido o deformable, se puede considerar como un cuerpo rígido. Si el elemento de la maqueta es rígido, se puede considerar como un cuerpo rígido. Si el elemento de la maqueta es deformable, se puede considerar como un cuerpo deformable. Las fuerzas que actúan en los elementos de la maqueta son iguales a las fuerzas de peso que se aplican a cada uno de los elementos de la maqueta.

10. *Considerar ahora a los elementos sujetos a las fuerzas que se aplican.* Las fuerzas que actúan en los elementos de la maqueta se pueden considerar como fuerzas que actúan en los puntos de apoyo de los elementos. Si en este momento no se puede establecer si el elemento de la maqueta es rígido o deformable, se puede considerar como un cuerpo rígido. Si el elemento de la maqueta es rígido, se puede considerar como un cuerpo rígido. Si el elemento de la maqueta es deformable, se puede considerar como un cuerpo deformable. Las fuerzas que actúan en los elementos de la maqueta son iguales a las fuerzas de peso que se aplican a cada uno de los elementos de la maqueta.

Problemas

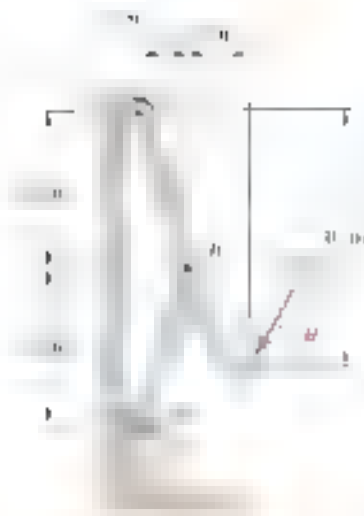


Figura P6.122

6.122 Se aplica una fuerza de 50 lb sobre la polea de la cuerda en C. Si se sabe que $\theta = 30^\circ$, determine la fuerza horizontal que actúa sobre el fleje en la parte superior de la barra en el punto A y B.

6.123 Retome el problema 6.122 cuando $\theta = 0^\circ$.

6.124 La varilla de control C-P pasa a través de un orificio horizontal en el cuerpo del sistema de fleje que se muestra en la figura. Si se sabe que se aplica una fuerza de 250 newtons sobre la fuerza Q perpendicular para mantener el sistema en equilibrio cuando $\beta = 30^\circ$.

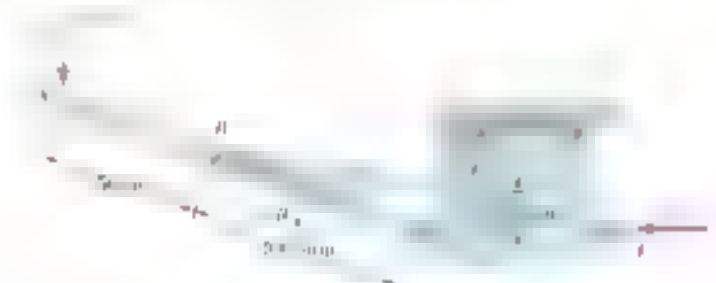


Figura P6.124

6.125 Retome el problema 6.124 cuando a) $\beta = 0^\circ$ b) $\beta = 45^\circ$

6.126 La polea que se muestra en la figura se utiliza para levantar un collar perpendicular en E. Si se sabe que $P = 250$ N, determine a) la tensión de la cuerda en el punto A y b) la tensión en el punto B.



Figura P6.126 y P6.127

6.127 La polea que se muestra en la figura se utiliza para levantar un collar perpendicular en E. Si se sabe que la tensión de la cuerda en el punto A es de 400 N, determine a) la tensión en el punto B y b) la reacción correspondiente en A.

6.128 En el sistema de simulacro mostrado en la figura, el agua a presión ejerce una fuerza hacia abajo de 135 N sobre la conexión vertical en A. Determine la tensión en el estanco fusible DE y la fuerza ejercida sobre el elemento BC-E en B.

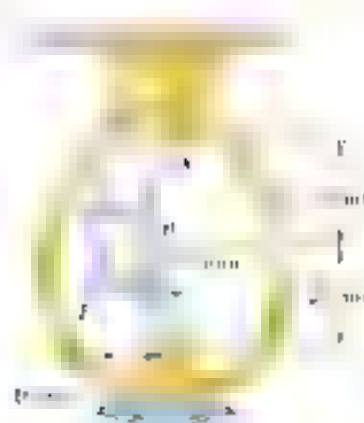


Figura P6.128

6.129 Un par M de $1.5 \text{ kN}\cdot\text{m}$ en de magnitud se aplica en la manivela del sistema mecánico mostrado en la figura. Para cada una de las dos posiciones mostradas, determine la fuerza P necesaria para mantener el sistema en equilibrio.

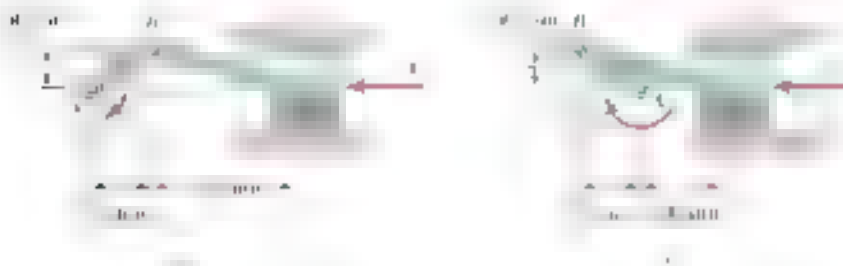


Figura P6.129 y P6.130

6.130 Una fuerza P de 16 kN de magnitud se aplica en el pistón del sistema mostrado en la figura. Para cada una de las dos posiciones mostradas, determine el par M necesario para mantener el equilibrio del sistema.

6.131 El pasador en B se une al elemento ABC y puede deslizarse libremente a lo largo de una ranura en la placa fija que se muestra en la figura. Sin tomar en cuenta el efecto de la fricción, determine el par M requerido para mantener el equilibrio del sistema cuando $\theta = 30^\circ$.

6.132 El pasador en B se une al elemento ABC y puede deslizarse libremente a lo largo de una ranura en la placa fija que se muestra en la figura. Sin tomar en cuenta el efecto de la fricción, determine el par M requerido para mantener el equilibrio del sistema cuando $\theta = 60^\circ$.



Figura P6.131 y P6.132

6.133 El brazo AB se conecta mediante pernos a un collar en B y a la manivela CD en C . Sin tomar en cuenta el efecto de la fricción, determine el par M necesario para mantener al sistema en equilibrio cuando $\theta = 0^\circ$.

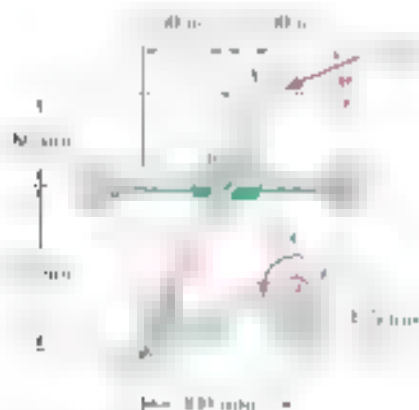


Figura P6.133 y P6.134

6.134 El brazo ABC se conecta mediante pernos a un collar en B y a la manivela CD en C . Sin tomar en cuenta el efecto de la fricción, determine el par M necesario para mantener al sistema en equilibrio cuando $\theta = 90^\circ$.

6.135 y 6.136 Dos barras se sustentan sobre un resorte de muelle, como se muestra en las figuras. Sin tomar en cuenta el efecto de la fricción, determine el par M , necesario para mantener el sistema en equilibrio.

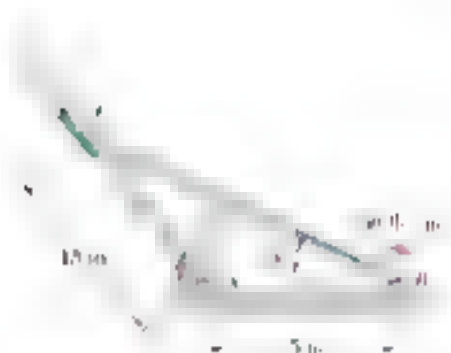


Figura P6.135



Figura P6.136

6.137 y 6.138 La fuerza CD que está unida al collarín D y pasa a través de la guía de soporte A y B le hace falta AP . Sin tomar en cuenta el efecto de la fricción, determine el par M necesario para mantener el sistema en equilibrio cuando $\theta = 30^\circ$.

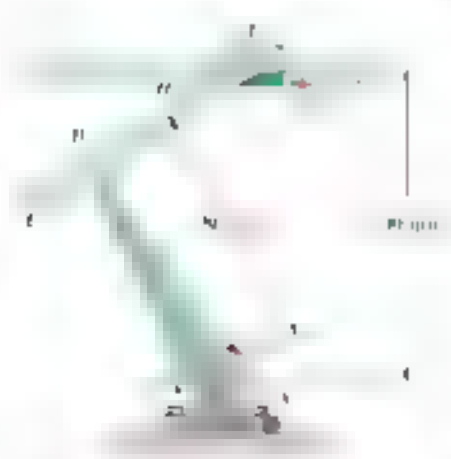


Figura P6.137



Figura P6.138

6.139 Dos cilindros hidráulicos controlan la posición del brazo robótico ABC . Si se sabe que el sistema en equilibrio está en la posición mostrada en las figuras, determine la fuerza ejercida por cada cilindro cuando $P = 1600$ N y $Q = 500$ N.

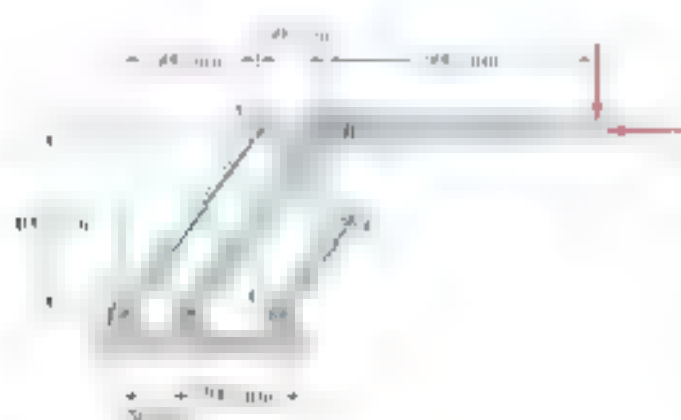


Figura P6.139 y P6.140

6.140 Dos cilindros hidráulicos controlan la posición del brazo robótico ABC . En la posición mostrada los cilindros están paralelos y ambos se encuentran en tensión. Si se sabe que $F_{AB} = 800$ N y $F_{BC} = 500$ N determine las fuerzas P y Q que se aplican sobre el brazo ABC en C .

6.141 La tenaza que pesa 500 lb se levanta mediante un cable tenaz y como se muestra en la figura. Determine las fuerzas ejercidas sobre la tenaza DEP en E y en F .

6.142 Un riel de ferrocarril con 30 ft de longitud y 44 lb/ft de peso se levanta mediante las tenazas que se muestran en la figura. Determine las fuerzas ejercidas sobre la tenaza BDP en D y en F .

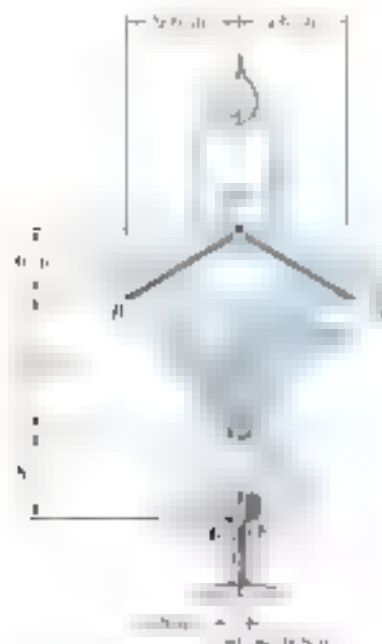


Figura P6.142

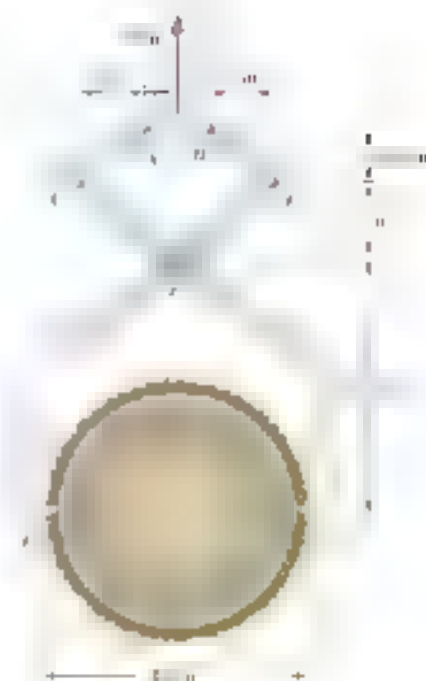


Figura P6.141

6.143 Las tenazas que se muestran en la figura se usan para apilar cajas. La BDP tiene un peso de 100 lb. Determine las fuerzas ejercidas sobre la tenaza ADP en D y en F .



Figura P6.143

6.144 Si el flucher mostrado en la figura se agrega a las tenazas del problema 6.143, se aplica una sola fuerza vertical en E . Determine la fuerza y el momento sobre la tenaza ADP en D y en F .



Figura P6.144

6.145 Las piezas que se muestran en la figura se tocan para apretar una varilla de $\frac{1}{2}$ in. de diámetro. Si se aplican dos fuerzas de 30 lb sobre las manijas, determine la magnitud de la fuerza horizontal P que se requiere para mantener la posición AB de las piezas.

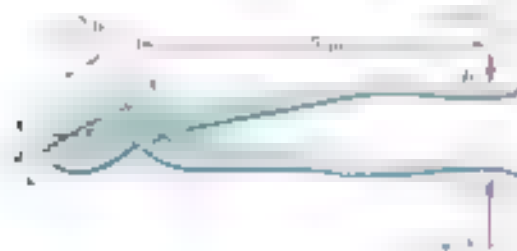


Figura P6.145

6.146 A través de piezas curvadas para pernos que se muestran en la figura, un traluzador aplica dos fuerzas de 300 N sobre sus manijas. Determine la magnitud de las fuerzas generadas por las piezas curvadas sobre el perno.

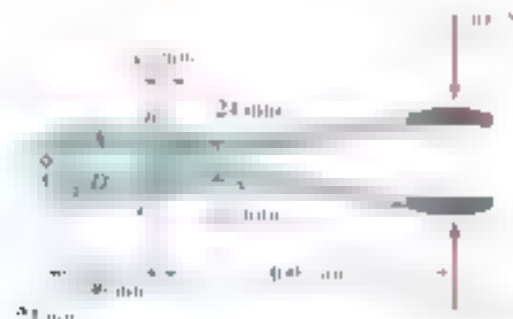


Figura P6.146

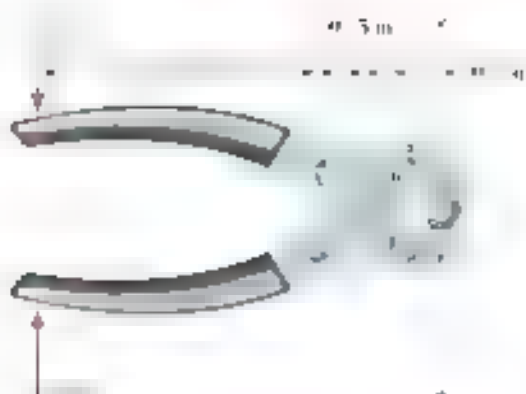


Figura P6.147

6.147 Determine la magnitud de las fuerzas de apriete ejercidas sobre la varilla cuando la fuerza P se aplica como se muestra. Las fuerzas P se aplican en los puntos A, B, C y D. La fuerza P se aplica en los puntos A y D. La fuerza P se aplica en los puntos B y C.

6.148 Determine la magnitud de las fuerzas de apriete generadas cuando dos fuerzas de 300 N se aplican como se muestra en la figura.

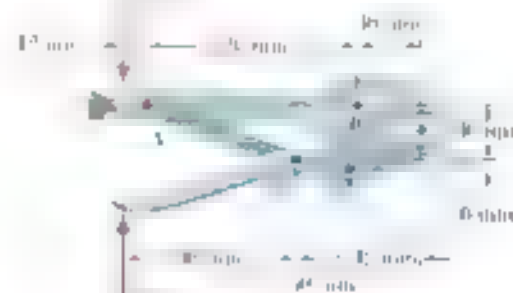


Figura P6.148

6.149 Si se sabe que el armazón mostrado en la figura tiene una desviación $\theta = 1$ in. en B, determine la fuerza P requerida para mantener el equilibrio en la posición mostrada.

6.150 Si se sabe que el armazón mostrado en la figura tiene una desviación $\theta = 1$ in. en B, determine la fuerza P requerida para mantener el equilibrio en la posición mostrada.

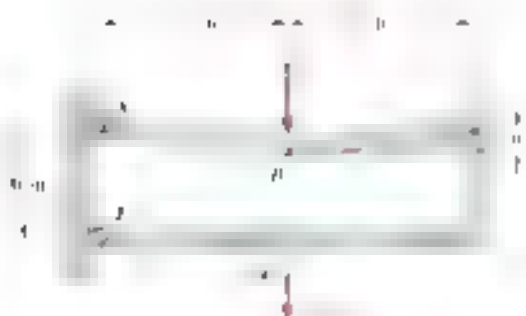


Figura P6.149 y P6.150

6.15 Las tijeras para pinchar montañas en la tigreca consisten de dos cuchillas y dos mangos. Las dos cuchillas están unidas por medio del perno C y las dos cuchillas mediante el perno D . La cuchilla de la izquierda es un elemento rígido de 1.5 m de longitud y se sostiene en el punto A y el otro extremo B de la cuchilla de la izquierda está unido al punto B . Determine la magnitud de las fuerzas ejercidas sobre cada cuchilla respecto al punto C cuando se aplican las fuerzas de 80 N en los mangos de las tijeras, como se muestra en la figura.



Figura P6.151

6.152 El brazo de extensión telescópica ABC se emplea para levantar una plataforma en un trabajo de mantenimiento de vías. La masa combinada de los trabajadores y de la plataforma es de 200 kg y su centro de gravedad compuesto se localiza directamente por encima de C . Para la posición en la cual $\theta = 70^\circ$, determine la fuerza ejercida en el cable BD y la fuerza ejercida sobre el soporte del sistema en A .



Figura P6.152 y P6.153

6.153 El brazo de extensión telescópica ABC puede descender hasta por el extremo C sin embargo, para disminuir los riesgos por caer al abanicar con facilidad la plataforma. Para la posición en la cual $\theta = -20^\circ$, determine la fuerza ejercida en el cable BD y la fuerza ejercida sobre el soporte del sistema en A .

6.154 La posición del elemento ABC se controla mediante el cilindro hidráulico DE . Se sabe que $\theta = 30^\circ$, determine para la carga mostrada, θ la fuerza ejercida por el cilindro hidráulico sobre el pivote en E . La longitud es de 1 m .



Figura P6.154

6.157 El movimiento del culero de la retroexcavadora que se muestra en la figura se controla mediante los cilindros hidráulicos AB y CD . Se sabe que el culero se mueve hacia su posición que está en línea con el eje CE cuando P lo ejerce horizontalmente. Si $P = 1500 \text{ N}$ y se sabe que $\theta = 45^\circ$, determine la fuerza ejercida por cada cilindro.

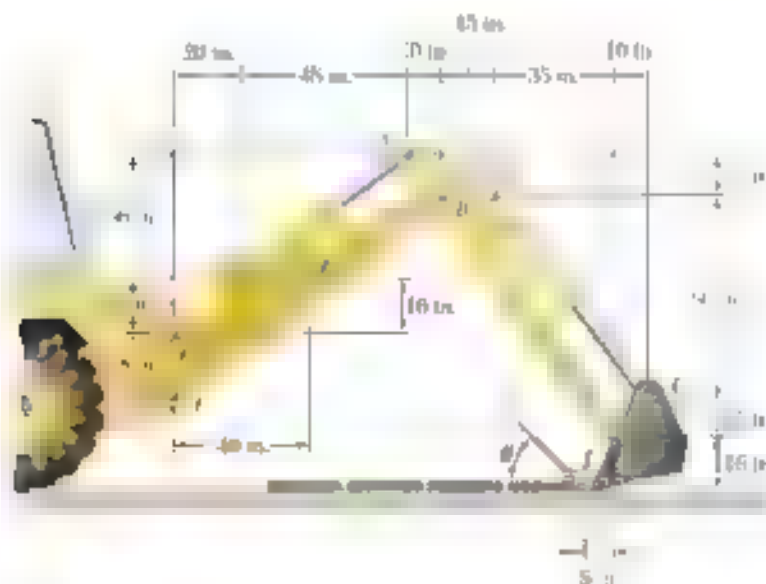


Figura P6.157

6.158 Retome el problema 6.157 y ahora suponga que la fuerza P de 2 kips actúa en forma horizontal hacia la derecha ($\theta = 0^\circ$).

6.159 Los engranes D y E mostrados en la figura están rigidamente unidos a los ejes AC y BD respectivamente. Los ejes AC y BD tienen $r_D = 90 \text{ mm}$ y $r_E = 30 \text{ mm}$, determine *a*) el par M_D que debe aplicarse para mantener el equilibrio y *b*) las reacciones en A y B .

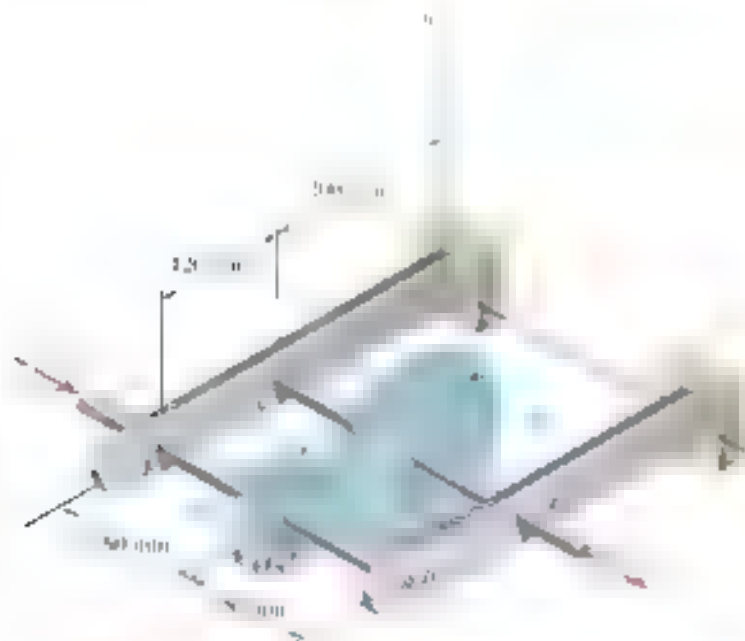


Figura P6.159



Figura P6.160

6.160 En el sistema de engranes planetarios mostrado en la figura, el radio del engrane central A es a , 15 mm , el radio del engrane planetario es b y el radio del engrane exterior E es $(a + 2b)$. Se aplica un momento de magnitud $M_A = 10 \text{ N} \cdot \text{m}$ en el sentido del movimiento de las manivelas del eje en el engrane central A, y se aplica un par de magnitud $M_E = 50 \text{ N} \cdot \text{m}$ en el sentido contrario al de las manivelas del eje en el brazo B-D. Si el sistema está en equilibrio, determinar a) el radio b que deben tener los engranes planetarios y b) la magnitud del par M_F que debe aplicarse sobre el engrane interior E.

6.161 Dos ejes AC y CE, los cuales están contenidos en el plano vertical xy , se conectan mediante una junta universal en C. Las esferas en B y D no ejercen ninguna fuerza axial. Un par con magnitud de $500 \text{ lb} \cdot \text{in.}$ (el cual actúa en el sentido de las manivelas del eje) cuando se ve desde el eje positivo x , se aplica sobre el eje CE en el punto E, que está a una distancia 10 in. del eje AC. La distancia entre los ejes AC y CE es 10 in. y la longitud del eje CE es 10 in. Determine la magnitud de la fuerza M en A para mantener el sistema en equilibrio. Las reacciones en los ejes B, D y E. Sugiera una distancia de los ejes ejérculos sobre la pieza transversal debe ser igual a 4 cm .

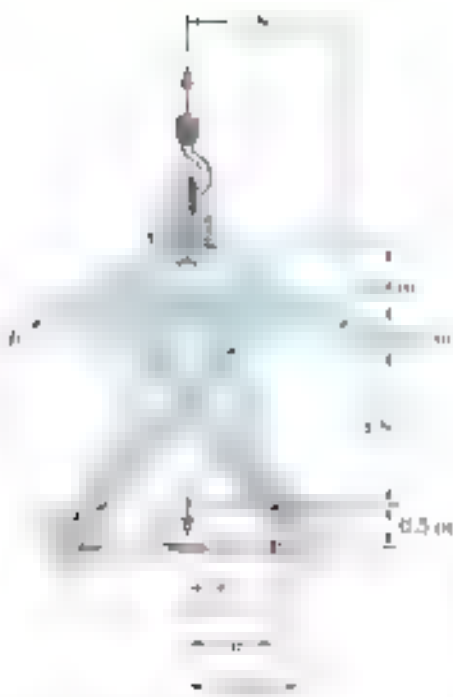


Figura P6.163



Figura P6.161

6.162 Repetir el problema 6.161, y ahora suponga que el brazo de la pieza transversal unida al eje CE está en posición vertical.

6.163 Las tenazas mecánicas de gran tamaño que se muestran en la figura se sujetan por un par de cables a una placa horizontal. Se sabe que no existe deslizamiento entre las asientas de las tenazas y la placa. La fuerza H del cable en las esquinillas de los cables actúa sobre el elemento E-FH. (Sugiera: Considere la simetría de las tenazas para establecer las relaciones entre las componentes de la fuerza que actúa sobre E-FH en E y las componentes de la fuerza que actúa sobre C-D-F en D.)

la triangulación de fuerzas es un símbolo. Si la fuerza ejercida por un elemento sobre otro, permitiendo esta extensión hacia el punto, la extensión hacia el elemento es la fuerza ejercida por el elemento sobre el punto. Esta segunda fuerza, la extensión de elemento hacia el punto, también puede resolverse. Algunas veces se sabe hacia el análisis de una estructura si se identifican primero los nodos que se encuentran en la estructura y se extiende esta estructura de estructuras espaciales o tridimensionales [sección 6.6].

El método de secciones es más eficaz que el método de los nodos cuando únicamente se desea determinar la fuerza en un solo elemento. Se puede usar secciones para [sección 6.7]. Para ejemplo, para determinar la fuerza en el elemento BD de la estructura de la figura 6.26a, se pasa una sección a través de los elementos BD , BF y CF se eliminan los otros elementos y se considera el elemento ABD en la estructura tridimensional [sección 6.26a]. Se considera $\sum M_B = 0$ se determina la magnitud de la fuerza F_{BD} que representa la fuerza en el elemento BD . Un signo positivo indica que el elemento está en tensión; un signo negativo indica que el elemento está en compresión [problemas resueltos 6.2 y 6.3].



Figura 6.26

El método de secciones es útil para análisis de armadura. Las armaduras están en armaduras que no se pueden construir a partir de la armadura triangular básica de la figura 6.26a. No se puede obtener conectando y eliminando armaduras básicas de secciones. Se las armaduras simples que consisten en la armadura compuesta han sido determinadas con la apropiada procedimiento de análisis. Se han a por medio de tres relaciones que no son concurrentes ni paralelas y se la estructura es bastante estable. Se puede usar método de permitiendo la armadura compuesta se crea. La estructura debe cumplir la siguiente condición necesaria —pero no suficiente—, $m + r = 2n$, donde m es el número de elementos, r es el número de reacciones y n es el número de nodos.

Problemas de repaso

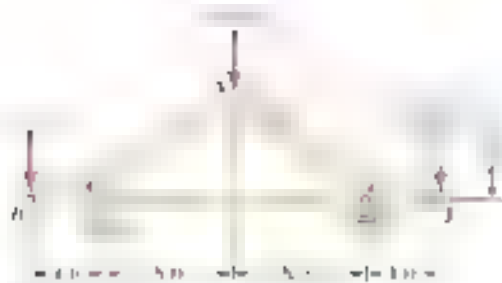


Figura P6.164

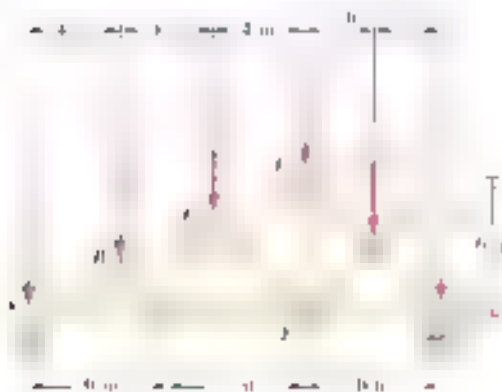


Figura P6.165



Figura P6.166



Figura P6.170

6.164 Utilice el método de los nodos para determinar la fuerza en cada elemento de la estructura que se muestra en la figura. Para cada uno de los elementos, indique si está en tensión o en compresión.

6.165 Utilice el método de los nodos para determinar la fuerza en cada elemento de la estructura que se muestra en la figura. Para cada uno de los elementos, indique si está en tensión o en compresión.

6.166 La armadura que se muestra en la figura está diseñada para sostener el techo de un mercado de alimentos. Para las cargas dadas, determine la fuerza en los elementos BC , CD , DE y EF .

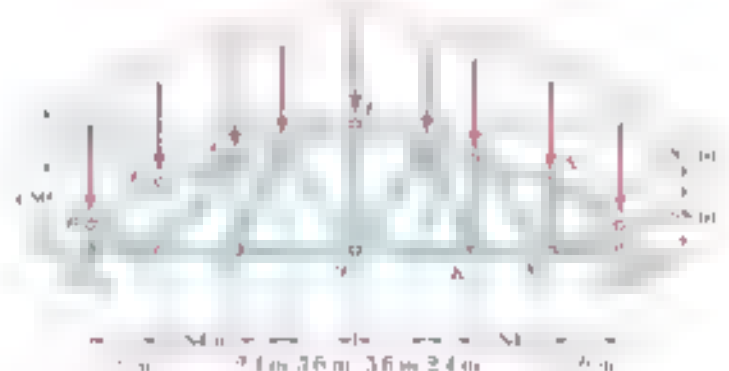


Figura P6.166 y P6.167

6.167 La armadura que se muestra en la figura está diseñada para sostener el techo de un mercado de alimentos. Para las cargas dadas, determine la fuerza en los elementos KM , LN y LN .

6.168 Para el armazón y la carga que se muestran en la figura, determine las componentes de todas las fuerzas que actúan sobre el elemento AB .

6.169 Retorne el problema 6.168, y ahora suponga que la carga de 30 kN se reemplaza por un par de 2 kN \cdot m en el punto B y el se define en las direcciones de los ejes x y y que se aplican en el punto B como se indica.

6.170 Si se sabe que la polea tiene un radio de 0.5 m, determine las componentes de las reacciones en A y E .

6.171 Para el armazón y la carga mostrados en la figura, determine las reacciones en A , B , D y E . Suponga que la estructura está apoyada sobre el eje de rotación.

6.172 Para el sistema y la carga que se muestran en la figura, determine $a)$ la fuerza P necesaria para mantener el equilibrio, $b)$ la fuerza compo-

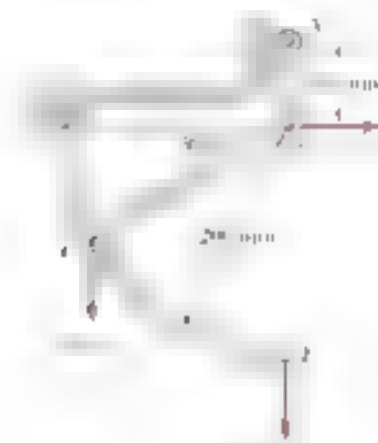


Figura P6.172



Figura P6.171

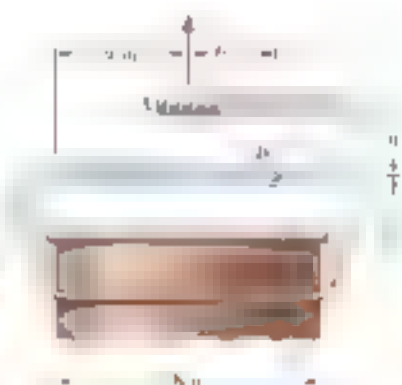


Figura P6.173

6.173 Un barrel pesquero que tiene un peso de 60 lb se levanta mediante un par de cuerdas como se muestra en la figura. Si se sabe que $a = 5$ ft, determine las fuerzas horizontales en los puntos A y B .

6.174 Un estante de 20 kg se mantiene en posición horizontal mediante un cable polipropileno que conecta los dos puntos A y B . Si se sabe que $a = 1$ m y $b = 1$ m, determine la fuerza P necesaria para aflojar el cable.

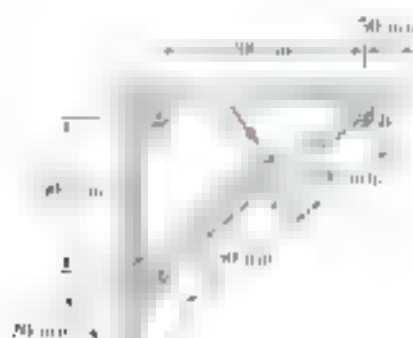


Figura P6.174



Figura P6.175

6.175 La llave de torsión especial para plomeros que se muestra en la figura es el elemento de ajuste de torsión por el cual se puede ajustar el momento ejercido en una grapa BC articulada en B a una varilla larga. Si se sabe que las fuerzas ejercidas sobre la llave son equivalentes a un par en el sentido de las manecillas del reloj cuando se ve desde arriba con momento de 135 lb \cdot in., determine $a)$ la magnitud de la fuerza ejercida por el punto A en la grapa BC , $b)$ el momento M_B en el punto B de la llave de torsión.



Figura P8.C1

8 C1 Se debe diseñar una armadura Pratt de acero para soportar tres cargas puntuales P_1 , P_2 y P_3 como se indica en la figura P8.C1. Las dimensiones de la armadura son: longitud total de 12 m, altura de 4 m y distancia entre nudos de 4 m. Las áreas de las secciones transversales de los diferentes elementos, deben seleccionarse para obtener el diseño más económico. En específico, el área de la sección transversal de cada elemento debe ser un múltiplo de 100 cm². El estremo permitido para el acero utilizado, el peso total del acero y, por tanto, su costo, deben ser tan pequeños como sea posible. Si se sabe que el peso específico del acero usado es de 0.284 lb/in³, utilizar software para calcular el peso de la armadura y seleccionar la sección transversal de cada elemento que soporta una carga puntual a partir de la tabla 1.1 para valores de θ que van de 30° a 60° con incrementos de 5°. Usar incrementos más pequeños y seleccionados para determinar el valor óptimo de θ y los valores correspondientes a: el peso de la armadura y de las áreas de las secciones transversales de los diferentes elementos. Para sus cálculos, considere que el peso de ningún elemento de fuerza es cero.

8 C2 El piso de un puente se apoya sobre largueros soportados por vigas transversales de piso como se muestra en la figura P8.C2. Las extremidades de las vigas se unen a los muelles superiores de dos armaduras, una de las cuales se soporta en un muro y la otra en un pilar. El muro y el pilar están separados por una distancia de 17.25 m. El muro y el pilar están separados por una distancia de 17.25 m. Si se sabe que la distancia entre los ejes del caudal es $b = 2.25$ m, seleccionar los muelles superiores de las armaduras para soportar el caudal en los elementos BD y CD para valores de x desde 0 hasta 17.25 m, con incrementos de 0.75 m. A partir de los resultados obtenidos determinar el valor de x que da el menor costo. Nota: Los incrementos se seleccionaron de forma que los valores de x sean enteros y estén entre los que se valen para los muelles superiores de las armaduras.

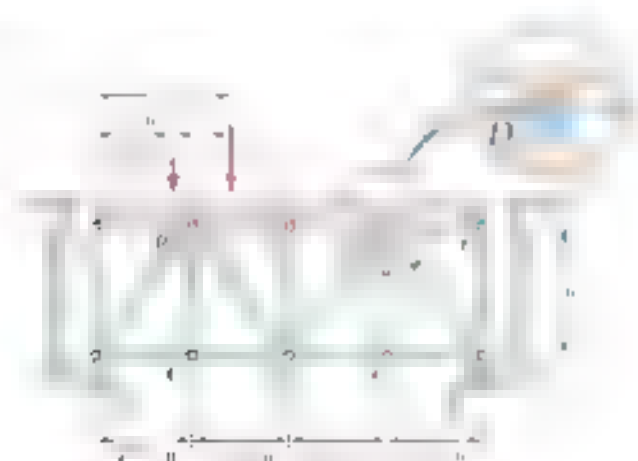


Figura P8.C2

6.63 Para el mecanismo mostrado en la figura, la posición de la barra AB se controla, aplicando a la barra BCD una carga aplicada en su extremo para un ángulo de pivote de A para M necesario para mantener al sistema en equilibrio. ¿cuál es el valor de B para $M = 100$ lb y $\theta = 30^\circ$ cuando $\alpha = 1$ in. El ángulo de inclinación de la barra BCD con respecto a la horizontal puede ser cualquiera de los valores para el ángulo θ para $\alpha = 1$ in. M es máxima y el valor correspondiente de B y θ para el cual la fricción en A es nula y la magnitud correspondiente de esta ecuación.

6 C4 El diseño de un sistema robótico necesita del conocimiento de las fuerzas en sus miembros. Considere el sistema AB en la figura. La barra AB tiene un peso $w = 12$ lb/ft y está sujeta a una fuerza S en el punto C por el efecto de la fricción. Use software para calcular el par M_A necesario para mantener la barra en equilibrio, considerando valores de θ desde 0 hasta 20° con incrementos de 10° . Para los mismos valores de θ , determine la magnitud de la fuerza S ejercida por la barra AC sobre el bloque deslizante.

6.C5 Las tijeras podadoras de palcos compuestas que se muestran en la figura a continuación se han usado a menudo en los campos de golf para cortar la hierba. Se sabe que la longitud AD es de 0.85 m. Encuentre la longitud AB si el ángulo θ mide 30° .



Figure P6.C3

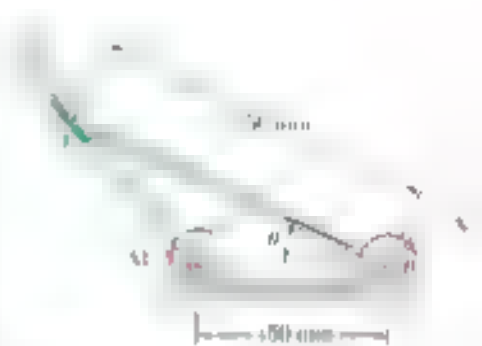


Figure P6.54

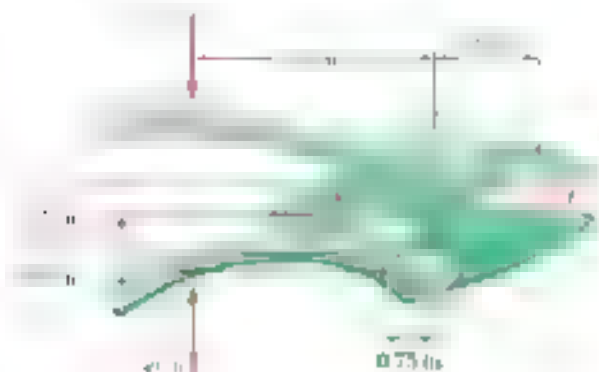


Figure PB.C8

6.C6 La torre CD está unida al collarín D y pasa a través de un collarín esférico en A. La barra BE es horizontal y la barra BC es vertical. Se aplica una fuerza $P = 15$ kN en B, como se muestra. Las barras AB y BC tienen una longitud de 1 m cada una. El collarín en A está en un ángulo de 15° y 90° con incrementos de 5° . Calcule incrementos más pequeños adecuados de los ángulos θ y ϕ para $\delta M = 1$ mm. ¿Cuál es el valor correspondiente de M ?

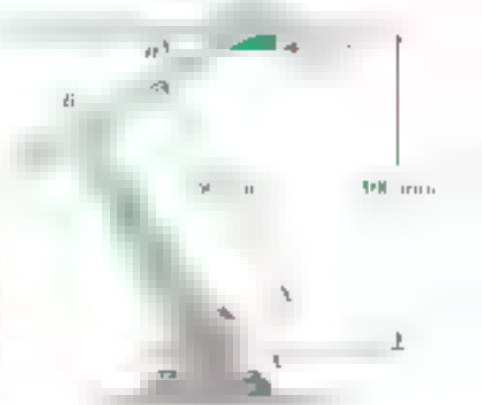


Figure P6.C6

El puente George Washington conecta
Manhattan, Nueva York, con Fort Lee,
Nueva Jersey. Este puente colgante
soporta tráfico en dos niveles sobre
un río que se sostiene mediante un
sistema de vigas. Las estructuras se unen
por cables para conectar entre cables y
completar todo el arco del puente, es decir
para formar las torres. En el mismo arco del
puente se encuentran soportes mediante
los sistemas de cables.



CAPÍTULO

7

Fuerzas en vigas y cables

- 1. Introducción
- 2. Fuerzas internas en elementos
- 3. Diferentes tipos de cargas y apoyos
- 4. Fuerza cortante y momento flector en una viga
- 5. Diagramas de fuerza cortante y de momento flector
- 6. Relaciones entre carga, fuerza cortante y momento flector
- 7. Cables con cargas concentradas
- 8. Cables con cargas distribuidas
- 9. Cable parabólico
- 10. Catenaria



Figura 7.1



Figura 7.2

7.1 INTRODUCCION

En los capítulos anteriores se examinaron los problemas básicos para el análisis de estructuras. El desarrollo de las fuerzas internas que actúan sobre una estructura (capítulo 4) y la determinación de las fuerzas que mantienen unidos a los distintos miembros de una estructura (capítulo 5) se completan en este capítulo. Aquí se examinará el problema de determinar las fuerzas internas que actúan en las diversas partes de un elemento dado.

Primero se analizarán las fuerzas internas en los elementos de un armazón, como la viga, en seguida en los miembros de los cables, considerando que en los cables las fuerzas internas en el momento de la sección de la viga actúan en dos fuerzas solo, produciendo *tracción o tensión* o *compresión*. En los miembros de los cables las fuerzas internas producen *tracción* o *flexión*.

La mayor parte de este capítulo está dedicada a analizar las fuerzas internas en los miembros de las estructuras de ingeniería comunes.

Vigas y los cables estructuralmente son miembros prismáticos rectos y largos diseñados para soportar cargas aplicadas en varios puntos a lo largo del miembro.

Cables son elementos flexibles capaces de soportar solo tracción y están diseñados para soportar cargas concentradas o distribuidas. Los cables se utilizan en muchas aplicaciones de ingeniería, como en puentes colgantes y líneas de transmisión.

7.2 FUERZAS INTERNAS EN ELEMENTOS

Consideremos el elemento recto sujeto a la acción de dos fuerzas. Al elemento se le llama *elemento*. De la sección 4.6, se sabe que las fuerzas F y $-F$ que actúan en los extremos de un elemento de longitud L en sentidos opuestos también tienen una resultante F . Ahora consideremos que se corta el elemento en C . Para mantener el equilibrio, los dos cuerpos libres AC y CB obtenidos de esta manera se les aplican sobre AC una fuerza $-F$ igual y opuesta a F y sobre CB una fuerza F igual y opuesta a $-F$ (Figura 7.1). Estas fuerzas están dirigidas a lo largo de AB y se obtienen representando a una magnitud F . Como las dos partes AC y CB están en equilibrio, se sabe que se cortó el elemento de donde había existido una *tracción* o *compresión* que de tres maneras diferentes se puede representar. Si el elemento está sujeto a la acción de las fuerzas F y $-F$ en los extremos, las fuerzas internas que existen entre sí las dos partes del elemento son *tracción* o *compresión*. La magnitud común F de estas fuerzas no depende de la posición de la sección C a lo largo del elemento, *es decir, en el elemento AB las fuerzas constituyen el elemento de esta tracción y se ejercen bajo la acción de fuerzas internas*. En consecuencia, se puede ver en la figura 7.2, el elemento está en *compresión* y disminuye su longitud bajo la acción de las fuerzas internas.

Ahora consideremos el elemento sujeto a fuerzas múltiples. Tomemos un elemento de elemento AD de la figura 7.3, analizando en la sección C la existencia de una *tracción* o *compresión*. En la figura 7.3 se muestra el diagrama de cuerpo libre del elemento AD . Ahora se corta el elemento AD en C y se dibuja un diagrama de cuerpo libre para cada una de las partes del elemento AD y CD . En la figura 7.4 se



Figura 7.3

considera el cuerpo libre AD , se encuentra que se mantiene en equilibrio si se aplica en f una fuerza F para balancear la componente vertical de T , una fuerza V para balancear la componente horizontal de T y un par M para balancear el momento de T con respecto a f . De esto se concluye que debieron haber existido fuerzas internas en f antes de que se cortara el elemento AD . Las fuerzas internas que actúan en la parte AD del elemento AB son equivalentes al sistema fuerza-par que se muestra en la figura 7.3c. De acuerdo con la tercera ley de Newton, las fuerzas internas que actúan sobre AD de la sección f son un sistema fuerza-par igual y opuesto, como se muestra en la figura 7.3d. Es importante recordar que las fuerzas internas en el elemento AD no se llaman a producir tensión o compresión como en el caso de los elementos rectos sujetos a la acción de dos fuerzas, por otro lado, las fuerzas internas también producen corte y flexión. La fuerza F es una fuerza axial, la fuerza V recibe el nombre de fuerza cortante, el momento M del par se conoce como el momento flector o flexión f . Se debe recordar que cuando se actúan sobre las fuerzas internas en un elemento se debe indicar sobre qué parte del elemento se están poniendo, actúan en las fuerzas F de la figura 7.3e se bosqueja las informaciones por representar el elemento AD . El análisis de estas fuerzas internas es parte del estudio de la mecánica de materiales.

Es necesario señalar que en un elemento sujeto a dos fuerzas que no en recto, las fuerzas internas también son equivalentes a un sistema fuerza-par. Esto se muestra en la figura 7.3f, donde el elemento sujeto a las fuerzas ABC ha sido cortado en D .



Fotografía 7.1 El diseño del eje de una máquina circular debe tomar en cuenta las fuerzas internas que resultan de las fuerzas aplicadas a los dientes de la cuchilla. En un punto dado del eje, estas fuerzas internas son equivalentes a un sistema fuerza-par consistente en fuerzas axiales y cortantes y en un par que representa los momentos de corte y de torsión.



Figura 7.4

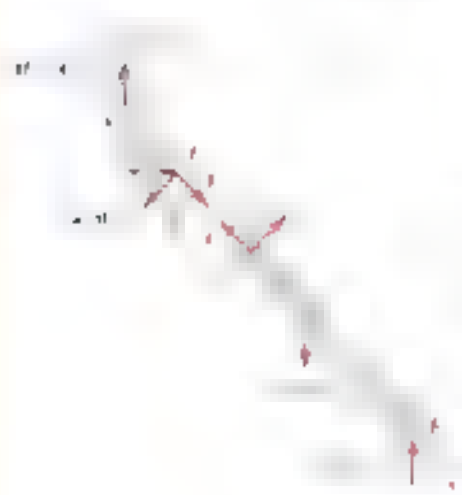


PROBLEMA RESUELTO 7.1

Se tiene el marco mostrado en el **Fig. 7.1** y la carga distribuida q en **Fig. 7.1** actúa sobre el miembro BC y la fuerza P en el punto K en el miembro BD . Este marco está sujeto a una temperatura variable T en el miembro BC .

SOLUCION

El marco está sujeto a las cargas q y P . Se determinan las reacciones y las fuerzas que actúan sobre cada uno de los miembros de la estructura. Se determinan las reacciones y las fuerzas que actúan sobre cada uno de los miembros de la estructura.



El marco está sujeto a las cargas q y P . Se determinan las reacciones y las fuerzas que actúan sobre cada uno de los miembros de la estructura. Se determinan las reacciones y las fuerzas que actúan sobre cada uno de los miembros de la estructura.

$$\begin{aligned}
 +\sum M_B &= 0 & 500 \text{ N} \cdot 1 \text{ m} - M_B &= 0 & M_B &= 500 \text{ N} \cdot \text{m} \\
 +\sum F_x &= 0 & H - 500 \text{ N} \cos 45^\circ &= 0 & H &= 353.5 \text{ N} \\
 +\sum F_y &= 0 & V - 500 \text{ N} \sin 45^\circ - 100 &= 0 & V &= 353.5 \text{ N}
 \end{aligned}$$

Las fuerzas y momentos en B son equivalentes a un par M_B con una fuerza axial H y una fuerza cortante V . Se determinan las fuerzas que actúan sobre cada uno de los miembros de la estructura.

El marco está sujeto a las cargas q y P . Se determinan las reacciones y las fuerzas que actúan sobre cada uno de los miembros de la estructura. Se determinan las reacciones y las fuerzas que actúan sobre cada uno de los miembros de la estructura.



$$\begin{aligned}
 +\sum M_K &= 0 & 200 \text{ N} \cdot 5 \text{ m} - M_K &= 0 & M_K &= 1000 \text{ N} \cdot \text{m} \\
 +\sum F_x &= 0 & H - 200 \text{ N} &= 0 & H &= 200 \text{ N} \\
 +\sum F_y &= 0 & V - 200 \text{ N} &= 0 & V &= 200 \text{ N}
 \end{aligned}$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se aperturó a determinar las fuerzas internas en un elemento del armazón. Las fuerzas internas en un punto dado de un elemento están sujetas a dos fuerzas se reducen a una fuerza sola. Pero, en todos los elementos los dichas fuerzas internas son equivalentes a sistemas fuerza-par existiendo la primera fuerza tal F_{int} que $F_{int} = F_{ext}$ tanto A y en B M_{int} es igual a M_{ext} en el elemento.

Para determinar las fuerzas internas en un punto dado j de un elemento de armazón, se deben seguir los siguientes pasos:

1. **Determinar las fuerzas externas** que actúan en el elemento y si está sujeta para determinar las magnitudes que se aplican en los apoyos.
2. **Determinar el armazón** y la fuerza de reacción en los apoyos. Se deben escribir tantas ecuaciones de equilibrio como sean necesarias para encontrar todas las fuerzas que actúan sobre el elemento en el cual está localizando el punto j .
 - a. **Las fuerzas externas** F_{ext} y M_{ext} que actúan en el elemento. Las fuerzas F_{ext} son las fuerzas externas que se aplican al elemento de estructura aplicando a cada punto j en cada uno de los elementos de estructura y el momento M_{ext} son las fuerzas en los puntos A y B que actúan sobre el elemento. Se debe escribir las ecuaciones de fuerza y pares tener la misma magnitud pero sentidos opuestos.
 - b. **Las fuerzas internas** F_{int} y M_{int} que actúan en el elemento. Se debe escribir las ecuaciones de equilibrio para la suma de momentos del elemento.
 - c. **Las fuerzas internas** F_{int} y M_{int} que actúan en el elemento. Se debe escribir las ecuaciones de equilibrio para la suma de momentos del elemento.
 - d. **Las fuerzas internas** F_{int} y M_{int} que actúan en el elemento. Se debe escribir las ecuaciones de equilibrio para la suma de momentos del elemento.
3. **Las fuerzas internas** F_{int} y M_{int} que actúan en el elemento. Se debe escribir las ecuaciones de equilibrio para la suma de momentos del elemento.
4. **Las fuerzas internas** F_{int} y M_{int} que actúan en el elemento. Se debe escribir las ecuaciones de equilibrio para la suma de momentos del elemento.

Puesto que la solución de los problemas propuestos correspondientes a esta lección requieren la determinación de las fuerzas que ejercen entre sí los distintos elementos de un armazón, se deben repasar los métodos utilizados en el capítulo 6 para resolver este tipo de problemas. Por ejemplo, cuando los armazones involucran poleas simples, se debe recordar que las fuerzas que actúan en la polea son iguales al momento del armazón en el punto de aplicación de la fuerza y la dirección que las fuerzas ejercen por el cable sobre la polea (problema 6-8).

Problemas

7.1 y 7.2 Determine las fuerzas internas (fuerza axial, fuerza cortante y momento flector) en el punto f de la estructura indicada.

7.1 Armazón y carga del problema 6.70

7.2 Armazón y carga del problema 6.40

7.3 Determine las fuerzas internas en el punto f cuando $\alpha = 90^\circ$



Figura P7.3 y P7.4

7.4 Determine las fuerzas internas en el punto f cuando $\alpha = 0^\circ$

7.5 Determine las fuerzas internas en el punto f de la estructura que se muestra en la figura.

7.6 Determine las fuerzas internas en el punto k de la estructura por la que circula un cable.

7.7 Una barra semicircular está cargada como se muestra en la figura. Determine las fuerzas internas en el punto f



Figura P7.5 y P7.6



Figura P7.7 y P7.8

7.8 Una barra semicircular está cargada como se muestra en la figura. Determine las fuerzas internas en el punto k .

7.9 Una cuerda que apunta a un punto A en la pared, como se muestra en la figura, está sujeta a una fuerza de 45 lb. Si se supone que la forma del arco se puede aproximar mediante una parábola, determine las fuerzas internas en el punto J .

7.10 Para el arco del problema 7.9, determine la magnitud y la ubicación de a) la fuerza axial máxima, b) la fuerza cortante máxima y c) el momento flexor máximo.

7.11 Dos elementos, que consisten cada uno de una porción recta y una porción en forma de un cuarto de círculo, soportan una carga de 75 lb como se muestra en la figura. Si se supone que la forma que se muestra en la figura es una parábola, determine las fuerzas internas en el punto J .

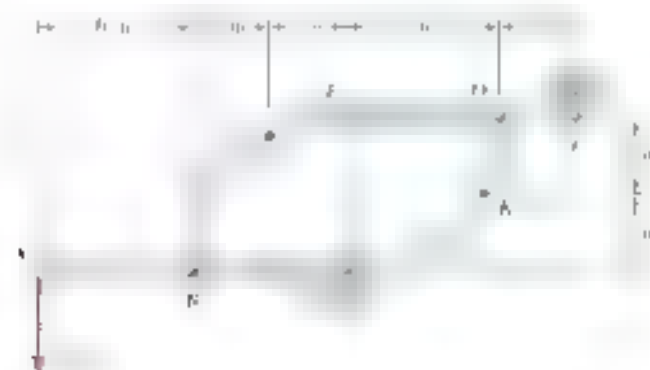


Figura P7.11 y P7.12

7.12 Dos elementos, que consisten cada uno de una porción recta y una porción en forma de un cuarto de círculo, soportan una carga de 75 lb como se muestra en la figura. Si se supone que la forma que se muestra en la figura es una parábola, determine las fuerzas internas en el punto A .

7.13 Una barra semicircular está cargada en la forma que se muestra en la figura. Determine las fuerzas internas en el punto J si se sabe que $P = 90$ lb.



Figura P7.13 y P7.14

7.14 Una barra semicircular está cargada en la forma que se muestra en la figura. Determine la magnitud y la ubicación de los momentos flexores máximos en la barra.

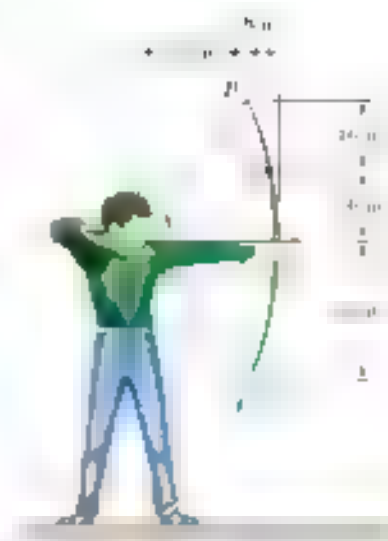


Figura P7.9

7.5 Si se sabe que el cable BC está sujeto a una tensión de 10 kN , que el ángulo $\alpha = 30^\circ$ y no se toma en cuenta el efecto de la fricción, determine las fuerzas internas $a)$ en el punto J , $b)$ en el punto K .



Figura P7.15 y P7.16

7.16 Si se sabe que el radio de cada polea es de 150 mm , que $\alpha = 30^\circ$ y no se toma en cuenta el efecto de la fricción, determine las fuerzas internas $a)$ en el punto J , $b)$ en el punto K .

7.17 Si se sabe que el radio de cada polea es de 200 mm , no tome en cuenta el efecto de la fricción y determine las fuerzas internas en el punto J del armazón que se muestra en la figura.

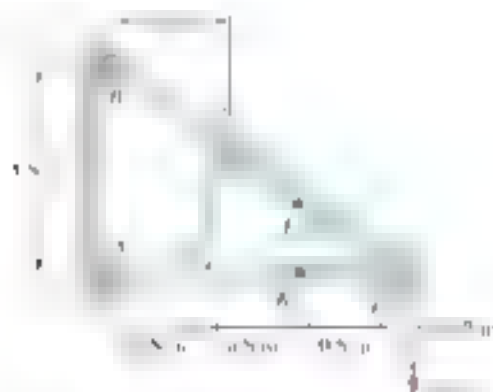


Figura P7.17 y P7.18

7.18 Si sabe que el radio de cada polea es de 200 mm , sin tomar en cuenta el efecto de la fricción, determine las fuerzas internas en el punto J del armazón que se muestra en la figura.

7.19 Una tubería de 5 m de diámetro está sostenida cada 9 ft por un arqueo pequeño, el cual consiste de dos elementos como se muestra en la figura. Si se sabe que el peso distribuido por unidad de longitud de la tubería y su contenido es de 10 lb/ft , y sin tomar en cuenta el efecto de la fricción, determine la magnitud y ubicación del momento flexor máximo en el elemento AB .



Figura P7.19

7.20 Para el armazón del problema 7.19, determine la magnitud y ubicación del momento flexor máximo en el elemento BC .

7.21 y 7.22 Una fuerza P se aplica a una barra horizontal, la cual se sostiene mediante un rodillo y un apoyo fijo. Calcule el momento M en el apoyo A cuando $\theta = 30^\circ$ y $\theta = 60^\circ$. Las dimensiones de las barras son de 1.5 m y 0.75 m .

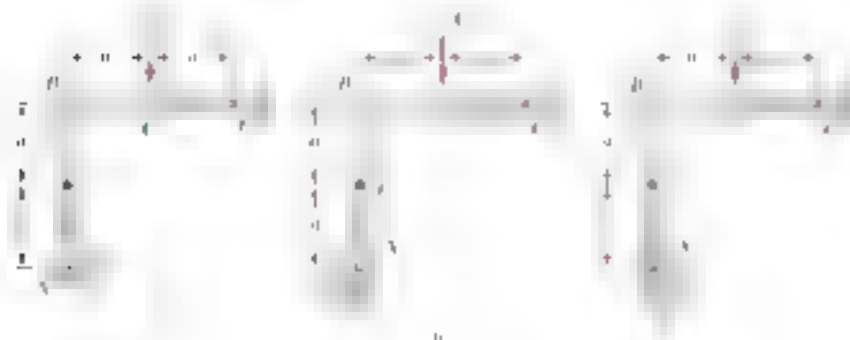


Figura P7.21

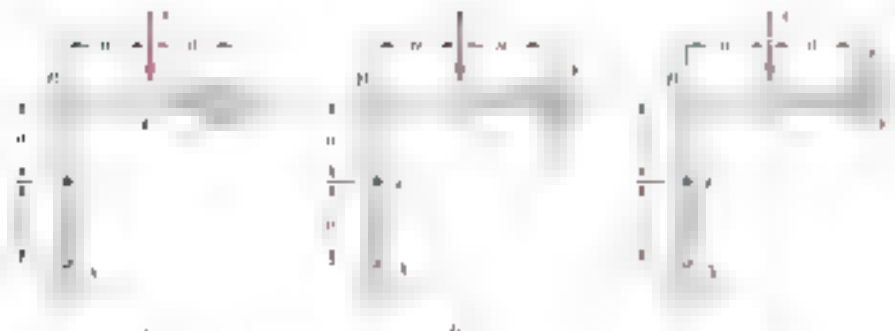


Figura P7.22

7.23 Una barra semicircular de peso W y sección transversal uniforme se sostiene en sus extremos, como se muestra. Determine el momento M en el apoyo A cuando $\theta = 60^\circ$.

7.24 Una barra semicircular de peso W y sección transversal uniforme se sostiene en sus extremos, como se muestra. Determine el momento M en el apoyo A cuando $\theta = 150^\circ$.



Figura P7.23 y P7.24

7.25 y 7.26 Una barra de peso W y sección transversal uniforme está sostenida lateralmente, como se muestra, por un apoyo fijo en A y un rodillo en B . Determine el momento M en el apoyo A cuando $\theta = 30^\circ$ y $\theta = 60^\circ$.



Figura P7.25



Figura P7.26



Figura 7.6

Las fuerzas internas de equilibrio se representan en el diagrama de cuerpo libre de la estructura considerando por una parte las fuerzas internas que actúan sobre cada una de las vigas, así como las reacciones de apoyo, considerando dos componentes de fuerza en la articulación y estando disponibles seis ecuaciones de equilibrio.

7.4. FUERZA CORTANTE Y MOMENTO FLECTOR EN UNA VIGA

Consideremos la viga AB que está soportada en ambos extremos por las articulaciones A y B . Se desea determinar la fuerza cortante y el momento flector en cualquier punto de la viga. Aunque la viga está simplemente apoyada, el método se puede aplicar a cualquier tipo de viga, ya que el método de equilibrio se aplica a cualquier tipo de viga.

Para determinar las fuerzas internas en C , se corta la viga en C y se consideran las partes AC y CB como cuerpos libres. En la figura 7.7 se muestra el diagrama de cuerpo libre de la viga AC y CB de la viga. Con el diagrama de cuerpo libre de la parte AC se puede determinar la fuerza cortante V en C , ya que la suma de las fuerzas horizontales es cero, es decir, $\sum F_H = 0$ y $\sum F_V = 0$ se obtienen, respectivamente, R_H y R_V .

Para determinar las fuerzas internas en C , se corta la viga en C y se dibujan los diagramas de cuerpo libre correspondientes a las partes AC y CB de la viga (figura 7.8e). Con el diagrama de cuerpo libre de la parte AC se puede determinar la fuerza cortante V en C , ya que la suma de las fuerzas horizontales es cero, es decir, $\sum F_H = 0$ y $\sum F_V = 0$ se obtienen, respectivamente, R_H y R_V . En forma similar se puede encontrar el momento flector M en C , ya que la suma de los momentos con respecto a C de todas las fuerzas y momentos que actúan sobre AC es cero, es decir, $\sum M_C = 0$. El momento flector M en C se puede determinar ya que la suma de los momentos con respecto a C de todas las fuerzas y momentos que actúan sobre AC es cero, es decir, $\sum M_C = 0$. El momento flector M en C se puede determinar ya que la suma de los momentos con respecto a C de todas las fuerzas y momentos que actúan sobre AC es cero, es decir, $\sum M_C = 0$.

Las fuerzas y el par que representan las fuerzas internas que actúan sobre CB ahora serán representados con V' y M' en lugar de representados con V y M como se hizo anteriormente, con el fin de evitar confusiones cuando se aplica la convención de signos que se va a presentar más adelante en esta sección.

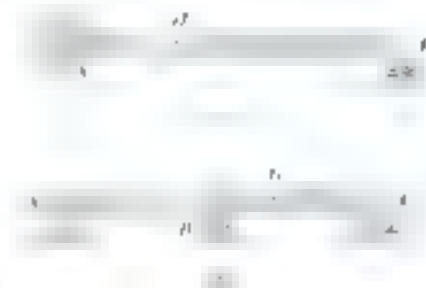


Figura 7.7



Fotografía 7.2 Las fuerzas internas en el puente de la ciudad de Bogotá.

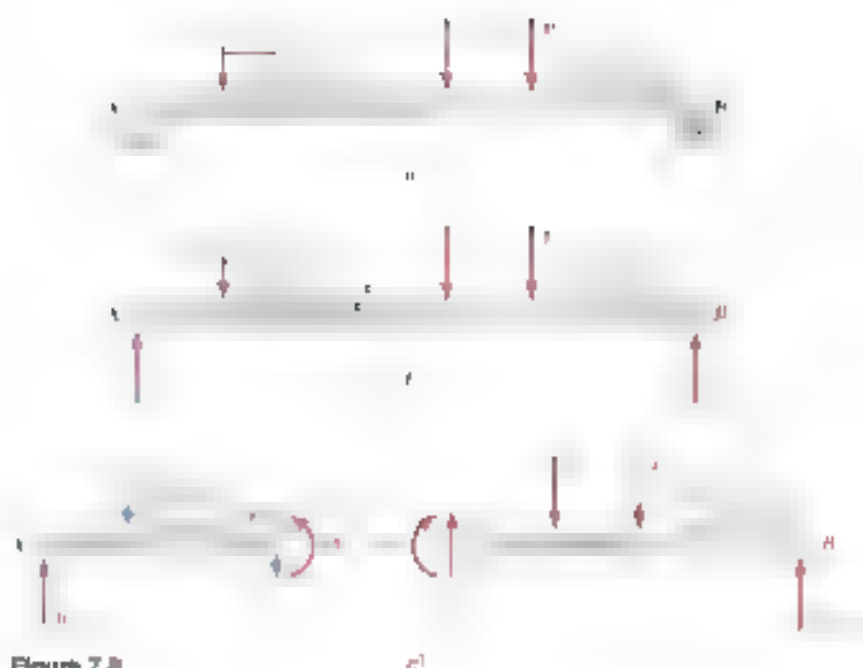


Figura 7.8

y el momento flector hacia que se desplace hacia abajo sobre la parte de la viga que está a la izquierda de la sección C y hacia arriba sobre la parte de la viga que está a la derecha de la sección C . Por tanto, se muestra a continuación y se registran con el signo positivo los valores de la fuerza cortante V y el momento flector M en todos los puntos de la viga se debe considerar los signos como positivos para V y M cuando actúan en la viga de la siguiente manera que se muestra en la figura 7.9a.

Al determinar la fuerza cortante en una viga, siempre se supondrá que las fuerzas cortantes V y M están dirigidas como se muestra en la figura 7.9a. Cuando se obtiene un valor positivo para V o M , se sabe que V o M están dirigidos en la posición recta. En consecuencia, cuando las fuerzas cortantes V o M están dirigidas en la posición recta, V o M están dirigidos en la posición recta. Cuando se obtiene un valor negativo para V o M , se sabe que V o M están dirigidos en la posición invertida. Cuando las fuerzas cortantes V o M están dirigidos en la posición invertida, V o M están dirigidos en la posición invertida. Por tanto, para determinar el signo de las fuerzas cortantes V o M en un punto dado de la viga, se debe considerar V o M como un valor positivo o negativo. Por lo general, se asume que V o M son positivos y se asume que V o M son negativos y se asume que V o M son positivos y se asume que V o M son negativos.

En la figura 7.9a, siempre se supondrá que las fuerzas cortantes V y M están dirigidas como se muestra en la figura 7.9a. Cuando se obtiene un valor positivo para V o M , se sabe que V o M están dirigidos en la posición recta. Cuando se obtiene un valor negativo para V o M , se sabe que V o M están dirigidos en la posición invertida. Cuando las fuerzas cortantes V o M están dirigidos en la posición recta, V o M están dirigidos en la posición recta. Cuando las fuerzas cortantes V o M están dirigidos en la posición invertida, V o M están dirigidos en la posición invertida. Por tanto, para determinar el signo de las fuerzas cortantes V o M en un punto dado de la viga, se debe considerar V o M como un valor positivo o negativo.

Se dice que la fuerza cortante V y que el momento flector M en un punto dado de la viga son positivos cuando las fuerzas cortantes V y el momento flector M actúan sobre cada parte de la viga como se indica en la figura 7.9a.

Estas convenciones son más fáciles de recordar si se observa que:

1. La fuerza cortante en C es positiva cuando las fuerzas externas (las cargas y las reacciones) que actúan sobre la viga tienden a cortar a lo largo en C como se indica en la figura 7.9b.



Figura 7.9a



Figura 7.9b



Figura 7.9c

Figura 7.9

2. El momento flector en C es positivo cuando las fuerzas externas que actúan sobre la viga tienden a flexionarla a la caga, como se indica en la figura 7.4c.

También puede ser útil señalar que la situación descrita en la figura 5-9 en la cual los valores de la fuerza cortante y del momento flexionante son los mismos para ambas de la situación por mostrar a un lector que una vez que se ha determinado que se produce un salto en el momento flexionante en un punto, el momento flexionante es el mismo a ambos lados de este punto. Este ejemplo particular se presenta completo en la siguiente sección.

7.5. DIAGRAMAS DE FUERZA CORTANTE Y DE MOMENTO FLECTOR

Ahora que se ha obtenido la suma de la columna correspondiente a cada elemento de la columna i se repite el proceso para cada una de las columnas restantes. En este caso, se repite el proceso para la columna j (ver figura 1.10). Las sumas por columna se calculan de esta manera recibiendo el nombre de *diagrama de suma por columna* (ver figura 1.11). El diagrama de suma por columna de C como ejemplo, con sus sumas por columna, es mostrado AB por la notación f y que esta se denota como $csd(C, f)$ (ver figura 1.12).

[illegible]

Ahora, si se corta la viga en un punto E localizado entre D y B , y se considera el tiempo t en $t = 0$, se escribe por conservación las sumas de momentos y la suma de las fuerzas en x respecto a E de la figura 7-6b. Los momentos sobre E son iguales a cero. De esta forma se obtiene $V = -P/2$ y $M = P(L - x)/2$. Por tanto, la fuerza cortante es negativa y el momento flexor es positivo. Se obtiene una curva cortante de $-P/2$ y una curva de momento flexor de $P(L - x)/2$. La fuerza cortante es cero en la viga en $x = L$ y el momento flexor es $PL/2$ en $x = L$. La figura 7-6c muestra el diagrama de momento flexor y la figura 7-6d muestra el diagrama de fuerza cortante. La fuerza cortante tiene un valor constante $-P/2$ entre D y B y una curva de momento flexor de $P(L - x)/2$ entre D y B . El momento flexor es cero en $x = 0$ y $x = L$.

Los datos muestran que la percepción de los estudiantes se refiere a la falta de información sobre la historia y el patrimonio de la zona, la falta de actividades culturales y deportivas, la falta de espacios públicos y la falta de servicios básicos. Los datos también muestran que los estudiantes perciben que la zona es insegura y que hay una falta de servicios básicos.

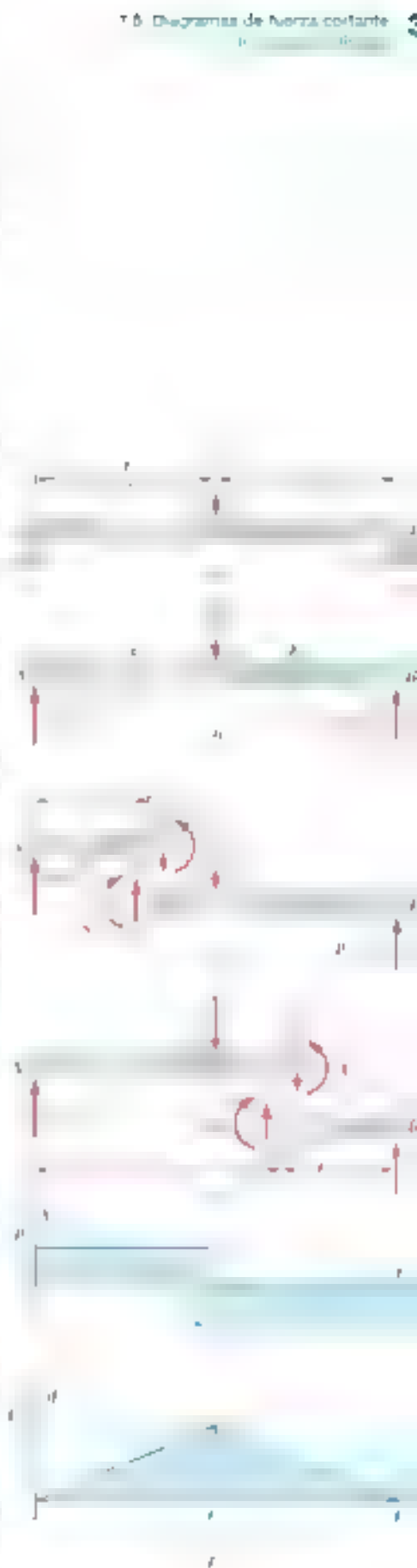
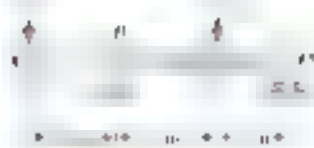


Figure 2-10



PROBLEMA RESUELTO 7.2

Diseñar los diagramas de fuerza cortante y momento flector para la viga con las condiciones de carga que se muestran en la figura.

SOLUCIÓN

1. Viga completa. A partir del diagrama de cuerpo libre para toda la viga se encuentran las reacciones en A y en D:

$$R_A = 40 \text{ kN} \quad R_D = 11 \text{ kN}$$

Fuerza cortante y momento flector. Primero se determinan las fuerzas internas justo a la derecha de la carga de 20 kN aplicada en A. Como solo cambia el estado de la viga en esta carga, primero se considera a como un cuerpo libre y suponiendo que V y M son positivos (de acuerdo con la convención estándar) se escribe:

$$\begin{aligned} \uparrow \sum F_v = 0: \quad 20 \text{ kN} - V = 0 & \quad V = 20 \text{ kN} \\ + \sum M_A = 0: \quad (20 \text{ kN})(0 \text{ m}) + M = 0 & \quad M_1 = 0 \end{aligned}$$

Después, se considera como un cuerpo libre a la porción de la viga ubicada a la izquierda de la sección 2 y se escribe:

$$\begin{aligned} \uparrow \sum F_v = 0: \quad 20 \text{ kN} - V = 0 & \quad V = 20 \text{ kN} \\ + \sum M_2 = 0: \quad (20 \text{ kN})(2.5 \text{ m}) + M_2 = 0 & \quad M_2 = -50 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

De forma similar se debe determinar la fuerza cortante y el momento flector en las secciones 3, 4, 5 y 6 a partir de las fuerzas internas que se han establecido en la figura. Así se obtiene:

$V = +20 \text{ kN}$	$M = -50 \text{ kN} \cdot \text{m}$
$V = -20 \text{ kN}$	$M = +25 \text{ kN} \cdot \text{m}$
$V = -4 \text{ kN}$	$M = -25 \text{ kN} \cdot \text{m}$
$V = 11 \text{ kN}$	$M = 0$

Para las secciones anteriores, los resultados se obtienen más fácilmente si se considera a como un cuerpo libre la porción de la viga a la derecha de la sección de interés y se supone, consistentemente, que la viga que está a la derecha de la sección i , se escribe:

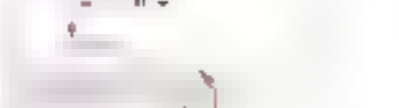
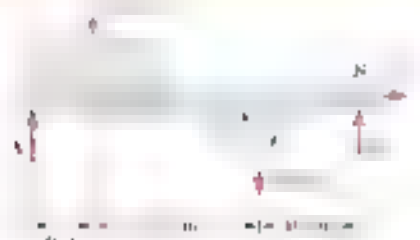
$$\begin{aligned} \uparrow \sum F_v = 0: \quad V - 40 \text{ kN} + 11 \text{ kN} = 0 & \quad V = 29 \text{ kN} \\ + \sum M_i = 0: \quad 0 - 3 \text{ kN}(2 \text{ m}) + M = 0 & \quad M = +25 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

Diagramas de fuerza cortante y de momento flector. Ahora se puede graficar las secciones mostradas en los diagramas de fuerza cortante y de momento flector. Como se señaló en la sección 7.5, la fuerza cortante tiene un valor constante y el momento flector varía linealmente entre cargas concentradas; por tanto, se obtienen los diagramas de fuerza cortante y momento flector que se muestra en el diagrama.



PROBLEMA RESUELTO 7.3

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flector para la viga AB. La carga distribuida de 40 lb/ft. se extiende sobre 12 in. de la viga, desde A hasta C, y la carga de 400 lb se aplica en E.



SOLUCIÓN

Cuerpo libre: viga completa. Se determinan las reacciones reemplazando la viga completa como un cuerpo libre.

$$\begin{aligned}
 +\sum M_A = 0: & \quad B(22 \text{ m}) - (40)(12 \text{ m}) - (400)(18 \text{ m}) = 0 \\
 & \quad B = +165 \text{ lb} \\
 +\sum M_B = 0: & \quad (40)(12 \text{ m})(6 \text{ m}) + (400)(18 \text{ m}) - A(22 \text{ m}) = 0 \\
 & \quad A = +515 \text{ lb} \\
 +\sum F_y = 0: & \quad B = 0
 \end{aligned}$$

Ahora, la carga de 400 lb se reemplaza por un sistema equivalente fuerza par que actúa sobre la viga en el punto D.

Fuerza cortante y momento flector Desde A hasta C. Se determina el cuerpo libre de la viga que está a la izquierda de la sección C. La parte de la carga distribuida que actúa sobre el cuerpo libre se reemplaza por su equivalente.

$$\begin{aligned}
 +\sum M_C = 0: & \quad -515x + 40\left(\frac{x}{2}\right) + M = 0 \\
 & \quad M = 515x - 20x^2
 \end{aligned}$$

También el diagrama de cuerpo libre mostrado puede utilizarse para todas las secciones de la viga entre A y C. Es importante recordar que para $x = 0$, $M = 0$ y para $x = 12$, $M = 0$.

Desde C hasta D. Considerando la parte de la viga que está a la izquierda de la sección D, se obtiene el siguiente resultado para la región $12 \text{ m} < x < 18 \text{ m}$.

$$\begin{aligned}
 +\sum M_D = 0: & \quad -515x + 40(12) + M = 0 \\
 & \quad M = (2400) + 35x \text{ lb}
 \end{aligned}$$

Estas expresiones son válidas en la región $12 \text{ m} < x < 18 \text{ m}$.

Desde D hasta B. Con la porción de la viga que está a la izquierda de la sección B, se obtienen los siguientes resultados para la región $18 \text{ m} < x < 22 \text{ m}$.

$$\begin{aligned}
 +\sum M_B = 0: & \quad -515x + 40(12) - (400)(18) + M = 0 \\
 & \quad M = (16500) - 355x \text{ lb}
 \end{aligned}$$

El diagrama de fuerza cortante y momento flector se muestra en la figura. Nótese que la fuerza cortante cambia de signo en $x = 0$ y $x = 12$. Se observa que la carga distribuida se reemplaza por su equivalente en el diagrama de momento flector.

Para su integración se utilizó el gráfico, respectivamente, V y M contra el tiempo y se usó la regla de Simpson. Se calculó el área bajo la curva en los casos como se muestra a continuación los valores de V y M en unos cuantos puntos:

que [problema resuelto 7.2].

[illegible]

It is important to understand that the purpose of this study is not to determine the effectiveness of the intervention, but to explore the experiences of the participants. The study is exploratory in nature and the results are intended to provide a basis for further research.

Para encontrar la solución de $\mathbf{f}(t)$ en $t = t_0$, basta con reemplazar t por t_0 en la ecuación (1) y se obtiene la solución $\mathbf{f}(t_0)$. En consecuencia, la ecuación (1) puede escribirse como

g) El diagrama de fuerza cortante de un segmento de una barra recta es el que se muestra en la siguiente figura. ¿Cuál es la fuerza cortante en el extremo izquierdo de la barra?

La prima delle due ipotesi è che il carico di lavoro venga distribuito in modo equo tra tutti i componenti del team. In questo caso, il manager deve essere in grado di identificare le risorse e le competenze necessarie per svolgere il lavoro e assegnarle in modo equo. La seconda ipotesi è che il carico di lavoro venga distribuito in modo equo tra tutti i componenti del team. In questo caso, il manager deve essere in grado di identificare le risorse e le competenze necessarie per svolgere il lavoro e assegnarle in modo equo.

El primer paso en el desarrollo de un modelo de simulación es la identificación de los elementos del sistema que se van a modelar. En este caso, el sistema es el proceso de producción de un producto. Los elementos del sistema son los recursos humanos, materiales y financieros que se utilizan en el proceso. El segundo paso es la identificación de los datos que se necesitan para el modelo. Los datos que se necesitan son los datos de entrada, los datos de salida y los datos de control. Los datos de entrada son los datos que se utilizan para iniciar el proceso. Los datos de salida son los datos que se utilizan para medir el rendimiento del proceso. Los datos de control son los datos que se utilizan para controlar el proceso. El tercer paso es la identificación de los algoritmos que se van a utilizar en el modelo. Los algoritmos que se van a utilizar son los algoritmos de simulación de eventos discretos, los algoritmos de simulación de procesos continuos y los algoritmos de simulación de procesos híbridos. El cuarto paso es la implementación del modelo. El modelo se implementa en un lenguaje de programación que permita la simulación de eventos discretos, procesos continuos y procesos híbridos. El quinto paso es la validación del modelo. El modelo se valida comparando los resultados de la simulación con los resultados de la realidad. El sexto paso es la ejecución del modelo. El modelo se ejecuta para obtener los resultados de la simulación. El séptimo paso es el análisis de los resultados. Los resultados de la simulación se analizan para identificar las causas de los problemas y para proponer soluciones. El octavo paso es la documentación del modelo. El modelo se documenta para que pueda ser utilizado por otros investigadores. El noveno paso es la comunicación de los resultados. Los resultados de la simulación se comunican a los interesados en el proceso. El décimo paso es la actualización del modelo. El modelo se actualiza para reflejar los cambios en el proceso.

[illegible]

Problemas

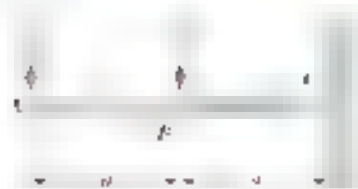


Figura P7.29

7.29 al 7.32 Para la viga y las cargas mostradas en las figuras, a) dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector y b) determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flector.

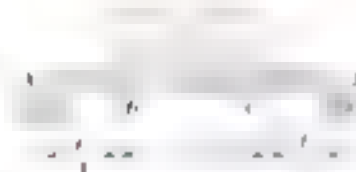


Figura P7.31

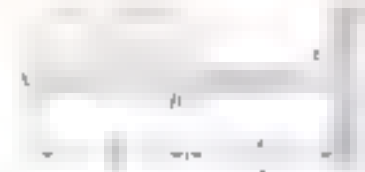


Figura P7.32



Figura P7.30

7.33 y 7.34 Para la viga y las cargas mostradas en las figuras, a) dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector y b) determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flector.

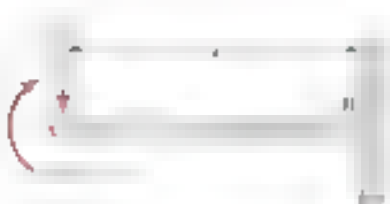


Figura P7.33



Figura P7.34



Figura P7.35

7.35 y 7.36 Para la viga y las cargas mostradas en las figuras, a) dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector y b) determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flector.



Figura P7.36



Figura P7.37



Figura P7.38

7.37 y 7.38 Para la viga y las cargas mostradas en las figuras, a) dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector y b) determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flector.

7.39 a 7.42 Calcule las reacciones y las fuerzas internas máximas en las siguientes vigas. En los problemas 7.39 y 7.40, el peso de la viga puede ser despreciado. En los problemas 7.41 y 7.42, el peso de la viga puede ser despreciado o no, como se indica en el enunciado.



Figura P7.39

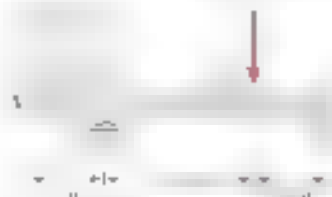


Figura P7.40



Figura P7.41

7.43 Se asume que la reacción del suelo sobre la viga AB que se muestra en la figura está dada por $w(x) = 200x^2$ lb/ft, donde x es la distancia en ft desde el extremo izquierdo de la viga. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flexor. Determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flexor.



Figura P7.43



Figura P7.42

7.44 Retorne el problema 7.43 si $a = 0.5$ m.

7.45 y 7.46 Se la reacción del suelo sobre la viga AB que se muestra en las figuras está dada por la ley $w(x) = kx^2$ lb/ft, donde x es la distancia en ft desde el extremo izquierdo de la viga. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flexor. Determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flexor.



Figura P7.45

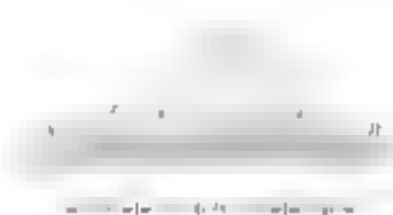


Figura P7.46



Figura P7.47

7.47 Se asume que la reacción del suelo sobre la viga AB que se muestra en la figura está dada por la ley $w(x) = kx^2$ lb/ft, donde x es la distancia en ft desde el extremo izquierdo de la viga. Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flexor. Determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flexor.



Figura P7.49

7.48 Retorne el problema 7.47 si se sabe que $P = 3000$ lb.

7.49 Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flexor para la viga AB y determine la reacción vertical y el momento flexor en la izquierda de C. La potencia es dada en ft.

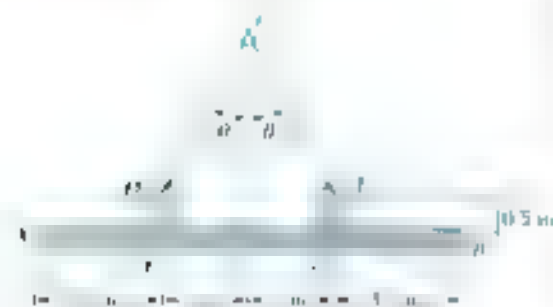


Figura P7.50



Figura P7.52



Figura P7.54



Figura P7.56



Figura P7.58

7.50 Dos secciones perfiles de canal AB y EF se sueldan a la viga horizontal AB en P y Q . Las partes AB y EF están rígidas respecto al plano que se muestra en la figura. Este elemento se eleva mediante dos cables unidos en D y E . Se sabe que $\theta = 30^\circ$ en A . Determine el valor absoluto máximo del momento flector en la viga AB y el valor absoluto máximo de la fuerza cortante en la viga AB .

7.51 Resolva el problema 7.50 para $\theta = 60^\circ$.

7.52 a 7.54 Dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector para la viga AB de los problemas 7.50, 7.52 y 7.54. Indique el valor absoluto máximo de la fuerza cortante y del momento flector.



Figura P7.53

7.55 Para el elemento estructural del problema 7.50, determine *a*) el ángulo θ para el cual el valor absoluto máximo del momento flector en la viga AB es mínimo y *b*) el valor correspondiente de $|M|_{\max}$. (Sugerencia: Dibuje el diagrama de momento flector en la viga AB para valores positivos y negativos que se obtengan en el diagrama.)

7.56 Para la viga del problema 7.43, determine *a*) la distancia a para la cual el valor absoluto máximo del momento flector en la viga es mínimo y *b*) el valor correspondiente de $|M|_{\max}$. (Vea la sugerencia del problema 7.55.)

7.57 Para la viga del problema 7.47, determine *a*) la relación $k = P/Q$ para la cual el valor absoluto máximo del momento flector en la viga es mínimo y *b*) el valor correspondiente de $|M|_{\max}$. (Vea la sugerencia del problema 7.55.)

7.58 Una viga uniforme será elevada mediante los cables de una grúa anclada en A y B . Se sabe que la distancia a desde los extremos de la viga hasta los puntos donde los cables se anclan es 10 m. El valor absoluto máximo del momento flector en la viga es mínimo. (Sugerencia: Dibuje el diagrama de momento flector en la viga AB para valores positivos y negativos de a , lo que le permita igualar los valores absolutos de los momentos flectores máximos de signo positivo y negativo que se hayan obtenido.)

7.59 Para la viga que se muestra en la figura, determine *a*) la magnitud P de las tres fuerzas ascendentes, *b*) el valor absoluto máximo del momento flector en la viga y *c*) el valor correspondiente de $|M|_{\max}$. (Vea la sugerencia del problema 7.55.)

7.60 Si $P = Q = 150$ lb, determine *a*) la distancia a para la cual el valor absoluto máximo del momento flector en la viga AB es mínimo y *b*) el valor correspondiente de $|M|_{\max}$. (Vea la sugerencia del problema 7.55.)



Figura P7.60

7.61 Retorne el problema 7.60, y ahora suponga que $P = 300$ lb y $Q = 150$ lb.

7.62 A fin de reducir el momento flector de la viga en voladizo AB mostrada en la figura, se fija de manera permanente un cable y un contrapeso en el extremo B. Determine la magnitud del contrapeso para la cual el valor absoluto máximo del momento flector en la viga es mínimo, así como el valor correspondiente de $(\delta B)_{\max}$. Considere a) el caso en el que la carga distribuida se aplica por un tiempo sobre la viga y a) el caso más general en el que la carga distribuida puede aplicarse o retirarse.

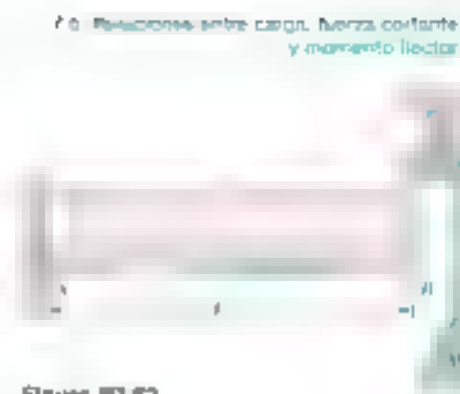


Figura P7.62

7.6. RELACIONES ENTRE CARGA, FUERZA CORTANTE Y MOMENTO FLECTOR

Si una viga sostiene una o dos o tres cargas concentradas, o cuando soporta cargas distribuidas, es muy probable que el método para graficar las fuerzas cortantes y los momentos flectores descrito en la sección 7.5 se vuelva muy complicado. La relación diferencial entre la fuerza cortante y, especialmente, la del diagrama de momento flector se simplificará considerablemente si consideramos cuidadosamente ciertas relaciones que existen entre la carga, la fuerza cortante y el momento flector.

Consideremos una viga simplemente apoyada AB que soporta una carga concentrada P por unidad de longitud (Figura 7.11a) y sean C y C' dos puntos sobre la viga separados por una distancia Δx entre sí. La fuerza cortante y el momento flector en los abacos en C están representados respectivamente por V y M ; los valores se representan en los abacos de la fuerza cortante y el momento flector inmediatamente en C' serán representados mediante $V + \Delta V$ y $M + \Delta M$.

Ahora se considera el trozo de viga CC' y se trata como un cuerpo libre (Figura 7.11b). Las fuerzas ejercidas sobre el cuerpo libre por la carga de magnitud P Δx y las fuerzas y los pares interiores que actúan en C y C' deben ser en equilibrio por la fuerza cortante y el momento flector son positivos; las fuerzas y los pares están dirigidos en la forma indicada por la figura.

Relaciones entre carga y fuerza cortante. Si se trata por la suma de las ecuaciones de equilibrio de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre CC' es igual a cero:

$$V - (V + \Delta V) + P \Delta x = 0 \\ \Delta V = P \Delta x$$

Al dividir ambos lados de la ecuación anterior entre Δx , y haciendo luego que Δx tienda a cero, se obtiene

$$\frac{dV}{dx} = -w$$

La ecuación anterior puede aplicarse para una viga de la forma presentada en la Figura 7.11a; la pendiente dV/dx de la curva de fuerza cortante es negativa; además, el valor numérico de la pendiente en cualquier punto es igual a la carga por unidad de longitud en dicho punto.

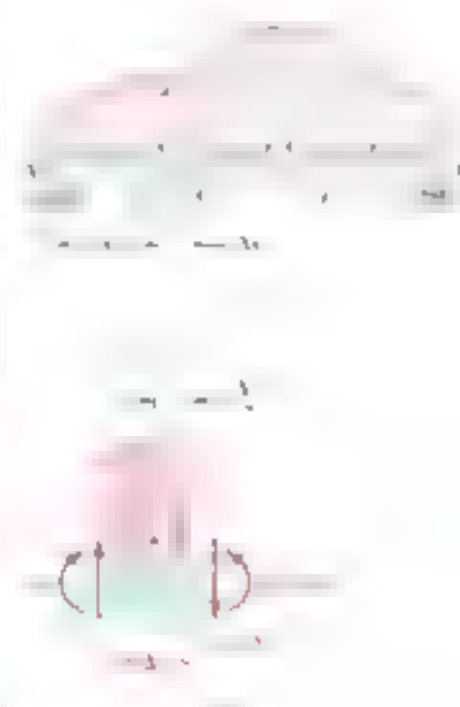


Figura 7.11



PROBLEMA RESUELTO 7.4

Dado el flexograma que se muestra en la figura, determinar la fuerza cortante y el momento flector en las secciones A, B, C, D y E, así como los valores de la figura.

SOLUCIÓN

Cuerpo libre: viga completa. Si se considera a toda la viga como un cuerpo libre, se determinan las reacciones:

$$\begin{aligned}
 +\sum M_A &= 0 & D(26 \text{ ft}) - (20 \text{ kips})(6 \text{ ft}) - (12 \text{ kips})(14 \text{ ft}) - (25 \text{ kips})(26 \text{ ft}) &= 0 \\
 & & D &= 26 \text{ kips} \\
 +\sum F_y &= 0 & A_y - 20 \text{ kips} - 12 \text{ kips} + 26 \text{ kips} - 12 \text{ kips} &= 0 \\
 & & A_y &= +18 \text{ kips} \\
 +\sum F_x &= 0 & A_x &= 0 & & B_x = 0
 \end{aligned}$$

Entonces se debe señalar que entre A y B, como en B el momento flector es igual a cero, por tanto se añaden dos puntos (marcados por medio de ps) que sirven como los puntos de corte de la viga.

Diagrama de fuerza cortante. Como $dV/dx = -w$, se encuentra que la pendiente del diagrama de fuerza cortante es igual a cero (esto es, que la fuerza cortante es constante) entre cargas concentradas y reacciones. La fuerza cortante es constante entre A y B, entre B y C, entre C y D, y entre D y E. En cada caso, considerando una porción de la viga que está a la izquierda de la sección J, se obtiene la fuerza cortante entre B y C.

$$+\sum F_y = 0 \quad 18 \text{ kips} - 20 \text{ kips} - V = 0 \quad V = -2 \text{ kips}$$

Además, se debe señalar que la fuerza cortante es igual a 0 en los puntos B y C, por lo que se añaden dos puntos (marcados por medio de ps) que sirven como los puntos de corte de la viga. En cada caso, considerando una porción de la viga que está a la izquierda de la sección J, se obtiene la fuerza cortante entre D y E.

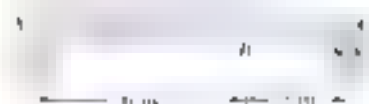
Diagrama de momento flector. Se recuerda que el área bajo la curva de la fuerza cortante entre dos puntos es igual al momento flector entre esos mismos dos puntos. Por conveniencia, se calcula el área de cada porción del diagrama de fuerza cortante y se indica el valor obtenido como momento flector. Como se sabe que el momento flector en A y en E, siendo la viga libre, es igual a cero, se escribe:

$$\begin{aligned}
 M_B - M_A &= +108 & M_D - M_C &= +45 \text{ kips} \cdot \text{ft} \\
 M_C - M_B &= -45 & M_E - M_D &= 0 \\
 M_D - M_C &= 0 & M &= 0 \text{ kips} \cdot \text{ft} \\
 M_E - M_D &= +45 & M &= 0
 \end{aligned}$$

Como se sabe que M_E es igual a cero, se obtiene una comprobación de los cálculos anteriores.

Entre las cargas concentradas y reacciones la fuerza cortante es constante, por lo que en cada caso dM/dx es constante, se obtiene el diagrama de momento flector conectando los puntos consecutivos con líneas rectas. Entre D y E, donde el diagrama de fuerza cortante es una línea recta oblicua, el diagrama de momento flector es una parábola.

A partir de los diagramas para V y M se observa que $V_{\max} = 18 \text{ kips}$ y $M_{\max} = 108 \text{ kips} \cdot \text{ft}$.



PROBLEMA RESUELTO 7.5

Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flector para la viga y la suma de los valores de la fuerza cortante y el momento flector máximos.

SOLUCIÓN

Cuerpo libre: viga completa. Si se considera toda la viga como un cuerpo libre, se obtiene las reacciones:

$$R_A = 80 \text{ kN} \uparrow \quad R_C = 60 \text{ kN} \uparrow$$

Diagrama de fuerza cortante. La fuerza cortante justo a la derecha del punto A es $V_A = 80 \text{ kN}$ y como la carga es uniforme, la fuerza cortante en los puntos es igual al área bajo la curva de carga entre los puntos. Los puntos se obtienen de la ecuación:

$$V_D = V_A - 20 \text{ kN/m} \times 6 \text{ m} = -40 \text{ kN}$$

$$V_B = -40 + V_C = -40 + 60 = +20 \text{ kN}$$

Cuando la pendiente de $V = 0$, es constante entre A y B, la gráfica de fuerza cortante entre estos dos puntos está representado por una línea recta. Entre B y C el área bajo la curva de carga es igual a cero, por tanto,

$$V_C = V_B = 0 \quad V_D = V_B = -40 \text{ kN}$$

y la fuerza cortante es constante entre B y C.

Diagrama de momento flector. Se observa que el momento flector en cada uno de los extremos de la viga es igual a cero. Para determinar el máximo momento flector se tiene que localizar la ubicación de la sección de la viga donde $V = 0$. Así se escribe:

$$V_D = V_A = -40$$

$$C = 80 \text{ kN} = -20 \text{ kN/m} \times x$$

Resolviendo para:

El máximo momento flector ocurre en el punto D donde se tiene que $dM/dx = V = 0$. Se calculan las áreas de las distintas porciones del diagrama de fuerza cortante, se miden en los ejes verticales, se multiplican por el ancho de la viga y como el momento flector se genera en los dos puntos de la viga, se evalúa el momento flector en los puntos. Así se escribe:

$$M_D = M_A = +160 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad M_C = +160 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

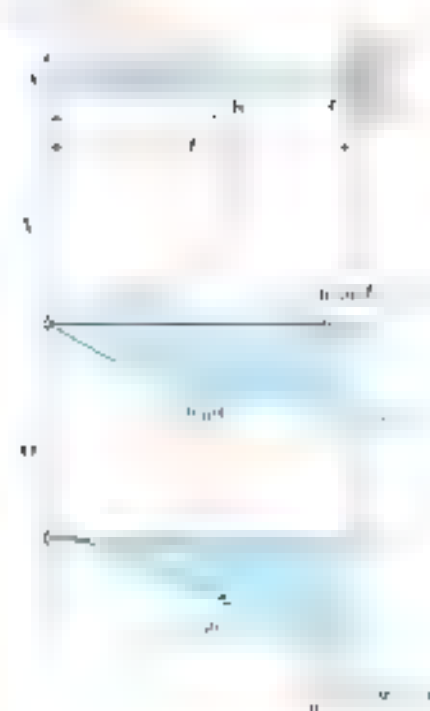
$$M_B = M_D = -40 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad M_B = -40 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_F = M_B = -120 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad M = 0$$

El diagrama de momento flector en la viga es una parábola, se quiere por un segmento de línea recta, la pendiente de la parábola en A es igual al valor de V en dicho punto.

El máximo momento flector es igual a:

$$M_{\text{máx}} = M_D = +160 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



PROBLEMA RESUELTO 7.6

Elabore los diagramas de fuerza cortante y de momento flector para la viga mostrada y póngalos en escala adecuada.

SOLUCIÓN

Fuerza cortante: Se considera por secciones una línea de viga $V_A = 0$. Por otra parte, entre A y B, el área bajo la curva de carga es igual a $w_0 a$. Con la información anterior se determina el valor de V_B y se obtiene:

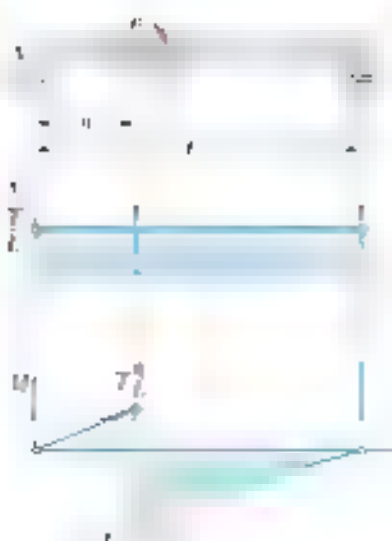
$$V_B = V_A - w_0 a = V_B = -w_0 a$$

Entre B y C, la viga no soporta ninguna carga externa; por tanto $V_C = V_B$. En A, se tiene que $w = w_0$, y de acuerdo con la ecuación (7.1), la pendiente de la curva de fuerza cortante está dada por $dV/dx = -w_0$, mientras que en B la pendiente es $dV/dx = 0$. Entre A y B, la curva de fuerza cortante y el diagrama de fuerza cortante es parabólico. Entre B y C, $w = 0$ y el diagrama de fuerza cortante es una línea horizontal.

Diagrama de momento flector: Se observa que en el extremo libre de la viga $M_A = 0$. Se calcula el área bajo la curva de fuerza cortante y se escribe:

$$\begin{aligned} M_B &= M_A - w_0 a^2 = M_B = -w_0 a^2 \\ M_C &= M_B + (-w_0 a)a \\ M_C &= -w_0 a^2 \end{aligned}$$

El bosquejo del diagrama de momento flector se completa recordando que $dM/dx = V$. Se muestra un valor de M en el centro de la viga, representado por una línea horizontal perpendicular a la línea de acción de la carga, expresado como una línea recta.



PROBLEMA RESUELTO 7.7

Solucione la viga sencilla apoyada AC actuando un par de magnitud T que se aplica en el punto B. Elabore los diagramas de fuerza cortante y momento flector para la viga.

SOLUCIÓN

Fuerza cortante: Se toma toda la viga como un cuerpo libre y se obtiene:

$$R_A = \frac{T}{L} \uparrow \quad R_C = \frac{T}{L} \downarrow$$

Momento flector: Se considera por secciones una línea de viga en cualquier sección sea por la ecuación $dM/dx = V$. En el punto A, se tiene que $M_A = 0$ y el diagrama de momento flector es una línea recta; así el momento flector decrece bruscamente en una cantidad igual a T .

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta sección se comienza a utilizar las relaciones que existen entre la carga, la fuerza cortante y el momento flector, y se proponen algunos problemas que requieren la granja de fuerza cortante y momento flector. Estas relaciones son:

$$\frac{dV}{dx} = -w \quad (7.1)$$

$$\frac{dM}{dx} = V \quad (7.2)$$

$$V_D - V_C = -(\text{área bajo la curva de carga entre C y D}) \quad (7.3)$$

$$M_D - M_C = \text{área bajo la curva de fuerza cortante entre C y D} \quad (7.4)$$

Teniendo en cuenta las relaciones anteriores, se puede utilizar el siguiente procedimiento para dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flector para una viga:

1. Se empieza por el extremo izquierdo de la viga y se utiliza para determinar las reacciones en sus apoyos.

2. Se empieza por el extremo izquierdo de la viga, que es la sección donde existe un corte libre a la izquierda de la viga en varios puntos, considerando el diagrama de fuerza cortante y momento flector en las partes de la viga, que se dibujan de exterior hacia el interior de la viga. Sin embargo, se puede considerar uno de los siguientes procedimientos alternativos.

3. Se empieza por el extremo izquierdo de la viga, que es la sección donde existe un corte libre a la izquierda de la viga en varios puntos, considerando el diagrama de fuerza cortante y momento flector en las partes de la viga, que se dibujan de exterior hacia el interior de la viga. Sin embargo, se puede considerar uno de los siguientes procedimientos alternativos.

4. Para una viga que soporte una carga distribuida, se puede comenzar a partir de un extremo donde se conoce el valor de V y utilizar convenientemente la ecuación (7.2) para encontrar el valor de M en todos los puntos puntuales.

5. Se empieza por el extremo izquierdo de la viga y se utiliza el siguiente procedimiento:

6. Se empieza por el extremo izquierdo de la viga y se utiliza el siguiente procedimiento: Se empieza por el extremo izquierdo de la viga y se utiliza el siguiente procedimiento: Se empieza por el extremo izquierdo de la viga y se utiliza el siguiente procedimiento:

7. Se empieza por el extremo izquierdo de la viga y se utiliza el siguiente procedimiento: Se empieza por el extremo izquierdo de la viga y se utiliza el siguiente procedimiento: Se empieza por el extremo izquierdo de la viga y se utiliza el siguiente procedimiento:

8. Se empieza por el extremo izquierdo de la viga y se utiliza el siguiente procedimiento: Se empieza por el extremo izquierdo de la viga y se utiliza el siguiente procedimiento: Se empieza por el extremo izquierdo de la viga y se utiliza el siguiente procedimiento:

Infinita

Problemas

7.63 Use el método de la sección 7.6 para resolver el problema 7.29

7.64 Use el método de la sección 7.6 para resolver el problema 7.30

7.65 Use el método de la sección 7.6 para resolver el problema 7.31

7.66 Use el método de la sección 7.6 para resolver el problema 7.32

7.67 Use el método de la sección 7.6 para resolver el problema 7.33

7.68 Use el método de la sección 7.6 para resolver el problema 7.34

7.69 y 7.70 Para la viga y las cargas mostradas en las figuras, a) dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector y b) determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flector

7.71 Use el método de la sección 7.6 para resolver el problema 7.30

7.72 Use el método de la sección 7.6 para resolver el problema 7.40

7.73 Use el método de la sección 7.6 para resolver el problema 7.41

7.74 Use el método de la sección 7.6 para resolver el problema 7.42

7.75 y 7.76 Para la viga y las cargas mostradas en las figuras, a) dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector y b) determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flector



Figura P7.75

7.77 y 7.78 Para la viga y las cargas que se muestran en las figuras, a) dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector y b) determine la magnitud y la ubicación del momento flector máximo

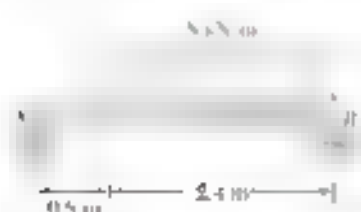


Figura P7.77

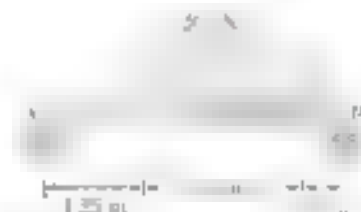


Figura P7.78

7.79 y 7.80 Para la viga y las cargas que se muestran en las figuras, a) dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector y b) determine la magnitud y la ubicación del momento flector máximo

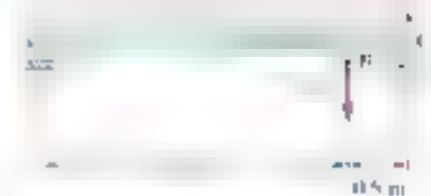


Figura P7.81



Figura P7.70



Figura P7.76

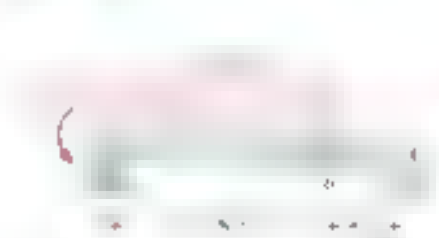


Figura P7.79

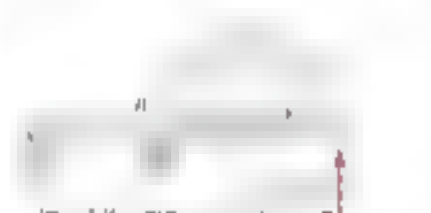


Figura P7.80



Figura P7.81

7.81 a) Dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flector para la viga AB de la figura. b) Determine la fuerza cortante y el momento flector máximos del momento flector.

7.82 Retorne el problema 7.81 y ahora suponga que la fuerza de 300 N aplicada en D se dirige hacia arriba.

7.83 Para la viga y las cargas mostradas en la figura, a) dibuje las curvas de fuerza cortante y momento flector y b) determine la magnitud y la ubicación del momento flector máximo.

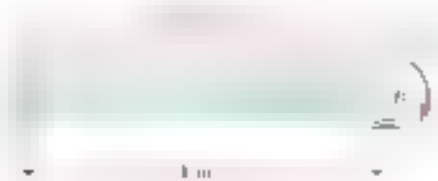


Figura P7.83

7.84 Retorne el problema 7.83 y ahora suponga que el par de 30 kN·m se aplica en B en contra del movimiento de las manecillas del reloj.

7.85 y 7.86 Para la viga y las cargas mostradas en las figuras, a) escriba las ecuaciones de las curvas de fuerza cortante y momento flector y b) determine la magnitud y la ubicación del momento flector máximo.

7.87 Para la viga y las cargas mostradas en la figura, a) escriba las ecuaciones de las curvas de fuerza cortante y momento flector y b) determine la magnitud y la ubicación del momento flector máximo.

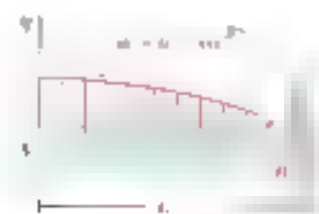


Figura P7.87

7.88 La viga AB descansa sobre el suelo y soporta la carga parabólica que se muestra en la figura. Si se supone que las reacciones del suelo son fuerzas verticales, a) dibuje las curvas de fuerza cortante y momento flector y b) determine el momento flector máximo.

7.89 La viga AB se somete a una carga uniformemente distribuida y a las fuerzas horizontales P y Q que se muestran en la figura. Si el valor del momento flector en D es de $+800 \text{ N} \cdot \text{m}$ y en E es de $+1200 \text{ N} \cdot \text{m}$, a) determine P y Q y b) dibuje los diagramas de fuerza cortante y momento flector para la viga.

7.90 Retorne el problema 7.89 y ahora suponga que el valor calculado del momento flector en D es de $+650 \text{ N} \cdot \text{m}$ y de $+1450 \text{ N} \cdot \text{m}$ en E .



Figura P7.85



Figura P7.86



Figura P7.88



Figura P7.89

***7.91** La viga AB se somete a la carga uniformemente distribuida que se muestra en la figura y a dos fuerzas desconocidas P y Q . Si se sabe que el cambio incremental del valor del momento flector es de $+6.10 \text{ kip} \cdot \text{ft}$ en D y de $+5.30 \text{ kip} \cdot \text{ft}$ en E , determine P y Q y b) dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector para la viga.

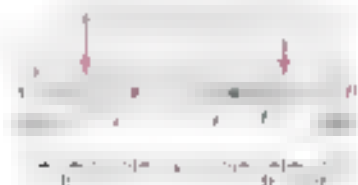


Figura P7.91

***7.92** Retome el problema 7.91 y ahora suponga que el valor calculado del momento flector en D es de $+5.96 \text{ kip} \cdot \text{ft}$ y de $+6.84 \text{ kip} \cdot \text{ft}$ en E .

CABLES

*7.7 CABLES CON CARGAS CONCENTRADAS

Los cables se utilizan en muchas aplicaciones y se clasifican en tres categorías: los cables ligeros, los cables de transmisión y los cables de alta tensión. Los cables de alta tensión pueden soportar las categorías de apoyo, los cables de apoyo, los cables de transmisión y los cables de suspensión. Los cables de suspensión se utilizan solo los cables de la primera categoría.

Considere un cable unido a dos puntos fijos A y B que soporta n cargas concentradas verticales P_1, P_2, \dots, P_n (Figura 7.13). Se supone que el cable es flexible, esto es, que su resistencia a la flexión es despreciable y se puede despreciar. Además, también se supone que el peso del cable es insignificante en comparación con las cargas que soporta. Por tanto, cualquier porción del cable entre dos cargas consecutivas se puede considerar como un elemento sujeto a las fuerzas perpendiculares a las fuerzas de tracción dirigidas a lo largo del cable.

Se supone que cada una de las cargas se encuentra en una línea vertical dada, esto es, que la distancia horizontal desde el apoyo A hasta la carga es conocida. Además, también se supone que la distancia horizontal y vertical entre los apoyos A y B es conocida. La distancia horizontal desde el apoyo A hasta cada una de las cargas es x_1, x_2, \dots, x_n y también se desea encontrar la tensión T en cada uno de los segmentos del cable.

El cable se considera un elemento flexible que puede soportar toda la carga. Como la pendiente de las porciones de cable cambia en A y B no se conoce, cada una de las reacciones en A y B deben representarse con los componentes. Por tanto, están involucradas cuatro incógnitas. Las tres ecuaciones de equilibrio que se pueden disponer no son suficientes para determinar las reacciones en A y B . En esta situación se debe introducir una ecuación adicional al considerar el equilibrio de una porción de cable. Lo anterior es posible si se conocen las coordenadas x y y en el punto D del cable. Cuando el cable está en



Fotografía 7.3 Como el peso del cable del transporte para esquiadores que se muestra en la foto es despreciable comparado con el peso de las torres y los esquifistas, los métodos de esta sección pueden usarse para determinar la fuerza en cualquier punto del cable.

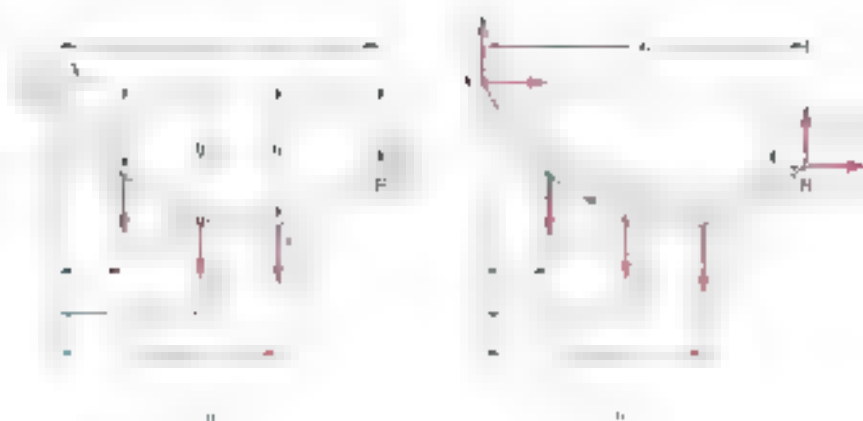


Figura 7.13

Es obvio que el cable no es un cuerpo rígido, por tanto, las ecuaciones de equilibrio

están involucradas.

www.geocienciasvirtuales.blogspot.com.co

**Figura 7.14****Figura 7.13 (repátese)**

que sobre la sección en AD de cable (figura 7.13) y es idéntico a ΣM_A . Así se obtiene una relación entre los componentes A_x y A_y y se pueden determinar las reacciones en A y B . Sin embargo, como una única ecuación no es suficiente para determinar la forma exacta de D , se utiliza que se proporcione otra relación entre A_x y A_y (o entre B_x y B_y). Como se indica por medio de las fuerzas de reacción en A y B , H es una constante por lo que algunas formas posibles.

Una vez que se han determinado A_x y A_y se puede encontrar fácilmente la distancia vertical desde A hasta cualquier punto del cable. En cualquier punto de la curva C se cumple el equilibrio de momentos de la porción AC de cable (figura 7.14). Así se escribe $\Sigma M = 0$ se obtiene una ecuación que se puede resolver para y . Al ser $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$ se obtienen las componentes de la fuerza T que representa la tensión en cualquier punto del cable que está a la derecha de C . Se observa que $T \cos \theta = -A_x$, por tanto, la componente horizontal de la fuerza de tensión siempre es la misma en cualquier punto del cable. Se concluye que la tensión T es variable cuando θ es variable, es decir, la porción de cable que tiene mayor ángulo de inclinación. Obsérvese que la porción del cable debe ser adyacente al uno de los apoyos del cable.

7.8. CABLES CON CARGAS DISTRIBUIDAS

Considere un cable que está entre los puntos fijos A y B , que soporta una carga distribuida (figura 7.15). En la sección anterior se vio que para un cable que soporta cargas puntuales la fuerza interna en cualquier punto es una fuerza de tensión horizontal a lo largo del cable. En el caso de un cable que soporta una carga distribuida, se puede demostrar que la fuerza interna en cualquier punto D es una fuerza de tensión T dirigida a lo largo de la tangente de la curva. En cualquier sección que tome a la izquierda la tensión en cualquier punto de la curva es igual a la carga distribuida w por la sección y sus reacciones. Se determinará la forma que adopta el cable para las diversas formas de cargas distribuidas.

Considerando el caso más general de carga distribuida se define el elemento de cuerpo libre de la porción de cable que se extiende desde el punto A hasta el punto D del cable (figura 7.15).



Figura 7.15

Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre son la fuerza de tensión T_A en C, la cual es horizontal, la fuerza de tensión T en D, la cual está dirigida a lo largo de la longitud del cable, $T \cos \theta$ y $T \sin \theta$, y W la fuerza de carga soportada por la reacción T_A en el cable. Si se elige una gran longitud de cable correspondiente a figura 7.15, se obtienen las siguientes relaciones:

$$T \cos \theta = T_A \quad T \sin \theta = W \quad (7.5)$$

$$T = \sqrt{T_A^2 + W^2} \quad \tan \theta = \frac{W}{T_A} \quad (7.6)$$

A partir de las ecuaciones 7.5, es evidente que la componente horizontal de la fuerza de tensión T es una constante en cualquier punto a lo largo de la componente vertical de T y que a la magnitud W de la carga soportada por el punto más bajo. Las ecuaciones 7.6 muestran que la tensión T es una constante máxima en cualquier punto de los dos puntos de apoyo.

7.8. CABLE PARABÓLICO

Ahora supóngase que el cable AB soporta una carga distribuida que no varía uniformemente a lo largo de la horizontal, figura 7.16. Se puede suponer que los cables de los puentes colgantes están cargados de esta forma puesto que el peso del cable es pequeño en comparación con el peso de la carga que se soporta por unidad de longitud horizontal en forma horizontal. Se representa con w y se expresa en N/m o lb/ft. Se elige una longitud x con un cable con sus extremos en C y D, figura 7.16. Se elige un punto en el cable que se extiende desde C hasta el punto D en las coordenadas x y y está en la superficie. De esta forma las ecuaciones 7.6 pueden determinar la magnitud y la dirección de la fuerza T_A en C y la fuerza T_D en D.

$$T = \sqrt{T_A^2 + w^2 x^2} \quad \tan \theta = \frac{wx}{T_A} \quad (7.7)$$

Además, la distancia desde D hasta la línea de acción de la resultante W es igual a la mitad de la distancia horizontal que hay entre C hasta D, figura 7.16a. Si se elige los puntos con x y y se obtiene:

$$+\sum M_D = 0: \quad wx \frac{x}{2} - T_D y = 0$$



Figura 7.16



PROBLEMA RESUELTO 7.8

El cable ABCD soporta las cargas mostradas en los puntos indicados. Se desea determinar la tensión en el cable justo antes y justo después de la carga de 12 kips en el punto C. Los puntos B y D son los puntos de máxima deflexión máxima de este cable.

SOLUCIÓN

Reacciones en los apoyos. Las componentes de reacción A_x y A_y en el apoyo en A son iguales a cero.

Cuerpo libre: toda el cable

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0$$

$$A_y(20 \text{ ft}) - A_D(60 \text{ ft}) + (6 \text{ kips})(10 \text{ ft}) + (12 \text{ kips})(30 \text{ ft}) + (4 \text{ kips})(15 \text{ ft}) = 0$$

$$20A_y - 60A_D + 600 = 0 \quad (1)$$

Cuerpo libre: ABC

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0: -A_y(5 \text{ ft}) - A_D(30 \text{ ft}) + (6 \text{ kips})(10 \text{ ft}) = 0$$

$$-5A_y - 30A_D + 60 = 0 \quad (2)$$

Si se resuelven en forma simultánea las dos ecuaciones, se obtiene:

$$A_y = 15 \text{ kips} \quad A_D = 5 \text{ kips}$$

$$A_y = +5 \text{ kips} \quad A_D = 5 \text{ kips} \uparrow$$

ii) Elevación de los puntos B y D

Cuerpo libre: AB. Considerando la porción AB del cable como un cuerpo libre, se escribe:

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0: (15 \text{ kips})y_B - (5 \text{ kips})(20 \text{ ft}) = 0$$

$$y_B = 5 \text{ ft} \quad \text{por 15 kips de } A_y$$

Cuerpo libre: ABCD. Con el uso de la porción ABCD del cable como un cuerpo libre, se escribe:

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = 0$$

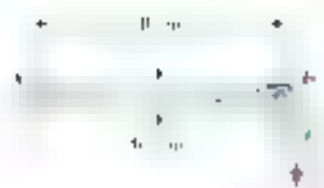
$$15kN - (15 \text{ kips})y_D - (5 \text{ kips})(45 \text{ ft}) + (6 \text{ kips})(25 \text{ ft}) + (12 \text{ kips})(15 \text{ ft}) = 0$$

$$y_D = 5 \text{ ft} \quad \text{por 15 kips de } A_y$$

Se observa que la pendiente es la misma en los puntos B y D. Como la componente horizontal total de la tensión es constante e igual a 15 kilonewtons, se escribe:

$$\tan \theta = \frac{14.17}{15 \text{ ft}} \quad \theta = 43.4^\circ$$

$$T_{\text{max}} = \frac{15 \text{ kips}}{\cos \theta} \quad T_{\text{max}} = 24.8 \text{ kips}$$



PROBLEMA RESUELTO 7.9

Un cable ligero está sujeto en ambos extremos en A, para sobre una polea perpendicular en B a soporte en C. Se sabe que el cable es un hilo elástico con $E = 10^6$ N/m² que la masa por unidad de longitud del cable es de 0.75 kg/m . Se desea conocer la longitud de la parte AB cuando el cable está en equilibrio. Además se ignora el peso del tramo del cable que va desde B hasta D.

SOLUCION

a) Carga P. Se representa con C al punto más bajo del cable y se define la carga P como la carga por unidad de longitud del cable. Se representa en la carga P una distribución de carga a lo largo de la horizontal, se escribe:

$$P = (0.75 \text{ kg/m})(9.81 \text{ m/s}^2) = 7.36 \text{ N/m}$$

La carga total para el tramo CB del cable está dada por

$$W = w_{CB} = (7.36 \text{ N/m})(20 \text{ m}) = 147.2 \text{ N}$$

Se aplica la ley de equilibrio entre C y B. Sumando momentos con respecto a B se escribe:

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0; \quad (147.2 \text{ N})(0.5 \text{ m}) - T_C(0.5 \text{ m}) = 0 \quad T_C = 147.2 \text{ N}$$

A partir del triángulo de fuerzas se obtiene:

$$T_B = \sqrt{T_C^2 + W^2} \\ T_B = 171.1 \text{ N} \quad T_C = 147.2 \text{ N}$$

Como la tensión en ambos lados de la polea es la misma, se encuentra que



b) Pendiente del cable en B. Además a partir del triángulo de fuerzas se obtiene que

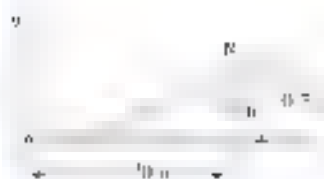
$$\tan \theta = \frac{W}{T_C} = \frac{147.2 \text{ N}}{147.2 \text{ N}} = 1.0$$

c) Longitud del cable. Aplicando la ecuación (7.10) entre C y B, se escribe:

$$\left(\frac{20 \text{ m}}{2} \right) \left(1 + \frac{2}{3} \left(\frac{0.5 \text{ m}}{20 \text{ m}} \right) + \dots \right) = 20.00533 \text{ m}$$

La longitud del cable entre A y B es el doble de este valor,

$$L_{\text{cable}} = 2s_0 = 40.0107 \text{ m}$$



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En los problemas de apoyos y cables correspondientes, esta sección se trata de explicar cómo las ecuaciones de equilibrio de cables que se encuentran en un plano actúan. Se supone que el cable no pesa ni resiste la flexión. Por tanto, la fuerza de tensión en el cable siempre está dirigida a lo largo del mismo.

A lo largo de esta sección de este capítulo, se muestran algunos ejemplos de problemas de cables. Como se verá, la fuerza de tensión y el peso del cable están perpendiculares entre las cargas.

La solución de un problema constará de los siguientes pasos:

1. Después de leer el problema, se debe identificar los datos y las incógnitas. Se debe identificar las cargas y las condiciones horizontal y vertical de las reacciones en los apoyos de los apoyos. Se debe escribir las ecuaciones de equilibrio correspondientes.

2. Se debe identificar las reacciones. Deben ser tomadas las ecuaciones de equilibrio de las reacciones y se debe escribir las ecuaciones de equilibrio.

3. Por tanto, se debe encontrar la información adicional que se requiere para resolver el problema sobre el cable o la posición del cable en un punto dado.

Después de que se ha leído el problema, el punto del cable donde existe información adicional se debe identificar en dicho punto y se dibuja el diagrama de cuerpo libre correspondiente a una de las dos secciones del cable que se han obtenido de esta manera:

4. Se debe identificar la sección de punto de corte. Se debe cortar el cable en el punto de $\Sigma M = 0$ con respecto al dicho punto para el cual se debe escribir las ecuaciones de equilibrio de las reacciones y se debe resolver las ecuaciones de las reacciones (problema resuelto 7.8).

5. Se debe identificar la sección de punto de corte. Se debe cortar el cable en el punto de $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$ con respecto al punto de corte. Se debe escribir las ecuaciones de equilibrio de las reacciones y se debe resolver las ecuaciones de las reacciones (problema resuelto 7.8).

6. Después de haber leído el problema, se debe identificar el punto de corte del cable y se debe escribir las ecuaciones de equilibrio de las reacciones en los apoyos. Se debe cortar el cable en dicho punto y se debe escribir las ecuaciones de equilibrio de las reacciones y se debe resolver las ecuaciones de las reacciones (problema resuelto 7.8).

continúa

Por cada x que se elige en el intervalo $[a, b]$ se construye una función continua de la forma $f(x) = \frac{w(x)}{2T_0}$. Se construye una familia de curvas $f(x)$ para cada x en el intervalo $[a, b]$. La tensión en cada punto x de la cuerda es $T(x) = T_0(1 + f(x))$.

La función $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$ y satisface las condiciones de contorno $f(a) = f(b) = 0$. La tensión en cada punto x de la cuerda es $T(x) = T_0(1 + f(x))$.

La solución de este problema es única y se puede encontrar de la siguiente manera:

Se elige una función continua $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ que satisface las condiciones de contorno $f(a) = f(b) = 0$. Se construye una familia de curvas $f(x)$ para cada x en el intervalo $[a, b]$. La tensión en cada punto x de la cuerda es $T(x) = T_0(1 + f(x))$.

$$T = \frac{w(x)}{2T_0} \quad (7.8)$$

La tensión en cada punto x de la cuerda es $T(x) = T_0(1 + f(x))$. La tensión en cada punto x de la cuerda es $T(x) = T_0(1 + f(x))$.

Se elige una función continua $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ que satisface las condiciones de contorno $f(a) = f(b) = 0$. Se construye una familia de curvas $f(x)$ para cada x en el intervalo $[a, b]$. La tensión en cada punto x de la cuerda es $T(x) = T_0(1 + f(x))$.

Se elige una función continua $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ que satisface las condiciones de contorno $f(a) = f(b) = 0$. Se construye una familia de curvas $f(x)$ para cada x en el intervalo $[a, b]$. La tensión en cada punto x de la cuerda es $T(x) = T_0(1 + f(x))$.

Se elige una función continua $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ que satisface las condiciones de contorno $f(a) = f(b) = 0$. Se construye una familia de curvas $f(x)$ para cada x en el intervalo $[a, b]$. La tensión en cada punto x de la cuerda es $T(x) = T_0(1 + f(x))$.

Problemas

7.93 Dos cargas se sostienen del cable ABCD mostrado en la figura. Si se sabe que $h_B = 1.5$ m, determine a) la distancia h_C , b) las componentes de la reacción en D y c) el valor máximo de la tensión en el cable.

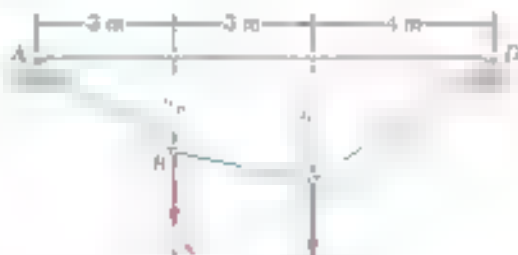


Figura P7.93 y P7.94

7.94 Si el valor máximo de la tensión en el cable ABCD es de 15 kN, determine a) la distancia h_B y b) la distancia h_C .

7.95 Si $d_C = 8$ ft, determine a) la reacción en A y b) la reacción en E.

7.96 Si $d_C = 4.5$ ft, determine a) la reacción en A y b) la reacción en E.

7.97 Si $d_C = 3$ m, determine a) las distancias d_B y d_D , b) la reacción en E.

7.98 Determine a) la distancia d_C para la que la porción DE del cable quede en posición horizontal, b) las reacciones correspondientes en A y E.

7.99 Si $d_C = 15$ ft, determine a) las distancias d_B y d_D , b) la tensión en el cable en C.

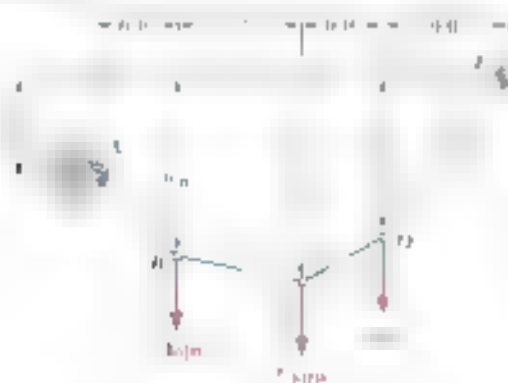


Figura P7.99 y P7.100

7.100 Determine a) la distancia d_C para la cual la porción BC del cable quede en posición horizontal, b) las componentes correspondientes de la reacción en E.

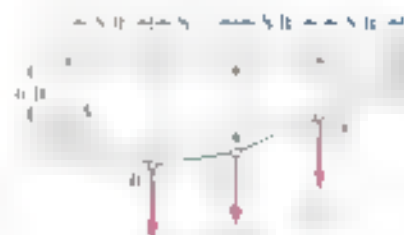


Figura P7.95 y P7.96



Figura P7.97 y P7.98



Figura P7 101 y P7 102

7 101 El cable ABC sostiene dos cargas, como se muestra en la figura. Si se sabe que $b = 4$ ft, determine a , la magnitud requerida de la fuerza horizontal P y b la distancia correspondiente a .

7 102 El cable ABC sostiene dos cargas, como se muestra en la figura. Determine las distancias a y b cuando se aplica una fuerza horizontal P de 60 lb de magnitud en A.

7 103 Si se sabe que $m_B = 70$ kg y $m_C = 35$ kg, determine la magnitud de la fuerza P requerida para mantener el equilibrio.



Figura P7 103 y P7 104

7 104 Si se sabe que $m_B = 18$ kg y $m_C = 10$ kg, determine la magnitud de la fuerza P requerida para mantener el equilibrio.

7 105 Si $a = 3$ m, determine las magnitudes de P y Q requeridas para mantener al cable en la forma que se muestra en la figura.



Figura P7 105 y P7 106

7 106 Si $a = 4$ m, determine las magnitudes de P y Q requeridas para mantener al cable en la forma que se muestra en la figura.

7 107 Un alambre que tiene una masa por unidad de longitud de 0.65 kg/m se suspende de dos soportes a la misma elevación, los cuales están separados por una distancia de 20 m. Si la forma del alambre es una parábola, determine a la longitud total del alambre b la tensión máxima en el alambre.

7 108 En la figura se muestran dos cables del mismo calibre que se atan a la torre de transmisión en B. Como la torre es delgada, la componente horizontal de la tensión en los cables es pequeña por los cables a y b se ven como líneas rectas. Si la masa por unidad de longitud de los cables es de 0.4 kg/m, determine la tensión en el cable a y b en la torre.



Figura P7 108

7.109 Cada uno de los cables del puente Golden Gate sostiene una carga $w = 1.1$ kip/ft a lo largo de la horizontal. Si el claro L es de 4 150 ft y $y_B = 6$ ft, $y_C = 354$ ft. h la longitud de cada uno de los cables y h_0 la longitud de cada uno de éstos.

7.110 El claro central del puente George Washington, tal y como se muestra, es de 1 100 m. Si este claro es soportado por cables parabólicos. La carga unitaria por peso propio del cable a lo largo de la horizontal es $w = 5.2$ kN/m. Si el cable AC es de 1 400 ft y la flecha h es de 45 ft, determine h_0 la longitud original sin carga a la temperatura máxima y h_1 la longitud de cada uno de éstos.

7.111 La masa total del cable AC es de 25 kg. Si se supone que la masa del cable está distribuida uniformemente a lo largo de la horizontal, determine la flecha h y la pendiente del cable en A y en C .

7.112 Un alambre de 50.5 m de longitud que tiene una masa por unidad de longitud de 0.75 kg/m se usa para cubrir una distancia horizontal de 40 m. Determine h_0 la longitud aproximada sin carga y h_1 la longitud máxima sin carga. [Sugerencia: Se los dos problemas anteriores de la sección 7.10].

7.113 Un cable de longitud $L + \Delta$ se suspende entre dos puntos que tienen la misma elevación y que están separados por una distancia L . *a)* Si Δ es pequeño comparado con L y el cable es parabólico, determine la flecha aproximada en términos de L y Δ . *b)* Si $L = 100$ ft y $\Delta = 4$ ft determine la flecha aproximada. [Sugerencia: Use sólo los primeros dos términos de la ecuación (7.10)].

7.114 El puente de la Figura P7.114 es un cable suspendido entre los pilares A y B . Se supone que la temperatura del cable es constante y que la longitud de los cables varía con la temperatura. Los cables que están en el cable principal y en los cables varía desde $h_1 = 58$ m a $h_2 = 60$ m. Desde $h_1 = 894$ ft en el verano. Si el claro tiene $L = 4 200$ ft, determine el cambio en la longitud de los cables debido a las variaciones extremas de temperatura.

7.115 Cada uno de los cables de los claros laterales del puente Golden Gate sostiene una carga $w = 10.2$ kip/ft a lo largo de la horizontal. Si se supone que para los cables laterales la distancia entre los cables y el cable principal a la línea recta AB es de 30 ft y que ésta se localiza en el punto intermedio de la catenaria, determine h_0 la longitud original sin carga en cada cable y h_1 la pendiente en B .



Figura P7.111



Figura P7.115

7-116 El tubo horizontal que pesa 5 lb/ft y que se muestra en la figura está soportado por los separadores para cables de 40 ft de separación horizontal. Si el tubo se eleva a una posición horizontal, ¿cuál es el peso máximo que puede soportar el tubo? ¿Cuál es la deflexión máxima en el cable?



Figura P7-116

7-117 El cable AB soporta una carga uniformemente distribuida a lo largo de la longitud, como se muestra en la figura. Si el peso del cable por unidad de longitud es w , ¿cuál es la magnitud de la tensión máxima en el cable? ¿Cuál es la distancia vertical desde A hasta el punto B donde se ancla?

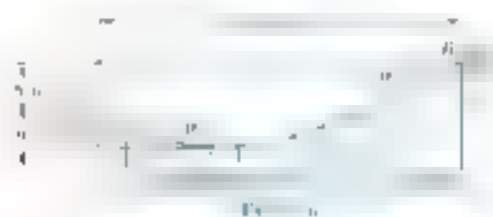


Figura P7-117 y P7-118

7-118 El cable AB soporta una carga uniformemente distribuida a lo largo de la longitud, como se muestra en la figura. Si el peso del cable por unidad de longitud es w , ¿cuál es la magnitud de la tensión máxima en el cable? ¿Cuál es la distancia vertical desde A hasta el punto B donde se ancla?

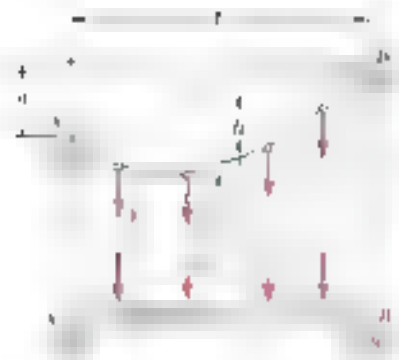


Figura P7-119

7-119 Por la figura se muestra un cable AB de longitud L que se eleva a una posición horizontal. Si el peso del cable por unidad de longitud es w , ¿cuál es la magnitud de la tensión máxima en el cable? ¿Cuál es la distancia vertical desde A hasta el punto B donde se ancla?

7-120 a 7-123 Utilice la programación estadística para resolver los problemas que se indican a continuación. Proporcione una solución para cada problema que indique el número de iteraciones.

- 7-120 Problema 7-116
- 7-121 Problema 7-117
- 7-122 Problema 7-118
- 7-123 Problema 7-119

7-124 Muestre que la curva descrita por un cable que sostiene una carga distribuida en x está descrita por la ecuación $y = \frac{w}{2T_0} x^2 + c$, donde T_0 es la tensión en el punto más bajo.

7-125 Utilice la propiedad indicada en el problema 7-124 para determinar la forma forzada por cable en el caso de flexión de un cable que sostiene una carga distribuida en x cuando el cable se libera a partir de un punto en el que la tensión es cero y el cable se libera a partir de un punto en el que la tensión es T_0 .

7-126 Si el peso por unidad de longitud del cable AB es $w/cos^2 \theta$, demuestre que la curva formada por el cable es un arco circular. (Sugiera usar la propiedad indicada en el problema 7-124.)



Figura P7-126

7-10. CATENARIA

Ahora considere un cable AB que soporta una carga distribuida a lo largo del mismo cable (figura 7-10). Las catenarias cuelgan bajo la acción de su propio peso está cargadas de esta forma. La carga por unidad de longitud medida a lo largo del cable se representa como w en lb/ft o en N/m. La magnitud W de la carga soportada por un tramo de cable de longitud x se encuentra desde el punto de apoyo C hasta el punto D, está dada por $W = wx$. Al sustituir este valor de W en la ecuación (7-1), se obtiene la ecuación (7-2) en el punto D.

$$T = \sqrt{T_0^2 + w^2 x^2}$$

La ecuación (7-2) para las catenarias se obtiene al integrar la ecuación (7-1) con respecto a x .

$$T = wx \quad W = wx \quad T = w \sqrt{x^2 + c^2} \quad (7-2)$$



Figura 7-10



Fotografía 7-4 En esta sección se muestran las fuerzas sobre los apoyos y las fuerzas internas en los cables de las líneas eléctricas que se muestran en la fotografía.

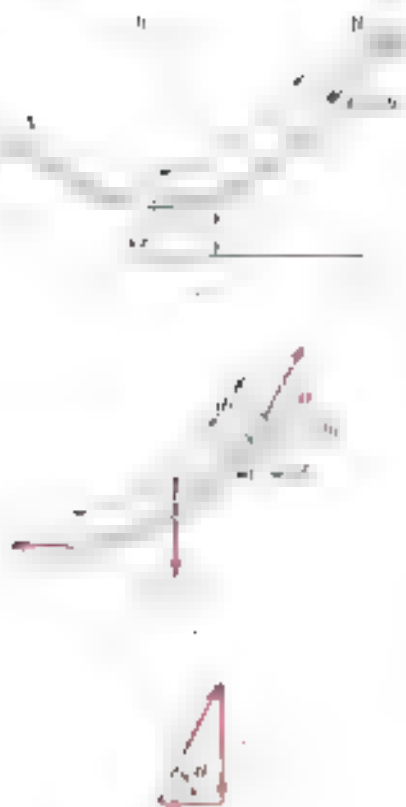


Figura 7.19 repetida

En la figura 7.19b se muestra el diagrama de cuerpo libre para la porción CD del cable. Sin embargo, este diagrama no puede utilizarse para obtener directamente la expresión de la curva adoptada por el mismo, ya que sobre las statum no se conocen los valores de la acción de la resultante W de la carga. Para obtener la acción W primero se escribe una ecuación horizontal de la pequeña porción de cable de longitud ds y $dT = ds \theta$. Si el origen a partir de la figura 7.19c que $\theta = T_0/T$ y con las ecuaciones (7.11), se escribe

$$dx = ds \cos \theta = \frac{T_0}{T} ds = \frac{w ds}{w \sqrt{c^2 + s^2}} = \frac{ds}{\sqrt{1 + s^2/c^2}}$$

Si se selecciona el origen C de coordenadas cartesianas a una distancia horizontal por debajo de C igual a $1/c$, y se integra entre C y la punta D de la x , y , se obtiene

$$x = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{1 + s^2}} ds = \sinh^{-1} s = \cosh^{-1} \sqrt{1 + s^2}$$

Esta relación, por su relación la longitud L de la porción CD del cable y la distancia horizontal x se puede escribir la siguiente forma:

$$x = c \cosh^{-1} \frac{L}{c} \quad (7.12)$$

Ahora se puede obtener la relación entre las coordenadas x y y substituyendo $dy = dx \tan \theta$. Observe que a partir de la figura 7.19c que $\tan \theta = W/T$ y con las ecuaciones (7.11) y (7.13) se escribe

$$dy = dx \tan \theta = \frac{W}{T} dx = \frac{s}{c} dx = \sinh^{-1} \frac{x}{c} dx$$

Si se integran desde C hasta D y y son las coordenadas y (Fig. 7.12), se obtiene la siguiente expresión

⁴ Esta integral se puede encontrar en la tabla de integrales de las funciones hiperbólicas.

que el $\cosh^{-1} u$ se define como $\cosh^{-1} u = \cosh^{-1} u$ para $u \geq 1$ y $\sinh^{-1} u = \sinh^{-1} u$ para $u \geq 1$. Esta función y la función $y = \cosh^{-1} u$ (que se lee "coseno hiperbólico" de u) están definidas de la siguiente forma:

$$\cosh^{-1} u = \ln(u + \sqrt{u^2 - 1}) \quad \sinh^{-1} u = \ln(u + \sqrt{u^2 + 1})$$

Los valores numéricos de las funciones $\sinh^{-1} x$ y $\cosh^{-1} x$ se encuentran en las tablas de funciones hiperbólicas. Antes de usar estas tablas, debe asegurarse que los valores x sean reales. Las tablas, ya sea directamente o a partir de las definiciones que se analizan de presentar, se recomiendan al estudiante consultar cualquier libro de cálculo para una descripción completa de las propiedades de estas funciones. En esta sección sólo se utilizan las siguientes propiedades, las cuales se pueden derivar directamente a partir de las definiciones que se presentaron con anterioridad:

$$\frac{d(\sinh^{-1} x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \quad \frac{d(\cosh^{-1} x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad x > 1$$

$$y - c = \int_{x_0}^x \sin(h \sqrt{E} / w) dx = (x - x_0) \sin(h \sqrt{E} / w) \\ y - c = (x - x_0) \sin(h \sqrt{E} / w) \quad (7.15)$$

la cual se reduce a

$$y = c + (x - x_0) \sin(h \sqrt{E} / w) \quad (7.16)$$

Esta es la ecuación de una *catenaria* con eje vertical. La ordenada c del punto C es el *apoyo C* recibe el nombre de *parámetro de catenaria*. Pese a que a veces tanto $\sin(h \sqrt{E} / w)$ como $\cos(h \sqrt{E} / w)$ se tratan como constantes y tomando en cuenta la ecuación (7.14) se obtiene la siguiente relación entre y y x :

$$y^2 - x^2 = c^2 \quad (7.17)$$

A resolver las ecuaciones (7.16) y (7.17) y llenar el *formulario* que acompaña a este capítulo es recomendable. El se puede encontrar dichas ecuaciones en la siguiente forma:

$$T_h = w \quad W = wx \quad T = wy \quad (7.18)$$

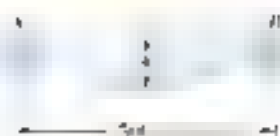
La *relación* entre *peso* y la *tensión* en el punto D de la hilera es proporcional a la distancia vertical desde D hasta la línea horizontal que representa el eje x .

Cuando los apoyos A y B del cable tienen la misma elevación, la distancia l entre los apoyos es el *espano de cable* y el *apoyo* es la distancia vertical h de la hilera que es la *flecha*. En este caso h se conoce como la *flecha* de cable. Estas condiciones son las mismas en las aplicaciones para cables parabólicos por lo que se se trata que el problema a resolver en que se seleccionan los ejes coordenados, ahora la flecha h está dada por

$$h = y_A - c \quad (7.19)$$

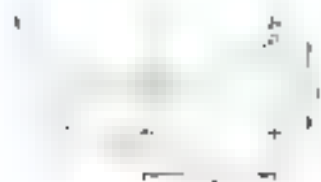
Finalmente se debe señalar que ciertos problemas sobre catenarias involucran ecuaciones trascendentales, las cuales deben resolverse por medio de métodos numéricos sucesivos y así el problema es con $h = 5$ m, $w = 1$ kg/m, $E = 100$ kg/m, $x_0 = 0$ m, $x_1 = 10$ m, $y_1 = 5$ m. En este caso se puede suponer que la *catenaria* puede representarse por una parábola. Este supuesto en general da la solución del problema y el error que se introduce es pequeño.

Cuando los apoyos A y B tienen distintas elevaciones, no se conoce la posición de *apoyo* C ni el *apoyo* D . En tales casos el problema puede resolverse como similar a la similar para cables parabólicos, suponiendo que el cable debe pasar a través de los apoyos, por lo que l y que $y_B - y_A = d$, donde l y d representan, respectivamente, las distancias horizontal y vertical entre los dos apoyos.



PROBLEMA RESUELTO 7.10

Un cable uniforme que pesa 3 lb/ft se suspende entre los puntos A y B , como se muestra en la figura. Determine a' los valores de la tensión máxima y mínima en el cable y b la longitud del cable.



SOLUCIÓN

Equación del cable. El origen de las coordenadas se coloca a una distancia a por debajo de la línea horizontal AB (Fig. 7.10). La ecuación de la curva del cable está dada por la ecuación (7.1):

$$y = c \cosh \frac{x}{c}$$

Las coordenadas de punto B son las siguientes:

$$x_B = 250 \text{ ft} \quad y_B = 100 \text{ ft}$$

Si se substituyen estas coordenadas en la ecuación del cable, se obtiene

$$(100 - c) = c \cosh \frac{250}{c}$$

$$(100 - c) = c \cosh \frac{250}{c}$$

El valor de c se determina suponiendo valores de prueba sucesivos, como se muestra en la siguiente tabla.

c	250 c	100 c	100 c	τ	cosh $\frac{250}{c}$
y_B/c	1.000	1.000	1.000		1.000
$\cosh \frac{250}{c}$	1.000	1.494	1.946		1.494
$\cosh \frac{250}{c} - 1$	0.000	0.494	0.946		0.494
$\frac{250}{c}$	1.000	2.500	2.500		1.000

Tomando $c = 125$ se tiene de (7.1)

$$y_B = 100 = c \cosh \frac{250}{c} = 125 \cosh \frac{250}{125}$$

La ecuación (7.1) se puede escribir en la forma $y = c \cosh \frac{x}{c}$. Con las coordenadas de punto B se obtiene

$$T_{min} = T_0 = w_0 c = (125)(3) = 375 \text{ lb}$$

$$T_{max} = w_0 y_B = (3 \text{ lb/ft})(100 \text{ ft}) = 300 \text{ lb}$$

(b) Longitud del cable. La mitad de la longitud del cable se encuentra al evaluar la ecuación (7.1):

$$y_B^2 - x_B^2 = c^2 \quad x_{CB}^2 = y_B^2 - c^2 = (100)^2 - (125)^2 \quad x_{CB} = 75 \text{ ft}$$

Por tanto, la longitud total del cable está dada por

$$s_{AB} = 2x_{CB} = 2(75 \text{ ft}) = 150 \text{ ft}$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En la última sección de este capítulo se aprenderá a resolver los problemas que se ven en esta sección por medio de los triángulos rectángulos de la figura 7.15. La forma más simple de cable es la de una semicircunferencia, pero a veces se usan cables de otro tipo.

$$y = c \cosh \frac{x}{c} \quad (7.16)$$

La longitud del cable entre los puntos A y B se puede encontrar si se conoce la longitud s entre los puntos A y B directamente por la ecuación (7.16). La longitud del cable desde el origen hasta el punto B se expresa como

$$s = c \sinh \frac{x}{c} \quad (7.17)$$

En esta sección se trata de resolver las ecuaciones (7.16) y (7.17) para x y y . Éstas se consideran cada una de las ecuaciones que tienen presentadas en la sección (ecuaciones (7.15) y (7.19)). Se resuelve una ecuación que contiene sólo una incógnita. Se sustituye el valor encontrado de esta forma en otra ecuación y se resuelve esta última para otra incógnita.

3. Si se proporciona la flecha h , se utiliza la ecuación (7.19) para encontrar y con $h = c - y$ a continuación se resuelve la ecuación (7.16) para x con la ecuación (7.17) se encuentra s y se sustituye la ecuación (7.16) para y en la ecuación (7.17).

4. Al trabajar con las ecuaciones (7.16) y (7.17) se puede encontrar s con y y x por medio de la ecuación (7.16) y s con y por medio de la ecuación (7.17). Los problemas que se ven en esta sección son de tipo práctico. Trabaja los problemas llevándote un registro de los tiempos realizados y de cómo con qué se hizo en el problema resuelto. 10. Trabaja los problemas de la sección de problemas prácticos en la que se dan los datos para cada problema.

Problemas

7 127 Un cable de 30 m cuelga entre dos edificios, como se muestra en la figura. Se sabe que la tensión máxima es de 500 N y que el punto más bajo del cable está a 4 m sobre el suelo. Determine *a*) la distancia horizontal entre los edificios, *b*) la masa total del cable.



Figura P7 127

7 128 Una cinta de medición de acero tiene 200 ft de longitud y pesa 4 lb. Si la cinta se tiende entre dos puntos que tienen la misma altura y se estira hasta que la tensión en cada extremo es de 16 lb, determine la distancia horizontal entre los extremos de la cinta. No tome en cuenta la elongación de la cinta debida a la tensión.

7 129 Un cable de transmisión se estira a una longitud *L* y pesa 200 mN que tiene una masa por unidad de longitud $\lambda = 0.005 \text{ kg/m}$. Se suspende entre dos puntos que están a la misma altura. Si se sabe que la tensión en cada uno de los extremos es T_0 , determine *a*) la distancia horizontal entre los soportes, *b*) la tensión máxima en el cable.

7 130 Un cable de transmisión eléctrica de 400 ft de longitud y que pesa 2.5 lb/ft se suspende entre dos puntos que tienen la misma altura. Si se sabe que la tensión T_0 es de 400 + $\frac{1}{2} \lambda L^2$, determine *a*) la distancia horizontal entre los apoyos, así como la tensión máxima en el cable.

7 131 En la figura se muestra un alambre con una longitud de 20 m y una masa por unidad de longitud de 0.2 kg/m, el cual se une a un apoyo fijo en A y a un collarín en B. Sin tomar en cuenta el efecto de la fricción, determine *a*) la fuerza *P* para la cual $h = 4 \text{ m}$ y *b*) el claro correspondiente *L*.



Figura P7 131, P7 132 y P7 133

7 132 En la figura se muestra un alambre con una longitud de 30 m y una masa por unidad de longitud de 0.2 kg/m, el cual se une a un apoyo fijo en A y a un collarín en B. Si se sabe que la magnitud de la fuerza horizontal aplicada al collarín es $P = 20 \text{ N}$, determine *a*) la flecha *h* y *b*) el claro *L*.

7 133 En la figura se muestra un alambre con una longitud de 20 m y una masa por unidad de longitud de 0.2 kg/m, el cual se une a un apoyo fijo en A y a un collarín en B. Sin tomar en cuenta el efecto de la fricción, determine *a*) la flecha *h* para la que $L = 5 \text{ m}$ y *b*) la fuerza *P* correspondiente en lb.

7 134 Determine la flecha de una cadena de 30 ft que se encuentra atada a dos puntos que están a igual altura y que están separados por una distancia de 20 ft.

7 135 El alambre de la figura se mantiene suspendido entre los puntos A y B a la misma altura separados por una distancia de 60 m. Si se sabe que la tensión máxima es de 300 N, determine *a*) la flecha del alambre y *b*) la masa total del alambre.

7 136 Un contrapeso D está unido a un cable que pasa a través de una pequeña polea en A . La tensión se mantiene igual en B . Si se sabe que $L = 1.5$ ft, $h = 3$ ft, determine *a*) la longitud del cable AB y *b*) la masa del contrapeso D .

7 137 Una cuerda uniforme de 50 m de longitud pasa por una pequeña polea en B y se encuentra unida a un apoyo fijo en A . Si $L = 10$ m, se tiene en cuenta el efecto de la fricción, determine el parámetro de los valores de h para los cuales la cuerda está en equilibrio.

7 138 Un cable que pesa 2 lb/ft se suspende entre dos puntos que están a una altura h separados por una distancia de 60 ft. Determine *a*) la flecha máxima permitida para h y *b*) la tensión máxima permitida en el cable.

7 139 El motor M mostrado en la figura se usa para devanar lentamente el cable. Si se sabe que la masa por unidad de longitud del cable es de 0.4 kg/m, determine la tensión máxima en el cable cuando $h = 3$ m.

7 140 El motor M mostrado en la figura se usa para devanar lentamente el cable. Si se sabe que la masa por unidad de longitud del cable es de 0.4 kg/m, determine la tensión máxima en el cable cuando $h = 3$ m.

7 141 Un cable uniforme que pesa 3 lb/ft se mantiene en la posición mostrada mediante la fuerza horizontal P aplicada en B . Si $\theta_1 = 60^\circ$, determine *a*) la ubicación del punto B y *b*) la longitud del cable.

7 142 Un cable uniforme que pesa 3 lb/ft se mantiene en la posición mostrada mediante la fuerza horizontal P aplicada en B . Si $\theta_1 = 60^\circ$, determine *a*) la ubicación del punto B y *b*) la longitud del cable.

7 143 Como se muestra en la figura, a la izquierda del punto B un cable uniforme AB de longitud a se encuentra unido a un apoyo fijo en A . Se sabe que la masa del cable por unidad de longitud es de 2 kg/m. determine la fuerza F cuando $a = 3.6$ m.

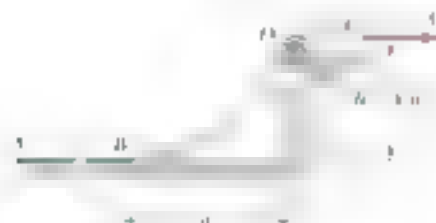


Figura P7 143 y P7 144

7 144 Como se muestra en la figura, a la izquierda del punto B un cable uniforme AB de longitud a se encuentra unido a un apoyo fijo en A . Se sabe que la masa del cable por unidad de longitud es de 2 kg/m. determine la fuerza F cuando $a = 6$ m.



Figura P7 136



Figura P7 137



Figura P7 139 y P7 140

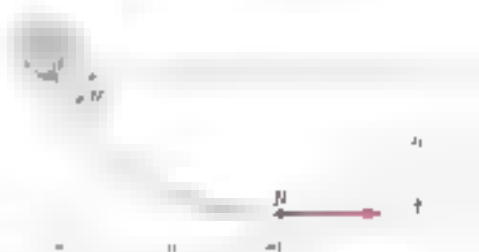


Figura P7 141 y P7 142



Figura P7 147

7 145 El cable ACB que se muestra en la figura tiene una masa por unidad de longitud de 0.45 kg/m . Si se sabe que el punto más bajo del cable se localiza a una distancia $a = 0.6 \text{ m}$ por debajo del apoyo A , determine la ubicación de los puntos C y B y la tensión máxima en el cable.



Figura P7 145 y P7 146

7 146 El cable ACB que se muestra en la figura tiene una masa por unidad de longitud de 0.45 kg/m . Si se sabe que el punto más bajo del cable se localiza a una distancia $a = 8 \text{ m}$ por debajo del apoyo A , determine la ubicación del punto más bajo C y B y la tensión máxima en el cable.

7 147 El cable AB de 10 ft está sujeto a las dos esferas que se muestran en la figura. El collarín en A se puede deslizar libremente a lo largo de la barra; un tipo anillo a la barra evita que el collarín B se pueda mover. Después de ser liberado de la restricción, ¿puede el cable permanecer en la configuración mostrada?

7 148 Retorne el problema 7 147 y ahora suponga que el ángulo θ formado por la barra y la horizontal es de 45° .

7 149 Si se denota con θ el ángulo formado por un cable uniforme y la horizontal, demuestre que en cualquier punto $a) s = r \tan \theta$ y $b) y = r \sec \theta$.

7 150 *a)* Determine el claro horizontal máximo permisible de un cable uniforme que tiene un peso w por unidad de longitud, si la tensión en este no debe exceder de un valor dado T_m . *b)* Utilice el resultado del inciso *a* para determinar el claro máximo de un abanico de acero para el cual $w = 0.25 \text{ lb/ft}$ y $T_m = 8\,000 \text{ lb}$.

7 151 Un cable que tiene una masa por unidad de longitud de 3 kg/m , se sostiene en la forma mostrada en la figura. Si se sabe que el claro L es de 6 m , determine los dos valores de la flecha h para los cuales la tensión máxima es de 350 N .



Figura P7 151, P7 152 y P7 153

7 152 Para el cable mostrado en la figura, determine la relación entre la flecha y el claro para la cual la tensión máxima en el cable AB es igual al peso total del mismo.

7 153 En la figura se muestra un cable de peso w por unidad de longitud que se sostiene entre dos puntos A y B que están separados por una distancia L . Determine *a)* la relación entre la flecha h y el claro para la cual la tensión máxima en el cable puede ser igual a T_m y *b)* los valores correspondientes de θ_A y T_m .

La segunda mitad del capítulo se dedica a un análisis de cables flexibles. El primer subtema considera un cable sin peso suspendido por sus extremos en una posición estable. Al analizar este tipo de configuración se observa que las ecuaciones de equilibrio que describen las masas suspendidas para deformar las masas resultan idénticas a las representadas por ecuaciones en las que x , y y z se refieren a las coordenadas cartesianas de un punto P del cable se puede interpretar como un sistema de ecuaciones de equilibrio para un cuerpo libre para la posición A de P del cable. Una vez que se han establecido las ecuaciones que se pueden utilizar en la derivación de cualquier punto del cable y la ecuación de equilibrio por un elemento más allá de partir de la ecuación de equilibrio apropiada para una posición T se puede demostrar que el momento horizontal de la fuerza T que representa la tensión es la misma en cualquier punto del cable.

Después se consideraron cables que soportan cargas distribuidas. Se usó un elemento de cuerpo libre en forma de cable CD que se extiende desde el punto C hasta un punto en la línea DD' de la figura 7.23. Se observó que la componente horizontal de la fuerza de tensión $T = T_0$ es constante y igual a la tensión T_0 en C mientras que su componente vertical es igual al peso W de la porción de cable CD . La ecuación de la curva que se describe con a partir del triángulo de fuerzas:

$$T = \sqrt{T_0^2 + W^2} \quad \tan \theta = \frac{W}{T_0} \quad (7.6)$$

En el caso de una carga puntual que queda perpendicular a la línea de la horizontal como en el caso de un elemento colgante (figura 7.24) la carga soportada por la porción CD es la carga W en la línea DD' y la carga puntual por la línea DD' horizontal es cero. El punto C se encuentra en la forma de una curva adaptada por cable es una parábola cuya ecuación está dada por

$$y = \frac{w_0 x^2}{2T_0}$$

y que la longitud del cable se puede encontrar usando la ecuación de la longitud de la curva:

En el caso de una carga uniformemente distribuida a lo largo del mismo cable (por ejemplo, un cable colgante por su propio peso (figura 7.25)) la carga soportada por la porción CD está dada por $W = w_0$ donde w_0 es la longitud w_0 es la longitud w_0 de la carga constante por unidad de longitud w_0 (figura 7.10). Se seleccionó el origen O de los ejes coordenados a una distancia $c = T_0/w_0$ por debajo de C y se derivaron las ecuaciones

$$x = c \sinh \frac{x}{c} \quad (7.7)$$

$$y = c \cosh \frac{x}{c} \quad (7.8)$$

$$y^2 - x^2 = c^2 \quad (7.9)$$

$$T_H = w_0 c \quad W = w_0 x \quad f = w_0 y \quad (7.10)$$

Las ecuaciones pueden utilizarse para resolver problemas por cables colgantes. En la figura 7.26 se muestra un ejemplo de un problema resuelto. La ecuación (7.10) define la forma adoptada por el cable y es la ecuación de una catenaria.

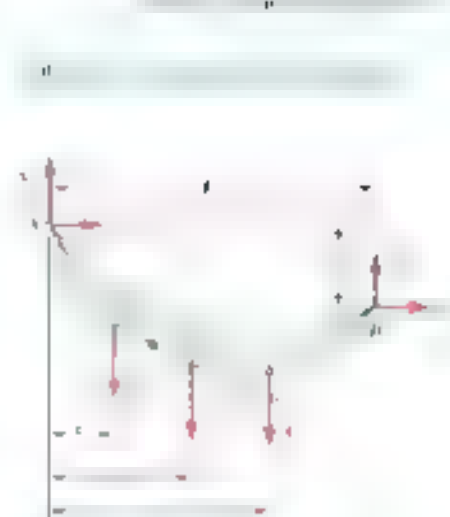


Figura 7.22



Figura 7.23



Figura 7.24



Figura 7.25

Problemas de repaso



Figura P7.154

7.154 Se ha determinado experimentalmente que el momento flector en el punto A de la viga mostrada vale $900 \text{ N}\cdot\text{m}$. Determine la tensión en las barras AE y ED. b) las fuerzas internas correspondientes en el punto J.

7.155 Si se sabe que el radio de cada pulsa es de 200 mm y no se toma en cuenta el peso de la estructura, determine las reacciones en el punto J del armazón que se muestra en la figura.



Figura P7.155

7.156 Un canal de acero que tiene un peso por unidad de longitud de $w = 20 \text{ lb/ft}$ forma un lado del tiro de ciertas escaleras. Para cada uno de las condiciones que aparecen a continuación, determine la reacción en el punto C del canal debida a su propio peso.



Figura P7.156

7.157 Para la viga que se muestra en la figura, determine el valor de P de las dos cargas empujadas para las cuales el valor absoluto máximo de la fuerza cortante es la mitad del valor absoluto de $6M/EI$.

7.158 Se sabe que la siguiente estructura está sujeta a una fuerza P y a una fuerza constante F en la barra horizontal y de momento flector M en el punto A y B) determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y momento de flexión.



Figura P7.157 y P7.158

7 159 Para la viga y las cargas mostradas en la figura, *a*) dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector y determine los valores absolutos máximos de la fuerza cortante y del momento flector.

7 160 Para la viga mostrada en la figura, dibuje los diagramas de fuerza cortante y de momento flector y determine el valor absoluto máximo del momento flector, sabiendo que *a*) $P = 6$ kips y *b*) $P = 3$ kips.

7 161 Para la viga y las cargas mostradas en la figura *a*) escriba las ecuaciones de las curvas de la fuerza cortante y del momento flector, *b*) determine el momento flector máximo.

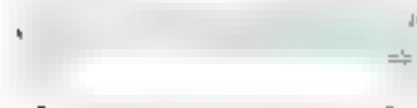


Figura P7.161



Figura P7.159

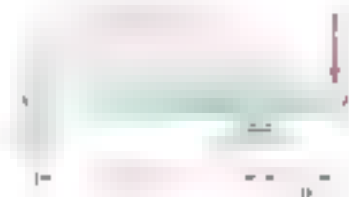


Figura P7.160

7 162 Una tubería de petróleo está sostenida cada 6 ft mediante suspensiones verticales fijas a un cable como se muestra en la figura. Debido al peso de la tubería, el cable se curva como cada segmento x_1 y x_2 tiene una tensión de 400 lb. Si se sabe que $d_1 = 12$ ft, determine *a*) la tensión máxima en el cable y *b*) la distancia d_2 .



Figura P7.162

7 163 Resuelva el problema 7 162, y ahora suponga que $d_1 = 0$ ft.

7 164 Un cable de transmisión con una masa por unidad de longitud 0.05 kg/m está sujeto a los cables y pilares como se muestra. La distancia entre los pilares es de 40 m y la tensión en el cable es de 20 kN. Determine *a*) la tensión máxima en el cable y *b*) la longitud del cable.



Figura P7.163

7 165 El cable *AB* soporta una carga uniformemente distribuida a lo largo de la horizontal, como se muestra en la figura. El punto más bajo *C* se localiza a 8 m a la derecha de *A*. Determine *a*) la distancia vertical *a*, *b*) la longitud del cable, *c*) las componentes de la reacción en *A*.

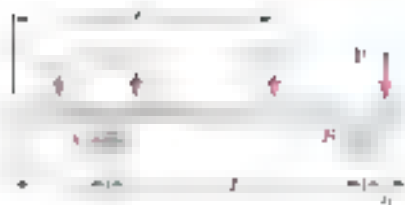


Figura P7.C1

7.C1 Se va a usar el software Salto para determinar las cargas y las reacciones de la viga en el problema 7.36. Use el software para la viga y las cargas del a) problema 7.36 b) problema 7.37 c) problema 7.38.

7.C2 Se van a aplicar varias cargas puntuales y una carga distribuida en una viga AB de longitud L . Se va a usar el software Salto para determinar las reacciones de la viga y las cargas y las reacciones de la viga en el problema 7.36. Use el software para la viga y las cargas del a) problema 7.36 b) problema 7.37 c) problema 7.38.



Figura P7.C2

7.C3 En la figura se muestra una viga AB articulada en B y sostenida en A por un cable. La viga tiene una longitud L y una carga distribuida de magnitud w por unidad de longitud. Se va a usar el software Salto para determinar las reacciones de la viga y las cargas y las reacciones de la viga en el problema 7.36. Use el software para la viga y las cargas del a) problema 7.36 b) problema 7.37 c) problema 7.38.



Figura P7.C3

7.C4 El peso de un puente consistirá en tubos de aluminio apoyados sobre los supports de la viga que en la figura se muestra en la figura 7.C4. El peso de cada tubo del puente es de 1000 lb. El ancho de la viga entre los ejes del camión es de 6 ft, y se supone que el peso del camión se distribuye de igual manera entre cuatro ruedas. Utilice software para calcular la magnitud y ubicación del momento flector máximo en la viga como una función de x para -3 ft a 10 ft, utilizando incrementos de 0.5 ft. Utilice incrementos de 0.5 ft para x y dx para x y dx para x . Utilice software para determinar el momento flector que ocurre en la viga cuando el camión se mueve sobre el puente y determine el valor correspondiente de x .

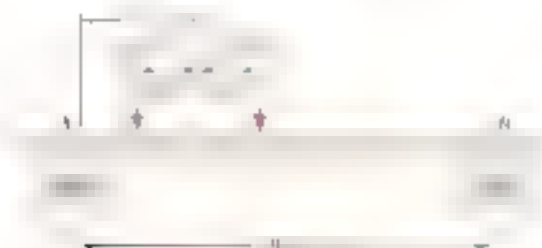


Figura P7.C4

7.C5 Use software a fin de graficar los diagramas de fuerza cortante y momento flector para la viga del problema 7.C1. Utilice este software y un incremento $\Delta x \leq L/100$ a fin de graficar los diagramas V y M para la viga y las cargas del a) problema 7.36 b) problema 7.37 c) problema 7.38.

7.C6 Use software a fin de graficar los diagramas de fuerza cortante y momento flector para la viga del problema 7.C2. Utilice este software y un incremento $\Delta x \leq L/100$ a fin de graficar los diagramas V y M para la viga y las cargas del a) problema 7.39 b) problema 7.41 c) problema 7.42.

7.C7 Use software en el proceso de diseño de los supports de un cable para determinar la configuración de la estructura de soporte. El soporte A, con base en los valores de las cargas P_1, P_2, \dots, P_n , las distancias horizontales d_1, d_2, \dots, d_n y las dos distancias verticales h_0 y h_1 . Utilice este software para resolver los problemas 7.05b, 7.06b y 7.07b.

7.C8 Una instalación típica para líneas de transmisión consiste en un cable de aluminio de n hilos o por hilos de aluminio suspendido entre dos torres en la figura entre dos puntos que tienen la misma altura. Use software de computadora para determinar la configuración de la estructura de soporte. La tabla debe contener las cantidades adimensionales $h/L, x_{max}/L, T_{max}/wL$ y T_{min}/wL para valores de c/L desde 0.2 hasta 0.5 con incrementos de 0.025, y desde 0.5 hasta 1, con incrementos de 0.5.

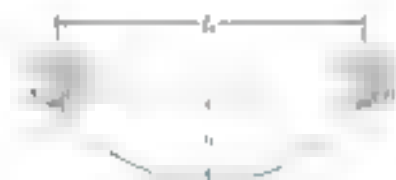


Figura P7.C8

7.C9 Utilice software para resolver el problema 7.132 con valores de P entre 0 y 50 N con incrementos de 5 N.



Figura P7.C7

La fuerza de fricción que opone a la

deslizamiento. A la la posibilidad de que ocurran deslizamientos, como cuando el terreno se desliza por una pendiente a sobre riesgo de

CAPÍTULO

8

Fricción



Si se incrementa la fuerza P también se incrementa la fuerza de fricción F la cual continúa oponiéndose a P hasta que su magnitud alcanza un cierto valor máximo F_m (figura 8.1c). Si P se incrementa aún

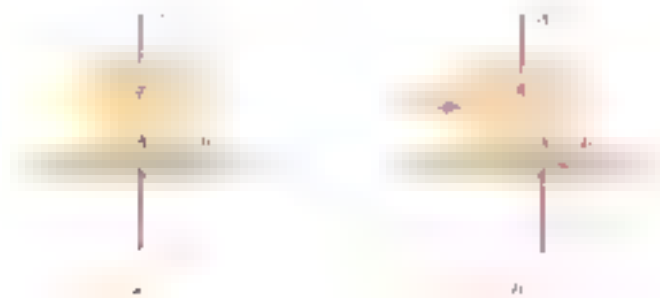


Figura 8.1

mayor la fuerza F también aumenta la fuerza de equilibrio y el bloque comienza a moverse. En cuanto empieza a moverse el bloque la magnitud de F disminuye de F_m a un valor menor F_k . Lo anterior se debe a que existe una menor interpenetración entre las irregularidades de las superficies en contacto cuando dichas superficies se deslazan una con respecto a la otra. A partir de este momento el bloque comienza a moverse y esta es la fuerza de fricción cinética, la cual permanece constante. Estas propiedades de fricción con respecto a P y F se denominan **fuerza de fricción estática**, permanece constante.

La evidencia experimental muestra que el máximo valor F_m de la fuerza de fricción estática es proporcional a la compresión normal N de la superficie de la superficie. Así, se tiene que:

$$F_m = \mu_s N \quad (8.1)$$

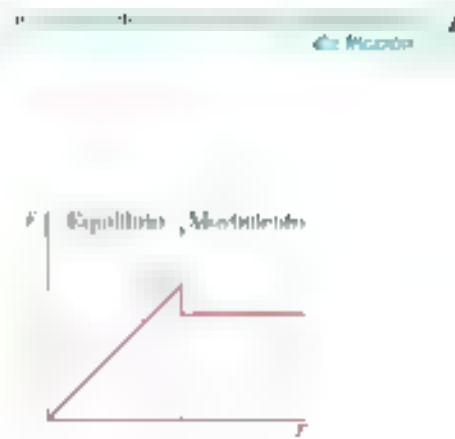
donde μ_s es una constante denominada **coeficiente de fricción estática**. En forma similar la magnitud de la fuerza de fricción cinética puede expresarse de la siguiente forma:

$$F_k = \mu_k N \quad (8.2)$$

donde μ_k es una constante denominada **coeficiente de fricción cinética**. Los coeficientes de fricción μ_s y μ_k dependen en gran medida de las superficies en contacto y no que depende en un menor grado de la rugosidad de las superficies y en el contacto. Como los coeficientes de fricción dependen de la naturaleza exacta de las superficies, sus valores casi nunca se conocen con una precisión mayor a 5 por ciento. En los ejemplos 8.1 se presentan algunos problemas de fricción estática y cinética.

En un problema similar que se presenta se incrementa la magnitud F de la fuerza de fricción desde 0 hasta F_m , el punto de aplicación A de la resultante N de las fuerzas de fricción se mueve hacia la derecha de manera que las pares formados, respectivamente, por P y F y por N y N permanecen en equilibrio. Si N alcanza el punto B antes que F alcance su valor máximo F_m , el bloque se volcará con respecto a B antes de que pueda comenzar a deslizarse (ver problemas 8.15 y 8.16).

www.geocienciasvirtuales.blogspot.com.co



de los tres. El coeficiente de fricción estática es de 0,25 por ende, los coeficientes de fricción son: 0,25 para el caso de fricción estática y 0,20 para el caso de fricción dinámica. Como los coeficientes de fricción son cantidades adimensionales, los valores proporcionados en la tabla 8.1 se pueden utilizar tanto en unidades del SI como con las unidades de uso común en Estados Unidos.

Tabla 8.1. Valores aproximados de los coeficientes de fricción estática para superficies secas

Metal sobre metal	0,15-0,60
Metal sobre madera	0,20-0,60
Metal sobre piedra	0,30-0,70
Metal sobre cuero	0,30-0,60
Madera sobre madera	0,25-0,50
Madera sobre cuero	0,25-0,50
Piedra sobre piedra	0,40-0,70
Tierra sobre tierra	0,20-1,00
Hule sobre concreto	0,50-0,80

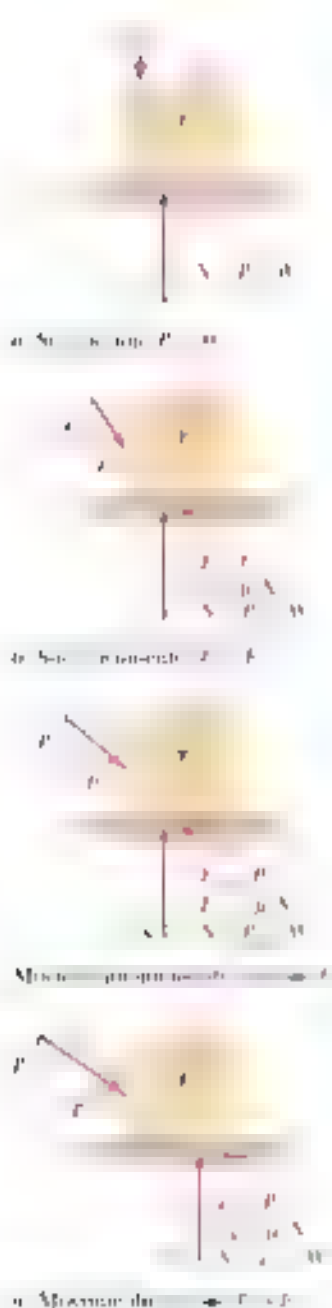


Figura 8.2

Con base en la descripción que se expuso en los párrafos anteriores, se puede afirmar que puede ocurrir cuatro situaciones diferentes cuando un cuerpo rígido está en contacto con una superficie horizontal:

1. Las fuerzas aplicadas sobre el cuerpo no tienden a moverlo a lo largo de la superficie de contacto; por tanto, no hay fuerza de fricción (figura 8.2a).
2. Las fuerzas aplicadas tienden a mover el cuerpo a lo largo de la superficie de contacto pero no son lo suficientemente grandes para ponerlo en movimiento. La fuerza de fricción F que se ha desarrollado puede encontrarse resolviendo las ecuaciones de equilibrio para el cuerpo. Como no hay evidencia de que F haya alcanzado su valor máximo, no se puede utilizar la ecuación $F_m = \mu_s N$ para determinar la fuerza de fricción (figura 8.2b).
3. Las fuerzas aplicadas hacen que el cuerpo esté a punto de comenzar a deslizarse, en este momento se dice que el movimiento es inminente. La fuerza de fricción F ha alcanzado su valor máximo F_m y, junto con la fuerza normal N , equilibra las fuerzas aplicadas. Se pueden utilizar tanto las ecuaciones de equilibrio como la ecuación $F_m = \mu_s N$. También es necesario señalar que la fuerza de fricción tiene un sentido opuesto al sentido del movimiento inminente (figura 8.2c).

El cuerpo se desliza bajo la acción de las fuerzas aplicadas y ya no se pueden aplicar las ecuaciones de equilibrio. Sin embargo, ahora F es igual a F_k y se puede utilizar la ecuación $F_k = \mu_k N$. El sentido de F_k es opuesto al sentido del movimiento (figura 8.2d).

B.3 ANGULOS DE FRICCIÓN

[illegible]

$$\lim \phi_s = \frac{F_m}{N} = \frac{\mu_s V}{N}$$

$$\lim \phi_s = \mu_s \quad (5.3)$$

Se puede demostrar que H_2 es el grupo de homología de la superficie de Riemann que se obtiene al cortar \mathbb{C}^n por la variedad V y unir los bordes de la variedad V por un camino que no pasa por V . Este camino se llama *camino de unión*. En la figura 6.3f se muestra un ejemplo de un camino de unión en la geometría de la figura 6.3a.

$$\tan \phi_2 = \frac{P_2}{N} = \frac{\mu_2 \lambda}{N}$$

[illegible]

Si se continúa incrementando el ángulo de inclinación el movimiento será únicamente por resaca. En ese momento el agua



Figure 10.3

entonces se iguala $\mu_s N$ y luego se suman las partes con la fuerza normal N como en el diagrama de cuerpo libre y se resuelve las ecuaciones de movimiento (figura 8.5a). Después se analiza el caso en que F tiene un valor igual $F = F_m$ de la fuerza de fricción estática máxima $F_m = \mu_s N$. Si F es menor o igual que F_m , el cuerpo permanecerá en reposo. Si el valor de F es mayor que F_m , el cuerpo puede moverse al espullarse y ocurre el movimiento; entonces, la magnitud real de la fuerza de fricción es $F_k = \mu_k N$.

En los problemas del *tipo de ejemplo*, todas las fuerzas que actúan están dadas y se sabe que el problema se puede resolver si se determina el valor del coeficiente de fricción estática. Aquí, incluso si se detecta una fuerza de fricción la fuerza normal es un dato que hay que tener presente y resolviendo las ecuaciones de movimiento (figura 8.5b) como se sabe el valor mínimo para F con el valor máximo de F puede obtenerse el coeficiente de fricción que debe ser menor o igual a $F_m = \mu_s N$.

En los problemas del *tipo de ejemplo* se proporciona el coeficiente de fricción estática y se sabe que el movimiento en una dirección dada es imminente se debe obtener una magnitud de la fuerza que causa la fuerza que mueve. La fuerza de fricción se debe mostrar en el diagrama de cuerpo libre con la siguiente guía: *al moverse hacia adelante y hacia atrás*, así $F_k = \mu_k N$ hasta N y entonces se pueden escribir las ecuaciones de movimiento y se puede determinar la fuerza de fricción.

Como se señaló en la sección solo están presentes tres fuerzas por lo que puede ser más convenientemente representar la reacción de la superficie por medio de una sola fuerza R y resolver el problema dibujando un triángulo de fuerzas. Una solución de este tipo se encuentra en el problema resuelto 8.2.

Cuando dos cuerpos A y B están en contacto (figura 8.6a), las fuerzas de reacción respectivas respectivamente por A sobre B y por B sobre A son iguales y opuestas en dirección N y en A como en el diagrama de cuerpo libre correspondiente a ambos cuerpos y importante recordar la fuerza de reacción comparten su sentido correcto. Por tanto, si uno se mueve hacia el este de A respecto a B , *entonces la fuerza sobre B por parte de A es hacia el este*. *Al moverse hacia el este de A hacia el este de B* (figura 8.6b). Es importante la fuerza de reacción que comparten B sobre A es hacia el este (figura 8.6c). (Observe que el movimiento de A visto desde B es en *movimiento relativo*). Por lo tanto, si el cuerpo A está hacia el este de B, entonces *movimiento* relativo que A tiene con movimiento relativo con respecto a B. Así como cuando B como A se está moviendo hacia el este de A B se está moviendo hacia el este de A y se el movimiento visto desde B el cuerpo A se mueve hacia atrás.

En este sentido, es el mismo que el del movimiento de B visto desde A.

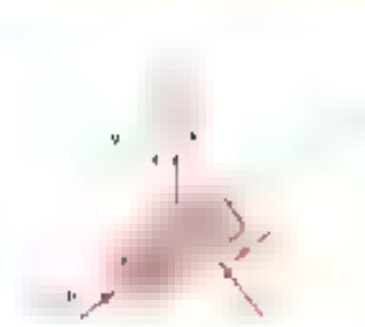


Figura 8.6



PROBLEMA RESUELTO 8.1

Como se ilustra en la figura, una fuerza de 100 lb se aplica a un bloque en la 100 lb por la cuerda hacia arriba, un plano inclinado. Las fricciones de fricción entre el bloque y el plano son $\mu = 0.25$, $\mu = 0.25$. ¿Qué tan grande es el bloque está en equilibrio y encuentre el valor de la fuerza de fricción.



SOLUCIÓN

Fuerza requerida para mantener el equilibrio. Primero se determinará el valor de la fuerza de fricción que se requiere para mantener el equilibrio. La fuerza que se requiere para la normal se puede encontrar de la siguiente manera:

$$+\nearrow \Sigma F_x = 0: \quad 100 \text{ lb} - \frac{3}{4}(300 \text{ lb}) + F = 0$$

$$F = 50 \text{ lb} \quad F = 50 \text{ lb}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad N - 200 \text{ lb} = 0$$

$$N = 200 \text{ lb} \quad N = 200 \text{ lb}$$

La fuerza F requerida para mantener el equilibrio es una fuerza de 50 lb de la cuerda hacia arriba, lo que se puede encontrar de la siguiente manera:

Fuerza máxima de fricción. La magnitud de la fuerza máxima de fricción que puede desarrollarse es

$$F_m = \mu N \quad F_m = 0.25(200 \text{ lb}) = 50 \text{ lb}$$

Como el valor de la fuerza requerida para mantener el equilibrio (50 lb) es menor que el valor máximo que se puede obtener (50 lb), no se mantendrá el equilibrio.

Valor real de la fuerza de fricción. La magnitud de la fuerza de fricción que realmente se tiene se determina de la siguiente forma:

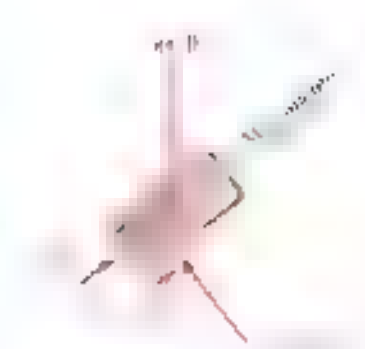
$$F_{\text{real}} = F = \mu N$$

$$= 0.25(200 \text{ lb}) = 50 \text{ lb}$$

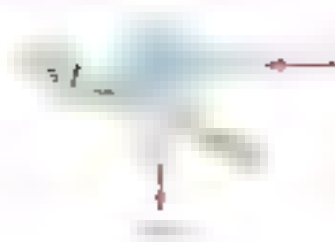
La fuerza de fricción que se requiere para mantener el equilibrio es una fuerza de 50 lb, lo que se puede encontrar de la siguiente manera:

Es necesario saber que la fuerza que se requiere para mantener el equilibrio es la resultante de todas las fuerzas es

$$\sqrt{(300 \text{ lb})^2 + (100 \text{ lb})^2} = 316 \text{ lb}$$



PROBLEMA RESUELTO 8.2



Das fuerzas actúan sobre un bloque de apoyo como se muestra en la figura. Se sabe que el peso del bloque es de 800 N, el ángulo $\alpha = 35^\circ$ y el ángulo $\theta = 30^\circ$. Los coeficientes de fricción son $\mu_s = 0.35$ y $\mu_k = 0.25$. determine: a) la fuerza P que se requiere para hacer que el movimiento del bloque hacia arriba a lo largo del plano inclinado sea inminente b) la fuerza de fricción cuando el bloque está en reposo c) la fuerza de fricción cuando la P es suficiente para que el bloque se deslice hacia abajo.

SOLUCION

Para resolver este problema primero se debe considerar un diagrama de cuerpo libre del bloque y un triángulo de fuerzas que muestra la fuerza vertical de 800 N, la fuerza horizontal P y la fuerza R que actúa en el plano inclinado sobre el bloque. En cada uno de los casos considerados se debe determinar la fuerza R y luego encontrar P que es perpendicular a la fuerza de 800 N, el triángulo de fuerzas es un triángulo rectángulo, el cual puede resolverse de manera fácil para encontrar P . Se debe recordar que la fuerza de fricción R la fuerza P se debe aplicar desde el punto de aplicación y debe estar en la dirección de movimiento.

a) Fuerza P para que el bloque empiece a moverse hacia arriba



$$P = (800 \text{ N}) \tan 44.29^\circ$$

$$P = 790 \text{ N} \leftarrow$$

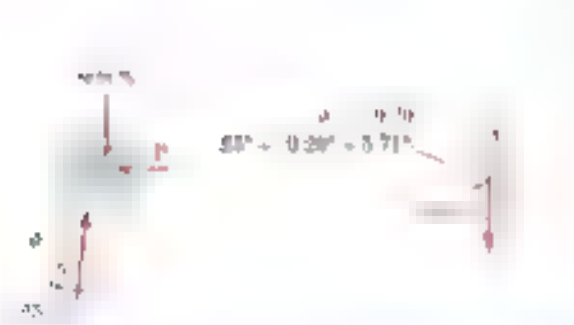
b) Fuerza P para mantener al bloque en movimiento



$$P = (800 \text{ N}) \tan 39.34^\circ$$

$$P = 649 \text{ N} \leftarrow$$

c) Fuerza P para evitar que el bloque se deslice hacia abajo



$$P = (800 \text{ N}) \tan 5.71^\circ$$

$$P = 80 \text{ N} \leftarrow$$



PROBLEMA RESUELTO B 3

La estructura puede soportar un $P = 100$ kN y puede volcar hacia cualquiera de los lados. El coeficiente de fricción es 0.25. Se debe encontrar el peso mínimo W que se puede soportar en la carga W sin que la estructura vuelque. El peso de la estructura se desprecia.



SOLUCION

Diagrama de cuerpo libre. Se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la estructura. Como W se coloca al centro, el centro de gravedad coincide con el centro de la estructura. La estructura está sujeta a las reacciones en los puntos A y B han alcanzado sus valores máximos:

$$\begin{aligned} F &= \mu N_A = 0.25 N_A \\ F_B &= \mu N_B = 0.25 N_B \end{aligned}$$

Ecuaciones de equilibrio

$$\begin{aligned} +\sum F_x &= 0 & N_B - N_A &= 0 \\ N_B &= N_A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} +\sum F_y &= 0 & F_A + F_B - W &= 0 \\ 0.25 N_A + 0.25 N_B &= W \end{aligned}$$

Así, como se ha encontrado que N_B es igual a N_A ,

$$\begin{aligned} 0.25 N_A + 0.25 N_A &= W \\ N_A &= 2W \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} +\sum M_B &= 0 & N_A(6 \text{ m}) - F_A(3 \text{ m}) - W(3 \text{ m}) &= 0 \\ 6N_A - 3(0.25N_A) - W(3) &= 0 \\ 6(2W) - 0.75(2W) - W(3) &= 0 \end{aligned}$$

Se puede ver que la ecuación no tiene solución, por lo que la estructura no puede soportar la carga W sin que se vuelque.

◀ ▶ ↺

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

Por esta definición se excluyen los cuerpos que estén en la zona de fricción estática. Así mismo el estado de fricción no se cambia al pasar de la zona de fricción estática a la zona de fricción cinética, ya que en la zona de fricción estática los cuerpos están en reposo y en la zona de fricción cinética los cuerpos están en movimiento.

A. **Al resolver problemas que involucran fricción estática**, se deben tomar en cuenta los siguientes factores:

1. La fuerza de fricción estática F_e puede ser cualquier valor entre 0 y $F_{e\max}$ se puede decir que F_e es una fuerza de fricción estática que actúa en la zona de fricción estática. La fuerza de fricción estática F_e es una fuerza de fricción que actúa en la zona de fricción estática. La fuerza de fricción estática F_e es una fuerza de fricción que actúa en la zona de fricción estática.

2. La fuerza de fricción estática F_e es una fuerza de fricción que actúa en la zona de fricción estática. La fuerza de fricción estática F_e es una fuerza de fricción que actúa en la zona de fricción estática.

3. La fuerza de fricción estática F_e es una fuerza de fricción que actúa en la zona de fricción estática. La fuerza de fricción estática F_e es una fuerza de fricción que actúa en la zona de fricción estática.

4. La fuerza de fricción estática F_e es una fuerza de fricción que actúa en la zona de fricción estática. La fuerza de fricción estática F_e es una fuerza de fricción que actúa en la zona de fricción estática.

5. La fuerza de fricción estática F_e es una fuerza de fricción que actúa en la zona de fricción estática. La fuerza de fricción estática F_e es una fuerza de fricción que actúa en la zona de fricción estática.

6. La fuerza de fricción estática F_e es una fuerza de fricción que actúa en la zona de fricción estática. La fuerza de fricción estática F_e es una fuerza de fricción que actúa en la zona de fricción estática.

7. La fuerza de fricción estática F_e es una fuerza de fricción que actúa en la zona de fricción estática. La fuerza de fricción estática F_e es una fuerza de fricción que actúa en la zona de fricción estática.

8. La fuerza de fricción estática F_e es una fuerza de fricción que actúa en la zona de fricción estática. La fuerza de fricción estática F_e es una fuerza de fricción que actúa en la zona de fricción estática.

9. La fuerza de fricción estática F_e es una fuerza de fricción que actúa en la zona de fricción estática. La fuerza de fricción estática F_e es una fuerza de fricción que actúa en la zona de fricción estática.

Problemas

0.1 Determine si el bloque mostrado en la figura está en equilibrio y en tal caso encuentre el valor de la fuerza horizontal P y $P = 150 \text{ N}$.



Figura P8.1 y P8.2

0.2 Determine si el bloque mostrado en la figura está en equilibrio y en tal caso encuentre el valor de la fuerza horizontal P y $P = 90 \text{ N}$.



Figura P8.3, P8.4 y P8.5

0.3 Determine si el bloque mostrado en la figura está en equilibrio y en tal caso encuentre el valor de la fuerza horizontal P y $P = 400 \text{ N}$.

0.4 Determine si el bloque mostrado en la figura está en equilibrio y en tal caso encuentre el valor de la fuerza horizontal P y $P = 200 \text{ N}$.

0.5 Si se sabe que $\theta = 45^\circ$, determine el rango de valores de P para los cuales se mantiene el equilibrio.

0.6 Determine el rango de valores de P para los cuales se mantiene el equilibrio del bloque que se muestra en la figura.



Figura P8.6

0.7 Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre el bloque de 15 kg y el plano inclinado que se muestra en la figura es $\mu_s = 0.25$, determine a) el valor mínimo de P necesario para mantener al bloque en equilibrio y b) el valor correspondiente de θ .

0.8 Determine el mínimo valor de θ requerido para que el bloque empujado en la figura permanezca en equilibrio. Considere los siguientes valores de θ menores que 90° .



Figura P8.7



Figura P8.8

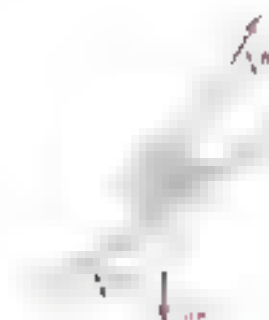


Figura P8.9

8.9 Los bloques A y B tienen un peso de 50 lb y 20 lb, respectivamente, con $\mu_s = 0.40$ y $\mu_k = 0.25$. Si se sabe que $\theta = 65^\circ$, determine el mínimo valor de P necesario *a)* para que el bloque empiece a moverse hacia arriba sobre el incl. *b)* para evitar que el bloque se mueva hacia abajo.

8.10 El bloque A de 50 lb está unido al cable AB y descansa sobre una banda en movimiento. Si $\mu_s = 0.25$ y $\mu_k = 0.20$, determine la magnitud de la fuerza horizontal P que debe aplicarse a la banda para mantener su movimiento *a)* hacia la derecha, *b)* hacia la izquierda.



Figura P8.10

8.11 y 8.12 Los coeficientes de fricción entre todas las superficies de contacto son $\mu_s = 0.40$ y $\mu_k = 0.30$. Determine la fuerza horizontal P requerida para que el bloque de 30 lb *a)* empiece a moverse si el ángulo θ se establece como se muestra en las figuras *a)* y *b)* se retira.



Figura P8.11



Figura P8.12

8.13 Los paquetes A, B y C se colocan sobre una banda transportadora que se encuentra en reposo. Entre la banda y los dos paquetes A y C los coeficientes de fricción son $\mu_s = 0.40$ y $\mu_k = 0.20$, y entre los paquetes B y la banda los coeficientes son $\mu_s = 0.30$ y $\mu_k = 0.15$. Las masas de los paquetes A, B y C son 20 lb, 10 lb y 30 lb, respectivamente. Si la banda comienza a moverse hacia la derecha con una aceleración constante de 2 m/s^2 , determine la fuerza horizontal P que debe aplicarse al paquete A para mantenerlo en reposo. *a)* Si el paquete B está sobre el paquete A, *b)* si el paquete B está sobre el paquete C.



Figura P8.13

8.14 Resuelva el problema 8.13, y ahora suponga que el paquete B se coloca sobre el paquete A, los dos paquetes A y C.

P.15 En la figura se muestra un gabinete de 120 lb que se monta sobre ruedas. Las ruedas se pueden fijar para evitar su rotación. El coeficiente de fricción estática entre el piso y cada rueda es de 0.30. Si $h = 35$ in, determine el ángulo θ de la fuerza P que puede ser aplicada al gabinete de la manera que se muestra en la figura para que las ruedas en B estén fijas y las ruedas en A pueden girar libremente y c) las ruedas en A están fijas y las ruedas en B pueden girar libremente.

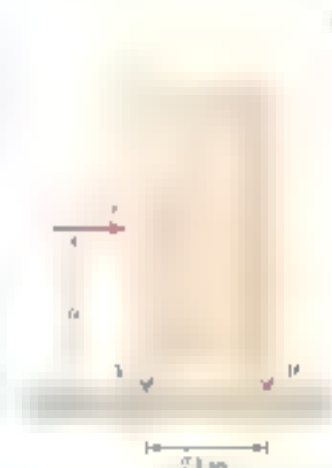


Figura P8.15 y P8.16

P.16 En la figura se muestra un gabinete de 120 lb que se monta sobre 4 ruedas. Las ruedas se pueden fijar para evitar su rotación. El coeficiente de fricción estática entre el piso y cada rueda es de 0.30. Ahora suponga que las ruedas en A están fijas y las ruedas en B pueden girar libremente. Determine el ángulo θ del gabinete de la manera que se muestra en la figura para que el gabinete no se vuelque.

P.17 El cilindro de peso W y radio r que se muestra en la figura tiene dos cuerdas fijadas en su parte superior a una distancia h del eje de rotación. Determine la magnitud del par máximo M que puede aplicarse al cilindro sin que éste rote.



Figura P8.17 y P8.18

P.18 En la figura se muestra un cilindro de peso W y radio r que se apoya en los puntos A y B a una distancia h del eje de rotación. Determine la magnitud del par máximo M que puede aplicarse al cilindro sin que éste rote. Suponga que el coeficiente de fricción estática es $\mu = 0.30$ en A y $\mu = 0.20$ en B .

P.19 El cilindro hidráulico mostrado en la figura ejerce una fuerza de 4 kN hacia la izquierda en el punto B y una fuerza de 3 kN hacia el punto E . Determine la magnitud del par M requerido para rotar el tambor a velocidad constante en el sentido de las manecillas del reloj.

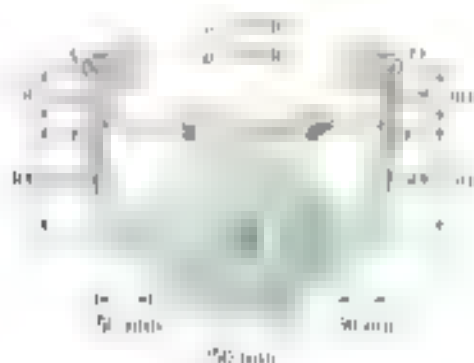


Figura P8.19 y P8.20

P.20 Un par M de 100 N \cdot m de magnitud se aplica sobre el tambor como se muestra en la figura. Determine la fuerza mínima que debe aplicarse al cilindro hidráulico sobre los puntos B y E para que el tambor rote.

P.21 La escalera AB de 6.5 m de longitud se apoya sobre la pared mostrada en la figura. Suponga que el coeficiente de fricción estática μ en B es cero y determine el valor mínimo de μ en A para que la escalera se mantenga en equilibrio.

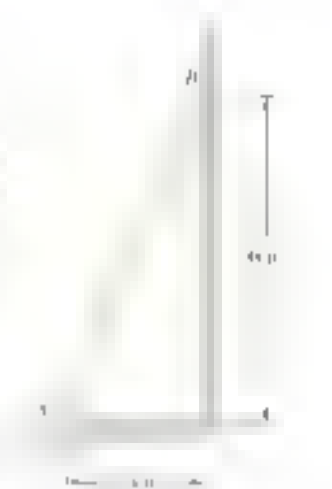


Figura P8.21 y P8.22

P.22 La escalera AB de 6.5 m de longitud se apoya sobre la pared mostrada en la figura. Si el coeficiente de fricción estática μ es el mismo en A y B , determine el valor mínimo de μ para que la escalera se mantenga en equilibrio.

8.23 y 8.24 El extremo A de la varilla AB se sujeta a un torque de magnitud T y tiene la construcción AC que se muestra sobre la superficie horizontal. Los centros que en B se sostiene mediante la cuerda BC . Si se sabe que los coeficientes de fricción son $\mu_1 = 0.40$ y $\mu_2 = 0.30$, determine *a*) el valor máximo de θ para que el movimiento sea inminente y *b*) el valor correspondiente de la tensión en la cuerda.

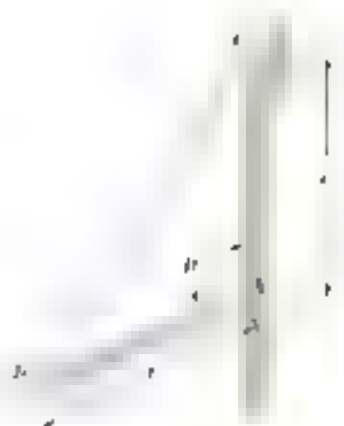


Figura P8.23



Figura P8.24

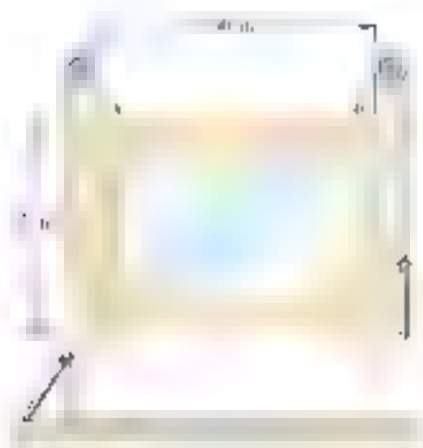


Figura P8.25

8.25 Una ventana rectangular que pesa 10 lb se sostiene normalmente mediante los contrapesos de 4 lb. Se sabe que el ángulo θ es de 45° después de que uno de los contrapesos se rompe. Determine el valor mínimo para el ángulo θ para que la ventana no se caiga. (Se asume que la ventana no se cae por sí misma, pero que el ángulo θ que está en la posición en la que se muestra en la figura es de 45°).

8.26 El par de tenazas que se muestra en la figura se usa para levantar el bloque de concreto de 500 lb. Determine el coeficiente de fricción estática entre el bloque y las tenazas en P y Q .



Figura P8.26

8.27 La placa $ABCD$ que se muestra en la figura se sujeta a la fuerza P aplicada en el punto E . Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre la placa y el lado de soporte BC es 0.40 , determine la fuerza que debe aplicarse en E para que la placa permanezca en equilibrio.

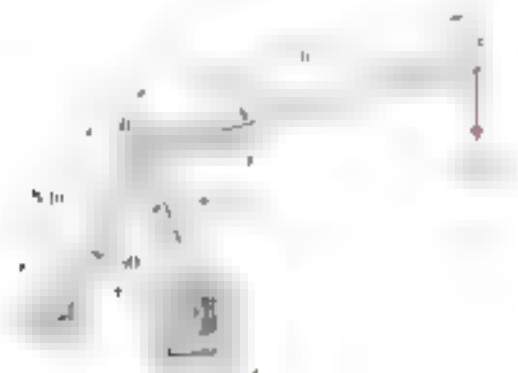


Figura P8.27

8.28 Una leva de 100 mm de radio se usa para controlar el movimiento de la placa CD como se muestra en la figura. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre la leva y la placa es de 0.45 y sin tomar en cuenta la fricción en los apoyos, determine la fuerza P que debe aplicarse para mantener el movimiento de la placa de espesor igual a 20 mm y b) el espesor máximo de la placa con que la leva puede ser accionada lo suficiente para que la placa no se mueva sin importar cuán grande sea el valor de P .

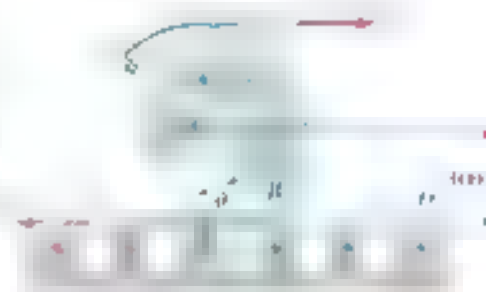


Figura P8.28

8.29 En la figura se muestra una barra delgada de longitud L , colocada entre la caja C y la pared vertical AB como una argolla P en el extremo A . Si se sabe que el coeficiente de fricción estática es de 0.20 tanto en B como en C , determine el rango de valores de la relación L/a para los cuales se mantiene el equilibrio.



Figura P8.29

8.30 La placa $ABCD$ de 50 lb se fija en A y D a colarines, los cuales pueden deslizarse libremente sobre la barra vertical como se muestra en la figura. Si el coeficiente de fricción estática entre los colarines y la barra es de 0.40, determine si la placa se puede mover a la posición mostrada cuando a) $a = 20$ in, b) $a = 30$ in, c) $a = 40$ in. $F = 0.40$, $F = 0.40$, $F = 0.40$.



Figura P8.30

8.31 En el problema 8.30 determine el rango de valores para la magnitud F de la fuerza horizontal aplicada en B con los cuales la placa se mueva hacia abajo.



Figura P8.32

8.32 En la figura se muestra un tubo de 60 mm de diámetro que se aprieta mediante la llave Stalwart. Las poleas y las cuerdas mostradas en la parte superior se sujetan a la llave en los puntos A y C. Se sabe que el coeficiente de fricción estática entre el tubo y la llave es de 0.3. Determine el coeficiente de fricción mínimo requerido en A y en C.

8.33 La llave de la llave Stalwart se muestra en la parte superior de la figura. El tubo de 60 mm de diámetro que se aprieta mediante la llave Stalwart se muestra en la parte inferior de la figura. Se sabe que el coeficiente de fricción estática entre el tubo y la llave es de 0.3. Determine el coeficiente de fricción mínimo requerido en A y en C.

8.34 Una barra de 0.6 m que pesa 200 N se sujeta a una fuerza horizontal P en el punto B. La barra está apoyada en el punto A y en el punto C. Se sabe que el coeficiente de fricción estática entre la barra y el punto A es de 0.3 y entre la barra y el punto C es de 0.4. Se sabe que la superficie superior de la barra es lisa. Determine el valor de P para el cual la barra está a punto de moverse. La barra se mueve hacia la derecha.



Figura P8.34

8.35 a) Demuestre que la viga en la parte superior de la figura se mueve hacia la izquierda. b) Demuestre que la viga en la parte inferior de la figura se mueve hacia la derecha. Se sabe que el coeficiente de fricción estática entre la viga y el punto A es de 0.3 y entre la viga y el punto B es de 0.4. Se sabe que la superficie superior de la viga es lisa. Determine el valor de P para el cual la viga está a punto de moverse. La viga se mueve hacia la izquierda.

8.36 Si el coeficiente de fricción estática entre el collarín y la barra es de 0.35, determine el rango de valores de P para los cuales se mantiene el equilibrio cuando $\theta = 30^\circ$ y $M = 20 \text{ N}\cdot\text{m}$.



Figura P8.36 y P8.37

8.37 Si el coeficiente de fricción estática entre el collarín y la barra es de 0.35, determine el rango de valores de P para los cuales se mantiene el equilibrio cuando $\theta = 60^\circ$ y $P = 200 \text{ N}$.

8.38 En la figura se muestra una barra delgada AB de longitud $l = 600$ mm unida a un eje vertical AC a una distancia $a = 30$ mm desde la barra vertical sobre la cual se desliza el collarín. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre el collarín y la barra vertical es de 0.25 y si (tomar en cuenta el radio de la barra), determine el rango de valores de P para los cuales se mantiene el equilibrio cuando $Q = 100$ N y $\theta = 70^\circ$.

8.39 Dos bloques A y B de 10 lb están conectados por una barra delgada de peso despreciable. El coeficiente de fricción estática es de 0.30 entre todas las superficies de contacto y la barra forma un ángulo $\theta = 70^\circ$ con la vertical. a) Muestre que el sistema está en equilibrio cuando $P = 0$. Determine el máximo valor de P para el cual se mantiene el equilibrio.

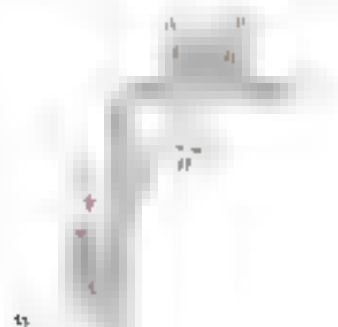


Figura P8.39



Figura P8.38

8.40 Dos tablas uniformes idénticas, cada una con un peso de 40 lb, se ven sujetas como se muestra en la figura. Cada una se sostiene en la figura. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre todas las superficies es de 0.10, determine el rango de valores de la fuerza P para la cual se mantiene el equilibrio. b) la superficie en la que el movimiento será inminente.



Figura P8.40

8.41 Dos barras idénticas de 5 ft de largo están conectadas mediante un pasador en B y se apoyan sobre los puntos A y C en una superficie horizontal como se muestra en la figura. Si se denota con μ_s el coeficiente de fricción estática en A , B y C , determine el valor mínimo de μ_s para el cual se mantiene el equilibrio.



Figura P8.41

8.42 Dos bloques A y B de 8 kg, que descansan sobre superficies exactamente horizontales, se conectan por una barra de masa despreciable. Si se sabe que la barra se inclina hacia el punto P que aparece en la figura, determine el valor de P para el que se inicia el movimiento, y cuál es dicho movimiento, cuando el coeficiente de fricción estática entre todas las superficies es a) $\mu_s = 0.40$, b) $\mu_s = 0.5$.



Figura P8.42

8.43 Una barra delgada de acero de 225 mm de longitud se coloca dentro de un tubo como se muestra en la figura. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre la barra y el tubo es $\mu_s = 0.4$, determine el valor mínimo de θ para el cual la barra no cae dentro del tubo.

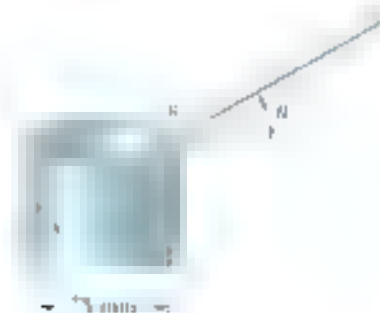


Figura P8.43

8.44 En el problema 8.43 determine el valor mínimo de θ para el cual la barra no cae fuera del tubo.

8.45 En la figura se muestran dos barras delgadas de peso despreciable unidas mediante un perno en C y conectadas a los bloques A y B con un peso de 20 lb cada uno. Se sabe que $\theta = 30^\circ$ y el coeficiente de fricción estática entre los bloques y la superficie horizontal es de 0.30. determine el valor máximo de P para el cual se mantiene el equilibrio.



Figura P8.45

8.5. CUNAS

Las cunas son dispositivos mecánicos que se utilizan para no permitir que un bloque se deslice sobre otros bloques o sobre las paredes. En su diseño se debe tener en cuenta el ángulo de fricción entre las superficies en contacto. En un caso, un bloque puede apoyar la parte superior de otro bloque, por lo que las superficies en contacto pueden ser horizontales o inclinadas. Por tanto, las cunas se utilizan para hacer que los objetos estén en posición de equilibrio estático de una máquina.

Considere el bloque A mostrado en la figura 8.7a. Dicho bloque descansa sobre una pared vertical B y sobre un bloque C que reposa sobre la zona C. Una segunda pared D se desliza horizontalmente sobre la pared B. La fuerza P que actúa sobre el bloque C para mover el bloque. Se supone que el peso W del bloque es conocido y se conoce la inclinación de la pared D a partir de la medida del bloque expresada en kilogramos.

Las fuerzas que actúan sobre el bloque A son la fuerza C que actúa sobre el bloque A, la fuerza B y la fuerza P que actúan sobre el bloque A. Las fuerzas B y C son fuerzas normales y de fricción. Las superficies de contacto con la pared B y con la zona C. Las magnitudes de las fuerzas de fricción F y F_c son iguales a μN y μN_c respectivamente. El movimiento del bloque A se representa mostrando las fuerzas de fricción con su sentido correcto. Puesto que el bloque se moverá hacia arriba, la fuerza F ejercida por la pared sobre el bloque debe estar dirigida hacia el eje y . Por otro lado, como la fuerza C se mueve hacia la derecha, el movimiento relativo de A con respecto a C es hacia la izquierda y la fuerza F_c ejercida por C sobre A debe estar dirigida hacia la derecha.

Ahora, considerando al cuerpo libre C en la figura 8.7b, se observan las fuerzas que actúan sobre C: la fuerza C que actúa sobre C, la fuerza B y la fuerza P que actúan sobre C. Las fuerzas B y C son fuerzas normales y de fricción. Las superficies de contacto con la pared B y con la zona C. Las magnitudes de las fuerzas de fricción F y F_c son iguales a μN y μN_c respectivamente. El movimiento del bloque A se representa mostrando las fuerzas de fricción con su sentido correcto. Puesto que el bloque se moverá hacia arriba, la fuerza F ejercida por la pared sobre el bloque debe estar dirigida hacia el eje y .

En un sistema de coordenadas cartesianas, las diagonales de un cuerpo pueden ser paralelas a los ejes x y y . Las fuerzas B y C son fuerzas normales y de fricción. Las superficies de contacto con la pared B y con la zona C. Las magnitudes de las fuerzas de fricción F y F_c son iguales a μN y μN_c respectivamente. El movimiento del bloque A se representa mostrando las fuerzas de fricción con su sentido correcto. Puesto que el bloque se moverá hacia arriba, la fuerza F ejercida por la pared sobre el bloque debe estar dirigida hacia el eje y .

8.6. TORNILLOS DE ROSCA CUADRADA

Los tornillos de rosca cuadrada se utilizan para unir partes y componentes. Su estudio es esencial al análisis de un bloque que se desliza a lo largo de un plano inclinado.

En la figura 8.8 se muestra un tornillo que soporta una carga W y se mueve a lo largo del eje x . La fuerza P que actúa sobre el tornillo es la fuerza que se aplica para moverlo.

www.geocienciasvirtuales.blogspot.com.co



Figura 8.7



Figura 8.8

PROBLEMA RESUELTO 8.4



La posición del bloque B en un momento determinado coincide con la posición que el bloque estaba en el momento en que se aplicó la fuerza P y se desea determinar la fuerza P que se requiere para elevar el bloque B .

SOLUCIÓN

Para cada uno de los estados del problema se elaboran los diagramas de cuerpo libre del bloque B y se aplican las ecuaciones de equilibrio y se cumple la ley de los senos para encontrar las fuerzas elevando. Se observa que como $\mu_s = 0.35$ el ángulo de fricción es

$$\phi_s = \tan^{-1} 0.35 = 19.3^\circ$$

a) Fuerza P para elevar el bloque

Cuerpo libre: Bloque B

$$\frac{R_s}{\sin 109.3^\circ} = \frac{400 \text{ lb}}{\sin 43.4^\circ}$$

$$R_s = 351 \text{ lb}$$

Cuerpo libre: Bloque A

$$\frac{P}{\sin 90^\circ} = \frac{R_s \sin 19.3^\circ}{\sin 27.3^\circ}$$

$$P = 140 \text{ lb}$$

b) Fuerza Q para elevar el bloque

Cuerpo libre: Bloque B

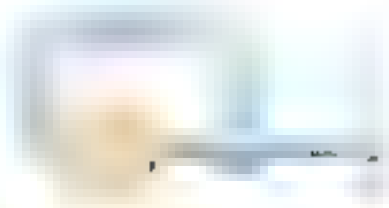
$$\frac{R_s}{\sin 90^\circ} = \frac{400 \text{ lb}}{\sin 27.3^\circ}$$

$$R_s = 541 \text{ lb}$$

Cuerpo libre: Bloque A

$$\frac{Q}{\sin 90^\circ} = \frac{R_s \sin 19.3^\circ}{\sin 27.3^\circ}$$

$$Q = 180 \text{ lb}$$



PROBLEMA RESUELTO B 5

Una prensa se utiliza para mantener juntas dos pliegues de aluminio, como se muestra en la figura. El pistón tiene una masa despreciable sobre la cual se aplican fuerzas iguales y opuestas de 100 N. El momento de inercia de la prensa es $I = 0.001 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Se supone que el coeficiente de fricción es $\mu = 0.3$. Se supone que el aluminio tiene un módulo de elasticidad $E = 70 \text{ GPa}$ y un espesor $t = 2 \text{ mm}$. Determine la deformación por torsión de la prensa y el momento torsional requerido para doblar la prensa.

SOLUCIÓN

a) **Fuerza ejercida por la prensa.** El radio promedio del torulón es $r = 10 \text{ mm}$. El perímetro de la sección es $P = 2\pi r = 0.0628 \text{ m}$. El momento del par: $L = 2(2 \text{ mm}) = 4 \text{ mm}$. El ángulo de avance θ y el ángulo de fricción ϕ , se obtienen considerando:

$$\tan \theta = \frac{L}{2\pi r} = \frac{4 \text{ mm}}{(10\pi \text{ mm})} = 0.1273 \quad \theta = 7.3^\circ$$

$$\tan \phi = \mu = 0.3 \quad \phi = 16.7^\circ$$

La fuerza Q en la barra utilizada al doblar la prensa se representa al torulón se dobla. En este caso, se supone que se obtiene el ángulo de avance θ y el ángulo de fricción ϕ en el momento torsional aplicado.

$$Q(5 \text{ mm}) = 10 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$Q = \frac{10 \text{ N} \cdot \text{m}}{5 \times 10^{-3} \text{ m}} = 2000 \text{ N} = 2 \text{ kN}$$

Mostrar cada fuerza y momento de torsión en la barra. Se supone que la barra se dobla en el ángulo θ y el ángulo de fricción ϕ . La fuerza W que se aplica a la barra se obtiene resolviendo el triángulo.

$$W = \frac{Q}{\sin \theta} = \frac{2 \text{ kN}}{\sin 7.3^\circ} = 17.97 \text{ kN}$$

Se muestra el momento de torsión en la barra. Se supone que la fuerza Q se aplica perpendicularmente a la barra. El momento de torsión en la barra se obtiene a partir del ángulo de avance θ y el ángulo de fricción ϕ .

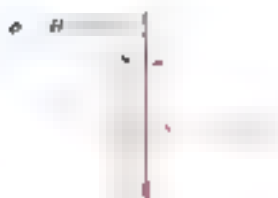
$$Q = W \sin \theta = 17.97 \text{ kN} \sin 7.3^\circ = 2.97 \text{ kN}$$

$$\text{Momento torsional} = Qr = (2.97 \text{ kN})(5 \text{ mm}) = (2.97 \times 10^3 \text{ N})(5 \times 10^{-3} \text{ m}) = 14.85 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\text{Momento torsional} = 14.85 \text{ N} \cdot \text{m}$$



$$\theta = \phi = 16.7^\circ$$



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

El estudio de la adaptación a situaciones de riesgo para la salud de los jóvenes que involucran crisis y *toruillas de riesgo* construido

1. En caso de cambios sustanciales producidos que inducieran a una modificación se debe tener presente lo siguiente:

[illegible]

será imediatamente em cada uma das estas casas

La función f es la función de f en sí misma. Si f es una función, entonces se pueden definir otros tipos de funciones de f y de f en sí misma. Entonces, se pueden definir otros tipos de funciones de f y de f en sí misma. Entonces, se pueden definir otros tipos de funciones de f y de f en sí misma.

[illegible]

El avance y el pase son iguales sólo en tornillos de rosca simple. En un tornillo de rosca doble el avance es el doble del paso.

[illegible]

Problemas

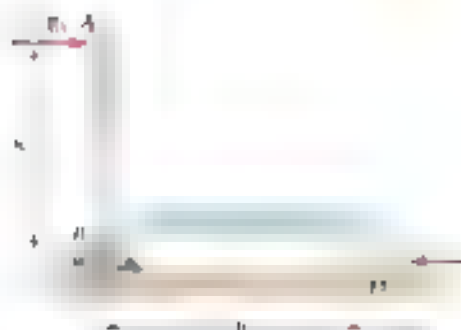


Figura P8.46

8.46 La parte de máquina ABC se sostiene mediante una bisagra sin fricción en B y por medio de una cuña de 10° en C. Si el coeficiente de fricción estática es de 0.34 y el peso de la máquina es de 100 lb, determine la fuerza P requerida para mover la cuña hacia la izquierda y b) las componentes de la reacción correspondiente en B.

8.47 Retorne el problema 8.46, y ahora suponga que la cuña debe moverse a la izquierda.

8.48 y 8.49 Dos cuñas de 30° con masa despreciable se usan para mover un bloque a posición horizontal. Se sabe que si se sabe la fuerza de tracción máxima que se puede aplicar a la cuerda es de 100 lb, determine la fuerza P que debe aplicarse a la barra para mover el bloque en la figura.



Figura P8.48



Figura P8.49

8.50 y 8.51 Como se muestra en las figuras, la altura del extremo de la viga de acero que se sostiene mediante el uso de cables de acero que se anclan a las paredes es $h = 10$ ft. La viga pesa 100 lb y el cable se ancla al extremo de la viga a una distancia x centímetros que se indica sobre el diagrama. La viga pesa 100 lb. El coeficiente de fricción estática entre las superficies de acero es de 0.30 y entre el concreto y el acero es de 0.60. Si el movimiento horizontal de la viga se impide mediante una fuerza Q aplicada en la fuerza P requerida para levantar la viga y b) la fuerza Q correspondiente.

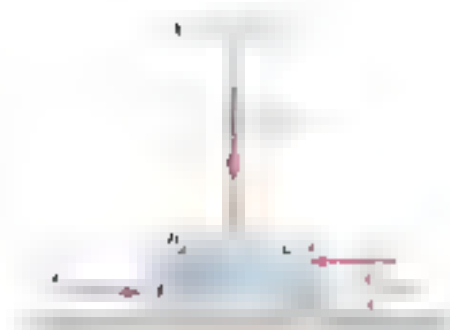


Figura P8.50

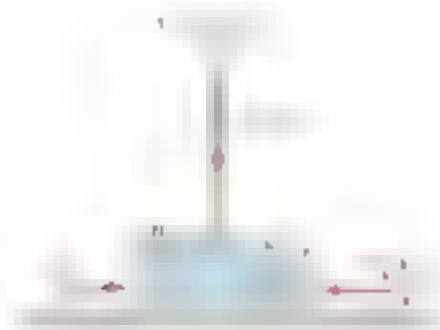


Figura P8.51

8.52 Una rana y la pila de ladrillos se encuentran entre las placas B y C de 100 lb. El coeficiente de fricción estática entre todas las superficies de contacto es de 0.35. Determine la magnitud de la fuerza P requerida para iniciar el movimiento de la rana si las placas tienen la misma libertad para moverse: (a) si la placa C se atornilla de manera segura a la superficie.

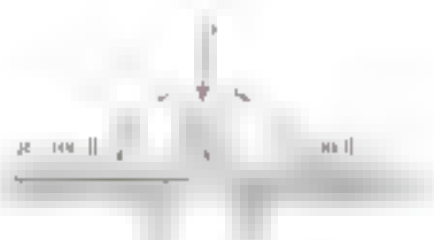


Figura P8.52

8.53 En la figura se muestra un bloque A que sostiene una columna tubular y está apoyado sobre la cuna B. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre las superficies de contacto es de 0.35 y que $\theta = 45^\circ$, determine la fuerza mínima P requerida para levantar el bloque A.

8.54 En la figura se muestran un bloque A que sostiene una columna tubular y una cuna B. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática en todas las superficies de contacto es de 0.25 y que $\theta = 45^\circ$, determine la fuerza mínima P para mover la columna en cualquier dirección.

8.55 En la figura se muestra un bloque A que sostiene una columna tubular y una cuna B. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática en todas las superficies de contacto es de 0.25, si $P = 0$, determine el ángulo θ para el cual la columna se deslizará hacia abajo de la cuna y se apoyará sobre el suelo por la parte vertical sobre el bloque.



Figura P8.53, P8.54 y P8.55

8.56 Una cuna de 12° se usa para separar un anillo partido. El coeficiente de fricción estática entre el anillo y la cuna es de 0.40. Si se sabe que la fuerza sobre la fuerza P es de 100 lb , determine la magnitud de la fuerza P requerida para separar el anillo de la cuna.



Figura P8.56

8.57 Una cuna de 30° debe insertarse debajo del extremo B de la barra AB de 3 kg que se muestra en la figura. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática es de 0.40 entre la cuna y la barra y de 0.20 entre la cuna y el suelo, determine la fuerza mínima P requerida para levantar el extremo B de la barra.



Figura P8.57

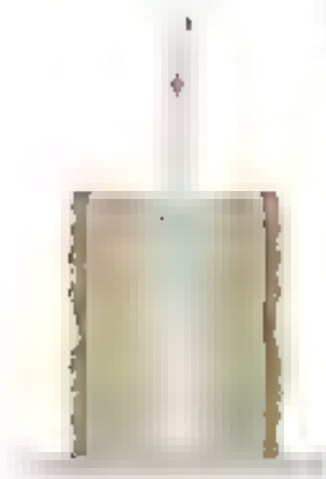


Figura P8.58



Figura P8.60 y P8.61



Figura P8.62

8.58 En la figura se muestra un cubo de $10'$ que se usa para sostener un muro. El coeficiente de fricción estática entre la pared y el suelo es de $\mu_s = 0.2$. Se sabe que el cubo está fijo en la pared y se aplica una fuerza P en $30'$ de la base del cubo. Determine la magnitud de las fuerzas que actúan sobre el cubo después de que fue insertado.

8.59 En la figura se muestra una cuba de forma cilíndrica colocada entre dos placas horizontales que se mueven lentamente una hacia la otra. Determine qué le pasará a la cuba si a) $\mu_s = 0.20$ y b) $\mu_s = 0.30$.



Figura P8.59

8.60 Un cubo de $15'$ se introduce por debajo de un tubo de 30 kg como se muestra en la figura. El coeficiente de fricción estática en todas las superficies es de 0.20 . Demuestre que se presentará deslizamiento entre el cubo y la pared superior. Determine la fuerza P necesaria para mover el cubo.

8.61 Un cubo de $15'$ se introduce por debajo de un tubo de 30 kg como se muestra en la figura. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática en todas las superficies es de 0.20 , determine la magnitud de la fuerza P necesaria para que ocurra deslizamiento en A .

8.62 En la figura se muestra una cuba de $5'$ que debe insertarse por debajo de una base para máquina en B . Si se sabe que el coeficiente de fricción estática en todas las superficies es de 0.20 , determine la fuerza P requerida para iniciar el movimiento de la cuba y b) indique si la base para máquina se deslizará sobre el piso.

8.63 Resuelva el problema 8.62, y ahora suponga que la cuba debe insertarse debajo de la base para máquina en A en lugar de en B .

8.64 Un bloque de 200 N se apoya sobre una cuba de peso despreciable, como se muestra en la figura. El coeficiente de fricción estática μ_s es el mismo en todas las superficies de la cuba y en la pared vertical. Determine la pared vertical se deslizará o no. Se sabe que $P = 400$ N. Determine el valor de μ_s para el cual el bloque comenzará a moverse. Resuelva por primera y verifique la respuesta obtenida.

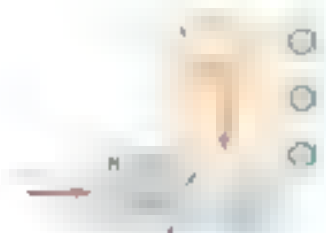


Figura P8.64

8.65 Retorne el problema 8.64, y ahora suponga que los cables se extienden en las direcciones de los ejes para todas las partes y en sentido horario.



Figura P8.64 (repetida)

8.66 Deduzca las siguientes fórmulas que relacionan la carga W y la fuerza P que actúa sobre el muelle en la parte superior de la sección AB a) $P = W \sin \alpha$ si θ es el ángulo entre la carga P y el eje AB , θ es un ángulo que la carga P en el muelle es autoequilibrante y c) $P = W \sin \alpha$ con $\theta = 0$ para todos los valores de α y θ en el muelle.

8.67 El engrane simple de rosca cuadrada que se muestra en la figura tiene (a) radio medio de 1.8 in. y un avance de 0.375 in. El engrane más grande está sometido a un par de torsión constante de 7.2 kip · in. en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre los dos engranes es de 0.12, determine el par de torsión que debe aplicarse al eje AB para que los engranes estén autoequilibrados. Considere también la fricción de los cojinetes en A , B y C .

8.68 En el problema 8.67 determine el par de torsión que debe aplicarse al eje AB para que los engranes estén autoequilibrados si se ignoran las manecillas del reloj.

8.69 Los pernos de alto rendimiento se utilizan para unir las partes de construcción de muchas estructuras de acero. Si la tensión nominal requerida es de 120 ksi y el diámetro nominal es de 1.25 in. y se sabe que el coeficiente de fricción estática es de 0.40, determine el par de torsión requerido que debe aplicarse en el perno y en la fuerza mostrada en la figura. El diámetro medio de la rosca del perno es de 22.6 mm, y su avance es de 2 mm. Considere también la fricción de los cojinetes en A y B para la barra que el perno es de rosca cuadrada.

8.70 En la figura se muestran dos barras fijas A y B cuyos extremos fueran hechos con forma de tornillo de rosca sencilla de 6 mm de radio medio y un avance de 1 mm. La barra A se fija a la pared superior y la barra B a la pared inferior. El coeficiente de fricción estática entre las barras y el mango de la barra A es de 0.2. Determine la magnitud del par que debe aplicarse en el mango para que las dos barras se unan.



Figura P8.70

8.71 Suponga que en el problema 8.70 se usa una rosca derecha en la barra A y B . Determine la magnitud del par que debe aplicarse en el mango para poder girarlo.



Figura P8.67



Figura P8.69



Figura 8.18

ϕ_1 donde ϕ_1 es el ángulo de la figura 8.18 se escribe que $\Sigma M_0 = 0$ por las fuerzas que actúan sobre el cuerpo el cual es sumado se obtiene la magnitud del par M expresado por la siguiente ecuación, por lo tanto tenemos de las diagramas:

$$M = Rr \sin \phi_1 \quad (8.5)$$

Observando para valores pequeños del ángulo la fricción sea ϕ_1 se puede reemplazar por $\tan \phi_1 = \sin \phi_1$ por μ_1 se escribe la fórmula aproximada:

$$M = Rr\mu_1 \quad (8.6)$$

En la situación de ciertos problemas puede ser más conveniente hacer que la línea de acción de R pase por el centro O cuando actuando el momento se genera. En estos se debe agregar un momento $Rr\mu_2$ M tiene misma magnitud que el par M pero de sentido opuesto (figura 8.19) de lo contrario sentido opuesto a la situación de la diagrama.

El caso de par se produce cuando son homogéneo $\mu_1 = \mu_2$ de modo de R se puede disminuir de modo (figura 8.19) y se observa que esta debe ser tangente al círculo que tiene su centro en O y cuyo radio está dado por

$$r_f = r \sin \phi_2 = r\mu_2 \quad (8.7)$$

Dado cuando se tiene el momento de fricción del eje r_f y la distancia r es el radio de las esferas de $r = r_f / \mu_1$

En un eje que transmite soporte axial a las flechas y a las espigas, giran sobre él dos tipos de cojinetes de empuje: 1) *cojinetes de tipo codo* y 2) *cojinetes de collar o radiales* (figura 8.11). En el caso de los cojinetes de collar se desarrollan fuerzas fricción entre las dos superficies de contacto, es decir, entre el eje y el collar. En el caso de los cojinetes de tipo codo, el collar que se desarrolla se genera en las espigas o en las flechas en forma de anillo cuando el extremo de la flecha es hueco. La fricción entre las superficies genera una fuerza de fricción axial que actúa sobre el eje. En otros casos, como en los embragues de disco,

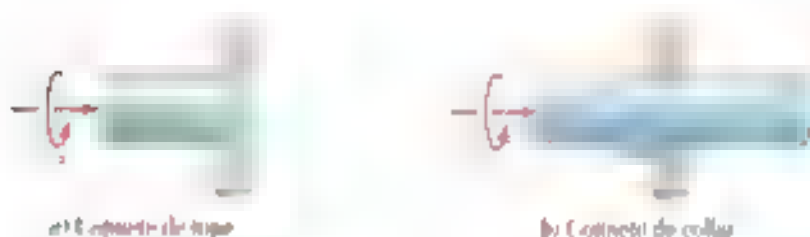


Figura 8.11 Cojinetes de empuje

Para obtener una fórmula, se usa una ecuación general de fricción y se considera un elemento diferencial que es un anillo. Un par M actúa en la flecha y transmite a una velocidad constante ω por una fuerza P la mantiene en contacto con un soporte fijo (figura 8.12).

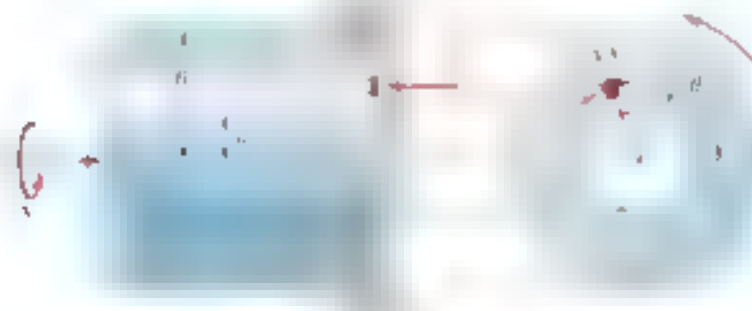


Figura 8.12

El contacto entre la flecha y el cojinete ocurre sobre un área A (fuerza de anillo que tiene un radio tanto r como el radio exterior R). Suponiendo que la presión entre las dos superficies de contacto es uniforme, se sabe que la magnitud de la fuerza normal ΔN que actúa sobre un elemento de área ΔA está dada por $\Delta N = P \Delta A / A$, donde $A = \pi R^2 - \pi r^2$ es el área del cojinete. La fuerza de fricción ΔF que actúa sobre ΔA es $\Delta F = \mu_k \Delta N$. Si se representa con r la distancia desde el eje de la flecha hasta el elemento de área ΔA , se expresa la magnitud ΔM del momento de ΔF con respecto al eje de la flecha de la siguiente forma:

$$\Delta M = r \Delta F = \frac{r \mu_k P \Delta A}{\pi R^2 - \pi r^2}$$

El equilibrio de la flecha requiere que el momento M del par aplicado a ésta sea igual en magnitud a la suma de los momentos de las fuerzas de fricción ΔF . Reemplazando ΔA por su elemento diferencial $dA = r d\theta$ de que se obtiene con las ecuaciones anteriores integrando sobre el área de contacto se obtiene la siguiente expresión para la magnitud del par M que se requiere para vencer la resistencia por fricción del eje que:

$$\begin{aligned} M &= \frac{\mu P}{\pi R} \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{r_0} r d\theta \\ &= \frac{\mu P}{\pi r_0} \frac{R^2}{2} \int_0^{2\pi} d\theta = \mu P R \\ M &= \frac{2}{3} \mu_4 P \frac{R_2}{R_2^2 - R_1^2} \end{aligned} \quad (8.8)$$

Cuando el contacto ocurre sobre un círculo completo de radio R , la fórmula (8.8) se reduce a:

$$M = \frac{2}{3} \mu_4 P R \quad (8.9)$$

Entonces el par de M es el momento que se debe aplicar al eje en el contacto entre la flecha y el eje para que ocurra el deslizamiento. La distancia de M al eje es r_0 .

El momento torsional máximo que puede ser transmitido por un eje que gira sobre un eje de eje es el momento que se debe aplicar al eje. La ecuación (8.9) de M se reemplaza por el coeficiente de fricción estática μ_s .

8.9. FRICCIÓN EN RUEDAS, RESISTENCIA A LA RODADURA O RODAMIENTO

Las ruedas son de los dispositivos más importantes de una máquina. Sin uno hace que sea posible mover cargas pesadas con un esfuerzo mínimo o ninguno. Debido a que el punto de la rueda que está en contacto con el suelo en cualquier instante no tiene un movimiento relativo con respecto al suelo, la rueda elimina las grandes fuerzas de fricción que se producen si la carga se mueve en contacto directo con el suelo. Sin embargo, existe cierta resistencia al movimiento de la rueda. Dicha resistencia tiene dos causas distintas: 1) el efecto que impide a la rueda el que se deslice sobre el suelo y 2) el tipo de rodadura que la rueda se deslice sobre el suelo ocasionando que el contacto de la rueda y el suelo se deslice sobre una cierta distancia de rodadura en el suelo.

Las causas principales de la resistencia al movimiento de una rueda en el suelo son la resistencia al deslizamiento y la resistencia al rodadura. Las causas principales de la resistencia al deslizamiento son la resistencia al deslizamiento y la resistencia al rodadura. Las causas principales de la resistencia al rodadura son la resistencia al deslizamiento y la resistencia al rodadura. Las causas principales de la resistencia al deslizamiento son la resistencia al deslizamiento y la resistencia al rodadura. Las causas principales de la resistencia al rodadura son la resistencia al deslizamiento y la resistencia al rodadura.

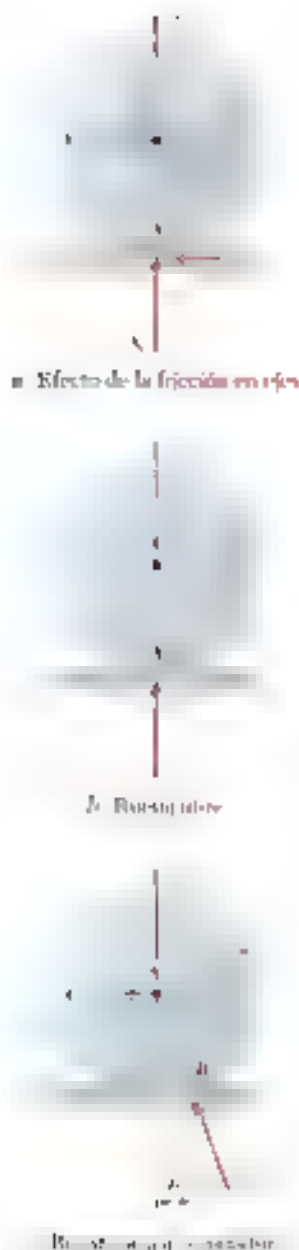


Figura 8.13

za W soportada por la rueda y la reacción normal N de la vía. Como W es el conjunto de trayectorias entre O y A , la resistencia a la rotación del eje debe representarse con un par M que tiene un sentido de rotación en el sentido de las agujas del reloj (ver figura 8.7). Para mantener al cuerpo en equilibrio, se deben agregar dos fuerzas iguales y opuestas P y F las cuales forman un par con un sentido de rotación opuesto al de los momentos M que los producen. La fuerza F es la fuerza de fricción que impide que la vía sobre la rueda y P representa la fuerza que debe aplicarse a la rueda para que ésta se mantenga rodando a velocidad constante. Deserve que las fuerzas P y F no existirían en el caso de que no hubiera fricción entre la rueda y la vía. En ausencia del par M no se representa la fricción en el eje, sino que se puede por tanto la rueda se desliza sobre la vía sin girar en su eje libre.

El par M y las fuerzas P y F también se reducen a cero cuando no existe fricción en el eje. Por ejemplo, una rueda que no está sostenida por ejes y que rueda libremente sobre una superficie horizontal sobre la que no hay fricción (figura 8.14a) es un caso en el que las fuerzas en el eje y el par M y la reacción normal N en el eje A son el soporte y el soporte de fricción entre la rueda y la vía. En consecuencia, la fuerza de fricción sobre la rueda es por tanto una fuerza que genera un momento sobre la superficie horizontal de la vía, pero no es el resultado del momento.

Sin embargo, la experiencia indica que la rueda irá disminuyendo de su altura hasta detenerse. La altura se reduce si giramos por la existencia de un momento de rotación. Esta situación es analizada en un capítulo posterior a la rodadura. Bajo la acción de la carga W tanto la rueda como el eje se deforman ligeramente, ocasiona que el eje del eje de la rueda y el eje se deformen sobre la vía. La deformación experimental muestra que la reacción de las fuerzas perpendiculares sobre la vía de la rueda se deforma la vía en una fuerza R en un punto B el cual necesita localizarse directamente por debajo del eje O de la rueda. Si se considera la línea que pasa por B hacia el frente de la rueda (figura 8.13c). Para equilibrar el momento de W con respecto a B y para mantener a la rueda rodando a velocidad constante es necesario aplicar una fuerza horizontal P en el centro de la rueda. Si se escribe $\Sigma M_B = 0$, se obtiene

$$Pr = Wh \quad (8.50)$$

donde r = radio de la rueda

h = distancia horizontal entre O y B

La distancia h mide el radio de la rueda de la resistencia a la rodadura. Es necesario señalar que h no es una constante de una sola pieza que representa una longitud; por lo general, se expresa a h en milímetros o en centímetros. El valor de h depende de varios parámetros como el tipo de superficie sobre la que se establece la rueda. Los valores del coeficiente de resistencia a la rodadura varían desde alrededor de 0.01 in. a 0.25 mm para una rueda de acero sobre un rollo de acero hasta 5.0 in. a 125 mm para la misma rueda sobre un piso lizo.

PROBLEMA RESUELTO 8.6

Una rueda por la que se eleva carga de 500 lb se gira al desatorillar la rueda. La rueda tiene un diámetro de 2 in. El coeficiente de fricción estática entre la polea y la flecha es 0.20. Determine a) la fuerza vertical mínima P requerida para sostener la carga y c) la fuerza horizontal mínima P requerida para comenzar a levantar la misma carga.

SOLUCIÓN

a) **Fuerza vertical P requerida para comenzar a levantar la carga.** Cuando las fuerzas en ambas partes de la cuerda son iguales, el contacto entre la flecha y la polea ocurre en A . Cuando se incrementa la fuerza P , la polea gira ligeramente alrededor de la flecha y el contacto ocurre en B . La fuerza horizontal P requerida para comenzar a levantar la carga es la fuerza horizontal mínima P requerida para comenzar a levantar la misma carga.

$$r_f = r \sin \phi, \quad r_f \approx r \mu, \quad r_f \approx (1 \text{ in.})(0.20) = 0.20 \text{ in.}$$

Sumando momentos con respecto a B , se escribe

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0: \quad (2.20 \text{ in.})(500 \text{ lb}) - (1.50 \text{ in.})P = 0$$

$$P = 667 \text{ lb}$$

b) **Fuerza vertical P para sostener la carga.** A medida que la fuerza P aumenta, la polea gira al desatorillar la flecha. El contacto ocurre en C . Considerando la polea como un cuerpo libre y sumando momentos con respecto a C , se escribe

$$+\circlearrowleft \sum M_C = 0: \quad (1.50 \text{ in.})(500 \text{ lb}) - (2.20 \text{ in.})P = 0$$

$$P = 409 \text{ lb}$$

$$P = 409 \text{ lb} \quad \text{Ans.}$$

c) **Fuerza horizontal P para comenzar a levantar la carga.** Cuando las tres fuerzas W , P y R no son paralelas, éstas deben ser concurrentes. Por tanto, la línea de acción de R se extiende a la parte del esbozo que se muestra y el punto D debe pasar a través del punto de intersección D de las líneas de acción de W y P . La fuerza P requerida para comenzar a levantar la carga es la fuerza horizontal mínima P requerida para comenzar a levantar la misma carga.

El radio del círculo de fricción es $r_f = 0.20 \text{ in.}$ se escribe

$$\sin \theta = \frac{OE}{OD} = \frac{0.20 \text{ in.}}{2 \text{ in.} \sqrt{2}} = 0.0707 \quad \theta = 4.1^\circ$$

A partir del triángulo de fuerzas, se obtiene

$$P = W \cot (45^\circ - \theta) = (500 \text{ lb}) \cot (40.9^\circ)$$

$$P = 614 \text{ lb}$$

$$P$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En este apartado se aplican los tres principios de equilibrio a diferentes tipos de problemas de equilibrio.

Ejemplo 1. Se considera el sistema de la figura 8.8. Se trata de un sistema de poleas y cuerdas en equilibrio. La flecha se sujeta a un sistema de poleas. La distancia entre el centro de la flecha y el punto de apoyo de la cuerda es $2L$. La distancia entre el centro de la flecha y el punto de apoyo de la cuerda es $2L$. La distancia entre el centro de la flecha y el punto de apoyo de la cuerda es $2L$.

$$r_f = r \sin \phi, \quad r_h = r \mu$$

se existe momento, y por la ecuación

$$r = r \sin \phi = r \mu$$

el momento es instantáneo

Como se ve en la figura 8.8, el momento de la fuerza se puede calcular en dos maneras diferentes. Se puede calcular las reacciones de equilibrio correspondientes para el sistema de la flecha y el sistema de la flecha. Se puede calcular las reacciones de equilibrio para el sistema de la flecha y el sistema de la flecha. Se puede calcular las reacciones de equilibrio para el sistema de la flecha y el sistema de la flecha.

El momento de la fuerza se puede calcular en dos maneras diferentes. Se puede calcular las reacciones de equilibrio correspondientes para el sistema de la flecha y el sistema de la flecha. Se puede calcular las reacciones de equilibrio para el sistema de la flecha y el sistema de la flecha.

Un ejemplo de flexión en flechas es el momento de la flecha. Este se calcula de la misma manera que el momento de la flecha. Se calcula de la misma manera que el momento de la flecha. Se calcula de la misma manera que el momento de la flecha.

El momento de la flecha se puede calcular en dos maneras diferentes. Se puede calcular las reacciones de equilibrio correspondientes para el sistema de la flecha y el sistema de la flecha. Se puede calcular las reacciones de equilibrio para el sistema de la flecha y el sistema de la flecha.

El momento de la flecha se puede calcular en dos maneras diferentes. Se puede calcular las reacciones de equilibrio correspondientes para el sistema de la flecha y el sistema de la flecha. Se puede calcular las reacciones de equilibrio para el sistema de la flecha y el sistema de la flecha.

Problemas

8.75 Una polea de 8 in. de radio y una masa de 5 lb se fija a un eje horizontal de pivote y se apoya horizontalmente en un soporte constante en la figura. Se observa que la polea comienza a rotar al se agrega una masa de 1 lb al soporte A. Determine la magnitud de la fuerza P que se debe aplicar al eje y el ángulo.



Figura P8.75

8.76 y 8.77 La polea doble mostrada en la figura se fija en un eje de pivote de radio 1 in. Se aplica tangencialmente al eje un torque. Se sabe que el coeficiente de fricción estática es de 0.40 entre el eje y el soporte mas cercano al eje. Determine la magnitud de la fuerza P que se debe aplicar al eje para levantar la carga.

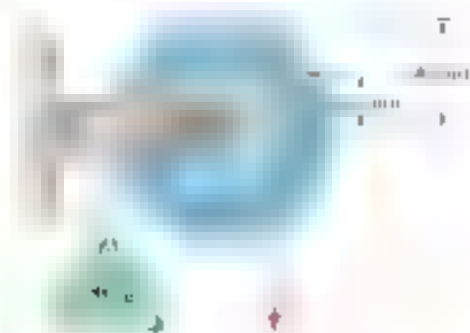


Figura P8.76 y P8.78

8.78 y 8.79 La polea doble mostrada en la figura se fija en un eje de pivote de radio 1 in. Se aplica tangencialmente al eje un torque. Se sabe que el coeficiente de fricción estática es de 0.40 entre el eje y el soporte mas cercano al eje. Determine la magnitud de la fuerza P que se debe aplicar al eje para mantener el equilibrio.



Figura P8.77 y P8.79

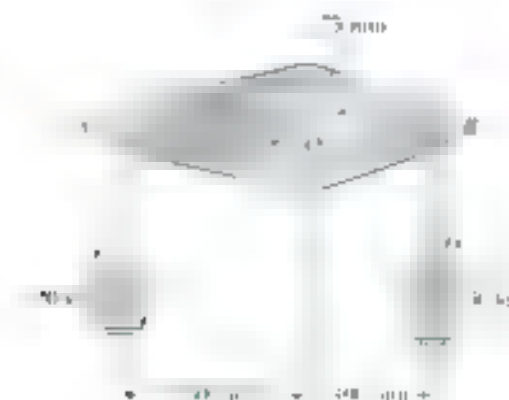


Figura P8.80

8.80 Una palanca de peso despreciable se apoya horizontalmente en un eje de pivote de radio 1 in. Se sabe que el coeficiente de fricción estática entre el eje y la palanca es de 0.40. Determine el momento de fricción estática entre el eje y la palanca.



Figura P8.81 y P8.82

8.81 El bloque y el polipasto mostrados en la figura se emplean para elevar una carga de 50 lb. Una una de las poleas de la cuerda pasa sobre un eje de 0.5 in. de diámetro. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática es de 0.20, determine la tensión en cada cuerda conforme la carga se eleva lentamente.

8.82 El bloque y el polipasto mostrados en la figura se emplean para elevar una carga de 50 lb. Una una de las poleas de la cuerda pasa sobre un eje de 0.5 in. de diámetro. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática es de 0.20, determine la tensión en cada cuerda conforme la carga se baja lentamente.

8.83 Un vagón de ferrocarril cargado tiene una masa de 30 Mg y se mantiene por medio de ocho ruedas de 400 mm de diámetro con ejes de 125 mm de diámetro. Si se sabe que los coeficientes de fricción son $\mu_s = 0.020$ y $\mu_k = 0.015$, determine la fuerza horizontal requerida para a) que el vagón comience a moverse y b) mantener al vagón en movimiento a velocidad constante. No tome en cuenta la resistencia a la rodadura entre las ruedas y las vías.

8.84 **8.85** En las figuras se muestra una palanca AB de peso despreciable que se ajusta horizontalmente a un eje fijo de 2.5 in. de diámetro. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre el eje fijo y la palanca es de 0.15, determine la fuerza P necesaria para que se inicie la rotación de la palanca en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

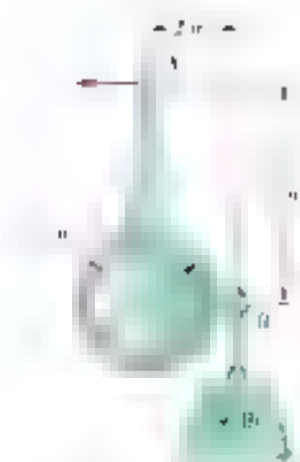


Figura P8.85 y P8.87



Figura P8.84 y P8.86

8.86 y 8.87 En las figuras se muestra una palanca AB de peso despreciable que se ajusta horizontalmente a un eje fijo de 2.5 in. de diámetro. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre el eje fijo y la palanca es de 0.15, determine la fuerza P necesaria para que se inicie la rotación de la palanca en el sentido de las manecillas del reloj.

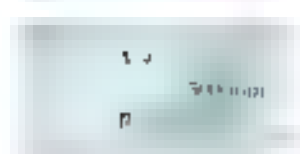


Figura P8.88

8.88 El arreglo de cables mostrado en la figura se emplea frecuentemente en los puentes de las carreteras para permitir la expansión de los elementos debido a los cambios de temperatura. El coeficiente de fricción estática en cada uno de los puntos A y B de 60 mm de diámetro es de 0.20. Si se sabe que la componente horizontal de la fuerza ejercida por BC sobre el cable es de 400 kN, determine a) la fuerza horizontal que debe aplicarse sobre la viga AC para que el cable comience a moverse y b) el ángulo que la fuerza resultante ejercida por la viga BC sobre el cable forma con la vertical.

8.89 Se desea diseñar una palanca que pueda descender con velocidad constante a una velocidad de 10 mm/min. La palanca pesa 10 N y se apoya en un eje de 10 mm de diámetro. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre los ejes de 15 mm de diámetro y los carriles es de 0.10, determine el diámetro que deben tener las ruedas. No tome en cuenta la resistencia a la rodadura entre las ruedas y el suelo.

B.50 En la figura se muestra una palanca de primer orden de 50 lb que se apoya sobre una superficie horizontal. La palanca está en equilibrio. Se aplica una fuerza vertical hacia abajo de 100 lb a una distancia de 2 ft del punto de apoyo. ¿A qué distancia del punto de apoyo se debe aplicar una fuerza vertical hacia arriba de 100 lb para mantener la palanca en equilibrio? Justifique su respuesta.



Figure P6.90

8.91 Si se sabe que es necesario aplicar un par con 30 N m de momento para que el eje central de la barra se desplace lateralmente 1 mm, determine la fuerza estática entre las superficies de contacto puntuales.

El 92 % de los ejes nuevos ha sido sometido a un tratamiento que las superficies de los ejes y de los engranajes sufren desgaste. Por lo tanto, las superficies que se desgastan se reemplazan en la fábrica a través de un procedimiento muy riguroso de acuerdo a los estándares y desde el punto al centro del eje. En otras, se supone que la fuerza normal del motor de la máquina es suficiente para soportar la temperatura que la máquina al funcionar se genera. Al estar en la zona superior por encima de 100 grados centígrados, la degradación del aceite es mayor a la normal. El aceite usado en la degradación del aceite es sustituido por aceite nuevo. La vida útil de los engranajes del eje es de 75 por ciento del valor dado en la fórmula 99 para un conector nuevo.

***8.63** Suponha que os conjuntos se despartem como se indica em el-
la. Se A e B são conjuntos quaisquer, então $A \cap B$ é o conjunto de todos os
elementos que pertencem a ambos os conjuntos A e B .

$$M = \mu + \delta L + \beta L$$

donde P = magnitud de la fuerza axial total

 R_1, R_2 = radios interno y externo del collarín

***8.94** Si se supone que la presión entre las superficies de contacto es uniforme, determinar la magnitud M de cada fuerza para cada configuración. Las fricciones son despreciables. Los ángulos α y β son los mostrados.

$$M = \frac{2}{3} \frac{\mu_1 P}{\sin \theta} \frac{R_2^2 - R_1^2}{R_1}$$

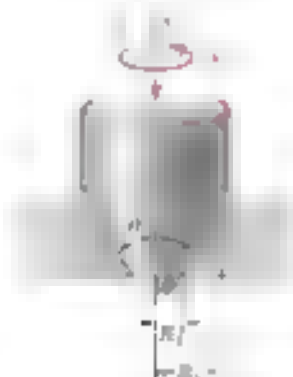
**Pharmacokinetics**

Figure P8.91

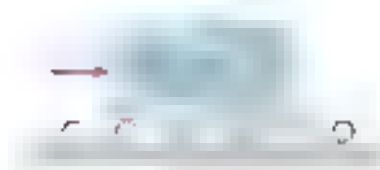


Figura P8.86

8.87 Retome el problema 8.86 y ahora suponga que la fuerza horizontal P por la que se arrastra el disco es 1 peso y que el coeficiente de fricción máximo en el centro hasta cero en la circunferencia del disco.

8.96 Como se muestra en la figura, la base de una máquina de 900 kg se mueve sobre el piso de concreto mediante una serie de tubos de acero de 100 mm de diámetro exterior. Si se sabe que el coeficiente de resistencia a la rodadura entre los tubos y la base es de 0.5 mm y entre los tubos y el piso de concreto es de 0.05, determine la magnitud de la fuerza P requerida para mover lentamente la base a lo largo del piso.

8.97 Si se sabe que un disco de 8 in. de diámetro rueda con velocidad constante hacia abajo sobre una superficie inclinada 2 por ciento, determine el coeficiente de resistencia a la rodadura entre el disco y la superficie.

8.98 Determine la fuerza horizontal requerida para mover un automóvil de 2500 lb con velocidad constante a lo largo de una carretera horizontal si el coeficiente de fricción estática es de 0.15 y el coeficiente de fricción cinética es de 0.10. Suponga que la resistencia a la rodadura es despreciable.

8.99 Retome el problema 8.83 y ahora incluya el efecto de un coeficiente de fricción estática de 0.15 y un coeficiente de fricción cinética de 0.10.

8.100 Retome el problema 8.83 y ahora incluya el efecto de un coeficiente de resistencia a la rodadura de 1.75 mm.

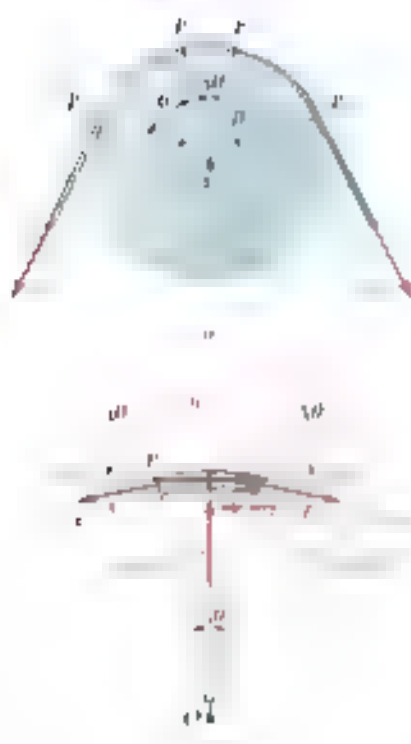


Figura 8.14

8.10. FRICCIÓN EN BANDAS

Considere una banda que pasa sobre un tambor como se muestra en la figura 8.14a. Si dicha banda está en movimiento, existe entre las partes superior e inferior de la banda un movimiento relativo. Las partes superior e inferior de la banda están a punto de deslizarse hacia la derecha.

Un pequeño elemento PP' que abarca un ángulo $\Delta\theta$ se separa de la banda. Si la tensión presente en P se denota con T y con $T + \Delta T$ la tensión en P' , puede trazarse el cuerpo libre del elemento de la banda (figura 8.14b). Además de las las fuerzas de tensión T y $T + \Delta T$, se debe considerar el cuerpo libre, sobre el que se ejercen: ΔN de la reacción del tambor y la fuerza de fricción ΔF . Aunque se supone que el movimiento es insignificante, se tiene $\Delta F = \mu_s \Delta N$. Es necesario señalar que, si se tiene que $\Delta\theta$ se aproxima a cero, las magnitudes ΔN y ΔF van a infinito, no ΔT porque la $T \sin \theta$ en P' y la $T \sin \theta$ en P también tienden a infinito. En el caso de un tambor, el valor de f de la fricción en P continúa aumentando hacia el infinito, así la a comprensión la selección de notación que se ha hecho.

A continuación se presentarán los resultados que se obtienen en la figura 8.14b y se escribirán las ecuaciones de equilibrio para el elemento PP' .

$$\sum F_x = 0 \quad T - (T + \Delta T) \cos \frac{\Delta\theta}{2} - f \cos \frac{\Delta\theta}{2} - \mu_s \Delta N = 0 \quad (8.1)$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Delta N - T \sin \frac{\Delta\theta}{2} - (T + \Delta T) \sin \frac{\Delta\theta}{2} - \mu_s \Delta N = 0 \quad (8.2)$$

Al resolver la ecuación (8.12) para ΔT y sustituir la ecuación (8.11) se obtiene la siguiente ecuación después de simplificar términos:

$$\Delta T \cos \frac{\Delta \theta}{2} - \mu (2T + \Delta T) \sin \frac{\Delta \theta}{2} = 0$$

Ahora se divide ambos términos entre $\Delta \theta$ y se divide entre $\cos \frac{\Delta \theta}{2}$. Como, esta se hace dividiendo ΔT entre $\Delta \theta$. La división del segundo término se lleva a cabo dividiendo entre 2 los términos que están entre paréntesis y dividiendo al seno entre $\Delta \theta/2$. Así se escribe:

$$\frac{\Delta T}{\Delta \theta} \cos \frac{\Delta \theta}{2} = \mu \left(T + \frac{\Delta T}{2} \right) \sin \frac{\Delta \theta}{2}$$

Se analiza cómo por $\Delta \theta$ se aproxima a cero, se aproxima a $\cos \frac{\Delta \theta}{2}$ y $\sin \frac{\Delta \theta}{2}$ se aproxima a $\frac{\Delta \theta}{2}$ dando a cero. Además se recuerda que el término ΔT se aproxima a cero, las fórmulas de cálculo del límite se usan. $\Delta \theta \rightarrow 0$ y $\Delta \theta \rightarrow 0$ tiene un límite de $\frac{\Delta T}{\Delta \theta} \rightarrow \frac{dT}{d\theta}$ con lo que en un momento $\frac{dT}{d\theta}$ se escribe:

$$\frac{dT}{d\theta} \cos \frac{\Delta \theta}{2} = \mu \left(T + \frac{\Delta T}{2} \right) \sin \frac{\Delta \theta}{2}$$

Ahora se integra ambos miembros de la ecuación desde P_1 hasta P_2 en la θ para T_1 y T_2 se integra por θ es por $T = T_1$ en P_1 y $T = T_2$ en P_2 es por $\theta = 0$ y $\theta = \beta$ es por $T = T_1$. Así integrando entre estos límites se escribe:

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = \int_0^\beta \mu d\theta$$

$$\ln T_2 - \ln T_1 = \mu \beta$$

Al observar en la ecuación anterior es igual a la ecuación anterior del coeficiente de T_2 y T_1

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = \mu \beta \quad (8.13)$$

Esta relación también se puede escribir de la siguiente manera:

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu \beta} \quad (8.14)$$

Las fórmulas que se han derivado se pueden aplicar a una gran variedad de problemas que involucran cuerdas que se desliza sobre una superficie rugosa como lo es una cinta que se mueve sobre una superficie rugosa. Además que las fórmulas también pueden utilizarse para resolver problemas que involucran frenos de cinta. La fórmula en la ecuación (8.14) es la que está a punto de girar y mientras que la banda permanece fija. Por otra parte, las fórmulas también pueden aplicarse en problemas que involucran transmisiones de banda.



Fotografía 8.3 Al enrollar la cuerda alrededor del boudo la fuerza ejercida por el trabajador para controlar la cuerda es menor que la fuerza en la porción libre de la cuerda.



Figura 8.15

En esas condiciones girando la polea en la misma dirección se desea determinar si la banda se deslizará, esto es, si la banda se moverá con respecto a la polea.

Las fórmulas (8.13) y (8.14) sólo deben utilizarse si la banda, la cuerda o el freno están deslizando. Si no se desliza la banda, la fórmula (8.14) si se desea determinar T_1 o T_2 se preferirá la fórmula (8.13) si se desea determinar el valor de μ , o si se desea determinar el ángulo de contacto β si se sabe o se sabe que T_1 siempre es mayor que T_2 por tanto T_1 corresponde a la tensión en aquella parte que *pulls* mientras que T_2 es la tensión en aquella parte que *resists*. También se debe mencionar que el ángulo de contacto β debe expresarse en *radíanes*. Puesto que β puede ser mayor que 2π son posibles una o más vueltas de la banda o veces alrededor de un poste. β será igual a $2\pi n$.

Si la banda, la cuerda o el freno están deslizando, deben utilizarse las fórmulas (8.13) y (8.14) pero que no son iguales a las fórmulas de fricción estática. Si la banda, la cuerda o el freno no están deslizando, no se resisten a punto de deslizarse, no se pueden utilizar las fórmulas mencionadas antes.

Las bandas que se utilizan en las transmisiones por lo general tienen un ancho A en la banda en A que se muestra en la figura 8.15a. El contacto entre esta banda con el eje a lo largo de los lados de la ran-

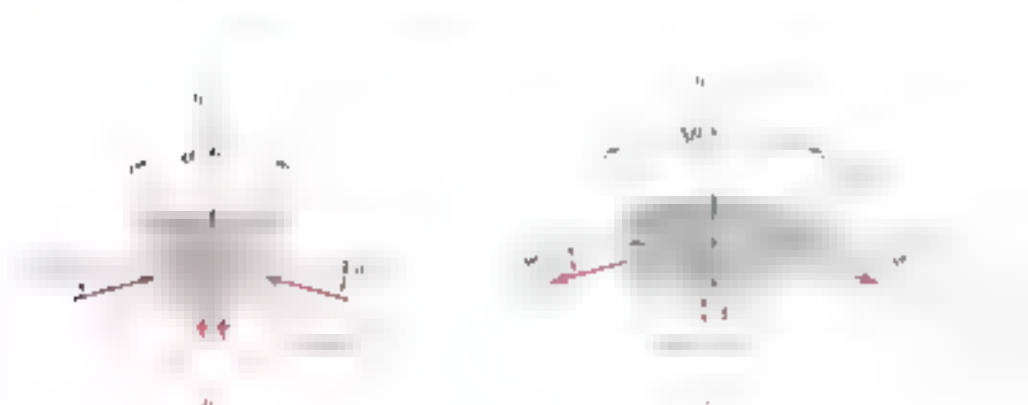


Figura 8.16: (a) Diagrama de fuerzas en la banda. (b) Diagrama de fuerzas en la banda.

ura 8.16a puede el diagrama de cuerpo libre de un elemento de la banda que se muestra en la figura 8.16b. Se puede obtener la ecuación que relaciona los valores T_1 y T_2 de la tensión en las dos partes de la banda que se desliza o que está a punto de deslizar. De esta forma se derivan fórmulas similares a las ecuaciones (8.13) y (8.14) pero ahora la longitud de la fuerza de fricción estática que actúa sobre el elemento es $\Delta\theta$ y a su vez de las componentes de las fuerzas normales es igual a $2 \Delta\theta$ si $\alpha = 90^\circ$. En el caso de la fricción estática en la que se desliza antes se obtiene

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\mu \beta}{\alpha + \alpha/2} \quad (8.15)$$

o

$$\frac{T_1}{T_2} = \mu \beta \quad (8.16)$$



PROBLEMA RESUELTO 8.7

Un cable de rompedor anclado desde un extremo y un móvil se enrolla dos veces completas alrededor de un bulardo de radio $r = 100 \text{ mm}$. El cable pesa $W = 7500 \text{ N}$ que ejerce una fuerza de 150 N sobre el extremo libre del cable en el bulardo. Se desea saber ¿cuántas vueltas se necesitan enrollar el cable para que el móvil que pesa $W = 75000 \text{ N}$ se deslice hacia abajo? ¿cuántas vueltas se necesitan enrollar el cable para que el móvil que pesa $W = 75000 \text{ N}$ se deslice hacia arriba?

SOLUCIÓN

a) **Coefficiente de fricción.** Como el deslizamiento del cable es inminente se usa la ecuación (8.13)

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = \mu_s \beta$$

Como el cable está en el bulardo dos veces completas alrededor del bulardo se tiene que:

$$\beta = 2(2\pi \text{ rad}) = 12.57 \text{ rad}$$

$$T_1 = 7500 \text{ N} \quad T_2 = 75000 \text{ N}$$

Por tanto:

$$\mu_s \beta = \ln \frac{T_2}{T_1}$$

$$\mu_s (12.57 \text{ rad}) = \ln \frac{75000 \text{ N}}{7500 \text{ N}} = \ln 10 = 2.30$$

$$\mu_s = 0.183$$

b) **Cable enrollado tres vueltas completas alrededor del bulardo.** Con el valor de μ_s obtenido en el inciso a) de este problema, ahora se tiene que:

$$\beta = 3(2\pi \text{ rad}) = 18.85 \text{ rad}$$

$$T_1 = 750 \text{ N} \quad \mu_s = 0.183$$

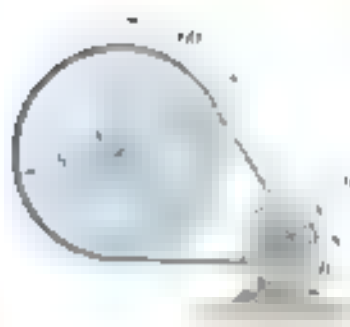
Sustituyendo estos valores en la ecuación (8.14) se obtiene:

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu_s \beta}$$

$$\frac{T_2}{750 \text{ N}} = e^{0.183(18.85)} = 6.5$$

$$T_2 = 5250 \text{ N}$$





PROBLEMA RESUELTO B.8

Una banda plana conecta una polea A que mueve una máquina horizontalmente sobre una superficie lisa con la polea B, la cual se mueve en una trayectoria vertical. Los coeficientes de fricción entre ambas poleas y la banda son $\mu_A = 0.25$ y $\mu_B = 0.30$. Si se sabe que la tensión máxima permitida en la banda es de 600 lb, determine el ángulo β más pequeño tal que la banda se deslice sobre la polea A.

SOLUCIÓN

Polea B. Como la tensión en la banda aumenta de izquierda a derecha, se requiere que la tensión en la banda a la izquierda de la polea B sea menor que la tensión a la derecha de la polea B. Por lo tanto, la banda se desliza sobre la polea B en la dirección de la tensión mayor, es decir, hacia la izquierda. Por lo tanto, la tensión en la banda a la izquierda de la polea B es T_1 y la tensión en la banda a la derecha de la polea B es T_2 . La tensión en la banda a la izquierda de la polea B es T_1 y la tensión en la banda a la derecha de la polea B es T_2 . La tensión en la banda a la izquierda de la polea B es T_1 y la tensión en la banda a la derecha de la polea B es T_2 .

Polea B. Con el uso de la ecuación 8.14 con $T_2 = 600$ lb, $\mu_B = 0.25$ y $\beta = 120^\circ = 2\pi/3$ rad, se escribe

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu_B \beta} \quad \frac{600 \text{ lb}}{T_1} = e^{(0.25)(2\pi/3)} = 1.658$$

$$T_1 = \frac{600}{1.658} = 359.4 \text{ lb}$$

Polea A. Se elabora el diagrama de cuerpo libre de la polea A. Como M_A se mueve horizontalmente, la máquina horizontalmente a la izquierda, la tensión en la banda a la izquierda de la polea A es T_1 y la tensión en la banda a la derecha de la polea A es T_2 . La tensión en la banda a la izquierda de la polea A es T_1 y la tensión en la banda a la derecha de la polea A es T_2 .

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 \quad M_A = (600 \text{ lb})(8 \text{ in.}) + (359.4 \text{ lb})(8 \text{ in.}) = 0$$

$$M_A = 1937 \text{ lb} \cdot \text{in.} \quad M_A = (1937 \text{ lb} \cdot \text{in.}) \quad \leftarrow$$

Nota. Se puede comprobar que la banda no se desliza sobre la polea A. Como la tensión en la banda a la izquierda de la polea A es T_1 y la tensión en la banda a la derecha de la polea A es T_2 , se requiere que $T_1 > T_2$ para que la banda no se deslice sobre la polea A. Como $T_1 = 359.4$ lb y $T_2 = 600$ lb, se requiere que $359.4 > 600$, lo cual no es cierto. Por lo tanto, la banda se desliza sobre la polea A.

$$\mu_B \beta = \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) = \ln \left(\frac{600 \text{ lb}}{359.4 \text{ lb}} \right) = 0.514$$

y, como $\beta = 240^\circ = 4\pi/3$ rad,

$$\mu_B = \frac{0.514}{4\pi/3} = 0.117 = 0.12$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En la sección anterior se aprendió acerca de los diagramas de fuerzas. Los problemas que se plantean que sólo involucran las fuerzas que se aplican sobre los cuerpos se resuelven aplicando las leyes de Newton. Los problemas que involucran las fuerzas de fricción se resuelven aplicando la ley de fricción.

En esta sección se plantean problemas que involucran las fuerzas de fricción. En estos casos puede utilizarse una de las siguientes ecuaciones para determinar la fuerza de fricción f .

$$f = \mu N \quad (8.1)$$

donde:

$$\frac{f}{N} = \mu \quad (8.1a)$$

Las fuerzas que se aplican sobre los cuerpos se representan en los diagramas de fuerzas. Las fuerzas que se aplican sobre los cuerpos se representan en los diagramas de fuerzas. Las fuerzas que se aplican sobre los cuerpos se representan en los diagramas de fuerzas.

La ley de fricción establece que la fuerza de fricción f es proporcional a la fuerza normal N que actúa sobre la superficie de contacto. La ley de fricción establece que la fuerza de fricción f es proporcional a la fuerza normal N que actúa sobre la superficie de contacto.

El ángulo β debe estar representado en radianes. En un problema que involucre una banda y un tambor, éste es el ángulo subtendido en el arco del tambor sobre el cual está enrollada la banda.

La fuerza de fricción f es proporcional a la fuerza normal N que actúa sobre la superficie de contacto. La fuerza de fricción f es proporcional a la fuerza normal N que actúa sobre la superficie de contacto.

La fuerza de fricción f es proporcional a la fuerza normal N que actúa sobre la superficie de contacto. La fuerza de fricción f es proporcional a la fuerza normal N que actúa sobre la superficie de contacto.

La fuerza de fricción f es proporcional a la fuerza normal N que actúa sobre la superficie de contacto. La fuerza de fricción f es proporcional a la fuerza normal N que actúa sobre la superficie de contacto.

La fuerza de fricción f es proporcional a la fuerza normal N que actúa sobre la superficie de contacto. La fuerza de fricción f es proporcional a la fuerza normal N que actúa sobre la superficie de contacto.

La fuerza de fricción f es proporcional a la fuerza normal N que actúa sobre la superficie de contacto. La fuerza de fricción f es proporcional a la fuerza normal N que actúa sobre la superficie de contacto.

La fuerza de fricción f es proporcional a la fuerza normal N que actúa sobre la superficie de contacto. La fuerza de fricción f es proporcional a la fuerza normal N que actúa sobre la superficie de contacto.

Problemas



Figura P8.102 y P8.103



Figura P8.104



Figura P8.107

8.101 Un cable se enrolla dos vueltas completas alrededor de un tubo. Al aplicar una fuerza de 500 lb al extremo libre del cable, el otro extremo puede resistir una fuerza de 5000 lb en el otro extremo del tubo. Determine *a*) el coeficiente de fricción estática entre el cable y el tubo y *b*) la fuerza máxima que se puede aplicar al otro extremo del cable si se aplica una fuerza de 2000 lb al ejercer la misma fuerza de 500 lb .

8.102 Una cuerda ABCD pasa sobre dos tubos como se muestra en la figura. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática es de 0.25 , determine *a*) el valor máximo de la masa m tal que se mantenga el equilibrio y *b*) la tensión correspondiente en la parte BC de la cuerda.

8.103 Una cuerda ABCD pasa sobre dos tubos como se muestra en la figura. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática es de 0.35 , determine *a*) el valor máximo de la masa m con el que se puede lograr el equilibrio y *b*) la tensión correspondiente en la parte BC de la cuerda.

8.104 Una cuerda se muestra en la figura. El peso W del bloque que resiste una fuerza que se aplica en el punto B es de 100 lb y es horizontal. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre la cuerda y la barra es de 0.15 , determine el rango de valores de P para los cuales se mantiene el equilibrio.

8.105 El coeficiente de fricción estática entre el bloque B y la superficie horizontal y entre la cuerda y el soporte C que se muestran en la figura, es de 0.40 . Si se sabe que $m_A = 12 \text{ kg}$, determine la masa mínima del bloque B para el cual se mantiene el equilibrio.

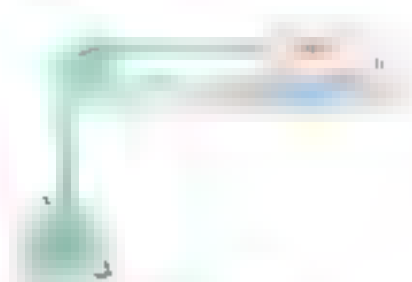


Figura P8.105 y P8.106

8.106 El coeficiente de fricción estática μ es idéntico entre el bloque B y la superficie horizontal y entre la cuerda y el soporte C que se muestran en la figura. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática es de 0.40 , para el cual se mantiene el equilibrio.

8.107 Una banda plana se utiliza para transmitir un par del tambor B al tambor A. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática es de 0.40 y que la tensión permisible en la banda es de 450 N , determine el par máximo que puede ejercerse sobre el tambor A.

8.108 La banda plana se muestra en la figura, con el eje en la polea A y la polea B. Como se muestra en la figura, cada una de las poleas tiene un radio de 60 mm y sobre el eje de la polea A se aplica una fuerza con una magnitud $P = 900$ N. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática es de 0.15, determine a) el par máximo que puede ser transmitido y b) el valor máximo correspondiente de la tensión en la banda.



Figura P8.108

8.109 Retorne el problema 8.108, y ahora suponga que la banda está sobre un alfiler por el cual puede deslizarse. Dado $\mu_s = 0.15$ y $\mu_k = 0.10$, determine la tensión de la banda.

8.110 En la figura se muestra el soporte de un motor de 175 lb al cual se le aplica el peso W para mantener tensa la banda motriz. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre la banda plana y los tambores A y B es de 0.40 y sin tomar en cuenta el peso de la plataforma CD, determine el par máximo que se le puede transmitir al tambor B cuando el tambor motriz A gira en el sentido de las manecillas del reloj.

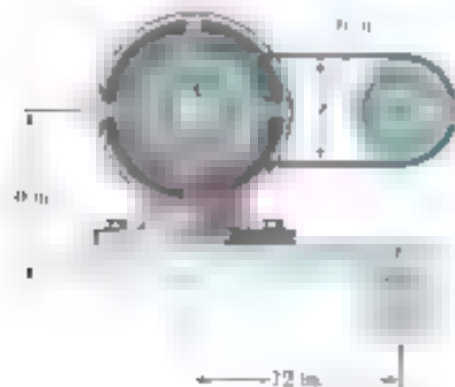


Figura P8.110

8.111 Retorne el problema 8.110, y ahora suponga que el tambor motriz A gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

8.112 En la figura se muestra un freno de banda que se emplea para controlar la velocidad de un volante. Los coeficientes de fricción son $\mu_s = 0.30$ y $\mu_k = 0.25$. Determine la magnitud del par aplicado sobre el volante si se sabe que $P = 45$ N y que el volante gira con velocidad constante en sentido contrario al de las manecillas del reloj.



Figura P8.112

8.113 La velocidad del freno de tambor que se muestra en la figura se controla mediante una cuerda unida a la barra de control AD . Se aplica una fuerza P con magnitud de 25 lb sobre la barra de control en A . Determine la magnitud del par aplicado al tambor, si se sabe que $\theta = 45^\circ$ y que la fricción cinética entre la cuerda y el tambor es de 0.25, que $a = 10$ in. y que el tambor gira a velocidad constante ω' en sentido contrario al de las manecillas del reloj y b en el sentido de las manecillas del reloj.

8.114 Si $a = 4$ in., determine el valor mínimo del coeficiente de fricción estática para el cual el freno no es autobloqueante cuando el tambor gira en sentido diverso al de las manecillas del reloj.

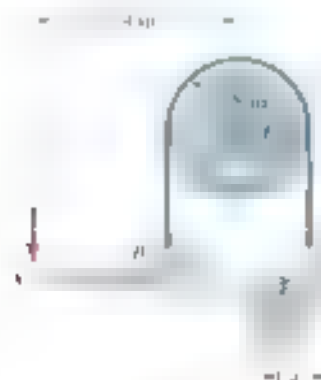


Figura P8.113, P8.114 y P8.115

8.115 Si se sabe que el coeficiente de fricción estática es de 0.30 y que el freno del tambor gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj, determine el valor mínimo de a para el cual el freno no es autobloqueante.

8.116 La cubeta A y el bloque C mostrados en la figura se conectan mediante una cuerda que pasa sobre el tambor B . Suponiendo que C se mueve lentamente en sentido contrario al de las manecillas del reloj y que los coeficientes de fricción en todas las superficies son $\mu_s = 0.35$ y $\mu_k = 0.25$, determine la masa mínima combinada m de la cubeta y su contenido para que el bloque C *a*) permanezca en reposo, *b*) comience a moverse hacia arriba del plano inclinado y *c*) continúe su movimiento hacia arriba del plano inclinado con velocidad constante.



Figura P8.116

8.117 Retome el problema 8.116, y ahora suponga que el tambor B está fijo y no puede girar.

8.118 y 8.120 Un cable se enrolla alrededor de tres tubos paralelos como se muestra en la figura. Si los coeficientes de fricción son $\mu_A = 0.25$ y $\mu_B = 0.20$, determine el peso W máximo que puede levantarse si el tubo C gira libremente. (a) si el tubo A puede girar libremente, (b) si el tubo A está fijo y el tubo B se puede girar libremente, (c) si el tubo B está fijo y el tubo A se puede girar libremente.

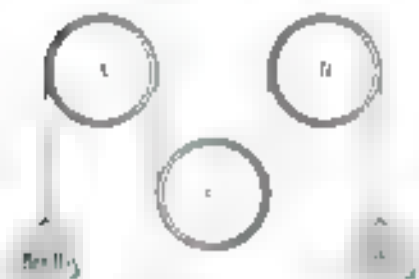


Figura P8.118 y P8.119



Figura P8.120 y P8.121

8.119 y 8.121 Un cable se enrolla alrededor de tres tubos paralelos como se muestra en la figura. Dos de los tubos están fijos y no giran; el tercer tubo gira lentamente. Si los coeficientes de fricción son $\mu_A = 0.25$ y $\mu_B = 0.20$, determine el peso W máximo que puede levantarse (a) si sólo el tubo A se gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj, (b) si sólo el tubo C se gira en el sentido de las manecillas del reloj.

8.122 En la figura se muestra una cinta de grabación que pasa sobre el tambor A y el B de un motor de audio y el C de un giradiscos. Se sabe que los coeficientes de fricción entre la cinta y los tambores son $\mu_A = 0.40$ y $\mu_B = 0.30$ y que el tambor C puede girar libremente. determine el peso máximo permitido de P para que la cinta AB no se deslice entre sí.

8.123 Repita el problema 8.122 y ahora suponga que el tambor giratorio C está fijo y no puede rotar.

8.124 En la figura se muestra una barra AE de 10 lb suspendida de un anillo que puede girar libremente sobre el cable. El extremo A de la barra se está deslizando sobre los dos topes mostrados. Si se sabe que $\mu = 0.15$ entre el cable y el anillo, determine el momento por M_1 con sentido contrario al de las manecillas del reloj que puede aplicarse al anillo para que se deslice libremente a la fuerza en E que se ejerce sobre el extremo E de la barra.



Figura P8.122



Figura P8.124

8.125 Retorne el problema 8.124, y ahora suponga que sobre el tambor se aplica un par M , en el sentido de las manecillas del reloj.

8.126 En la figura se muestra una llave de correa que se emplea para sujetar un eje. La llave tiene una longitud l y una altura h . El coeficiente de fricción estática es μ . Encuentre la máxima fuerza P que puede aplicarse al extremo de la llave, en el punto A , para que la llave se autobloquee cuando $\theta = 20^\circ$, $l = 30$ mm y $h = 65^\circ$.

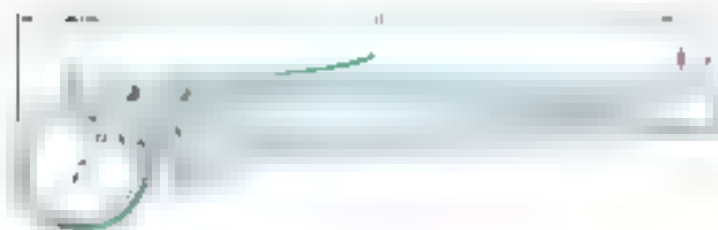


Figura P8.126

8.127 Retorne el problema 8.126, y ahora suponga que $\theta = 75^\circ$.

8.128 Se muestra que las ecuaciones 8.13 y 8.14 son válidas para cualquier forma que tenga la superficie construida en la figura. Determine el coeficiente de fricción estática μ cuando $\theta = 30^\circ$ y $\alpha = 45^\circ$.



Figura P8.128

8.129 Complete la deducción de la ecuación (8.15), que relaciona la tensión en ambas partes de una llave en V.

8.130 Retorne el problema 8.129 y ahora suponga que la llave plana y los alfileres se reemplazan por un alfiler en V. Encuentre el ángulo α cuando $\theta = 30^\circ$. (El ángulo α se muestra en la figura 8.15a.)

8.131 Retorne el problema 8.130 y ahora suponga que la llave plana y los alfileres se reemplazan por una llave en V y alfileres también en V cuando $\alpha = 45^\circ$. Encuentre el ángulo θ cuando $\theta = 30^\circ$.

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 8

Este capítulo trata de la fricción, un fenómeno que es una propiedad que los dos cuerpos rígidos que están en contacto a lo largo de superficies que no están lubricadas.



Figura 8.16

A aplicar una fuerza horizontal P a un bloque que descansa sobre una superficie horizontal. Se muestra que P debe ser mayor que una cierta magnitud antes de que el bloque comience a moverse. La evidencia experimental sugiere que se debe haber desarrollado una *fuerza de fricción* F para oponerse a la fuerza P (figura 8.16). Conforme P se incrementa a P_m , también F se incrementa a F_m . Si P se incrementa más allá de P_m , F disminuye a un valor menor F_d . La evidencia experimental muestra que F_m y F_d son directamente proporcionales a la compresión de normal N a la superficie de la superficie. Por tanto, se tiene que

$$F_m = \mu_s N \quad F_d = \mu_k N \quad (8.1.6.2)$$

donde μ_s y μ_k denotan el *coeficiente de fricción estática* y el *coeficiente de fricción cinética*, respectivamente. Estos coeficientes dependen de la naturaleza de la superficie de contacto. En la tabla 8.1 se proporcionan valores aproximados para los coeficientes de fricción.

Algunas veces es conveniente reemplazar la fuerza normal N y la fuerza de fricción F por su resultante R (figura 8.17). A menudo, por la naturaleza de la superficie de contacto, $F = \mu N$, el ángulo ϕ que R forma con la normal N se refiere a *coeficiente de fricción* μ o *ángulo de fricción* ϕ . Si en realidad ocurre el movimiento, la magnitud de F disminuye a F_d y el ángulo ϕ se refiere a *ángulo de fricción cinética*. Como se demostró en la sección 8.3, se tiene que

$$\tan \phi_s = \mu_s \quad \text{y} \quad \phi_k = \mu_k \quad (8.3.4)$$

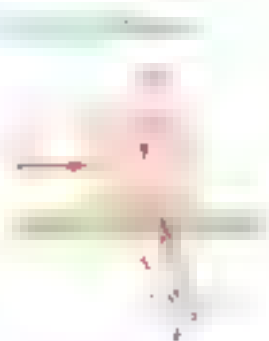


Figura 8.17

Problemas que involucren fricción



Figura 8.10

Cubitos y tornillos



Cuando se resuelve problemas de equilibrio que involucren fricción, se debe considerar la cantidad F de la $F = \mu N$ cuando $F < \mu N$ y $F = \mu N$ cuando $F > \mu N$ (sección 8.4). Si el movimiento no es instantáneo, F y N deben considerarse como magnitudes del momento. Las reglas deben usarse.



Figura 8.11

Se debe usar la parte de las ecuaciones de equilibrio (sección 8.4). También se debe considerar que el valor de F no puede ser mayor que el valor máximo $F_{\max} = \mu N$. Si el valor de F es mayor que F_{\max} , el cuerpo se movería y la magnitud de la fuerza de fricción sería $F = \mu N$ (sección 8.4). Por otro lado, si se sabe que el movimiento es instantáneo, F ha alcanzado su valor máximo $F_{\max} = \mu N$ (figura 8.11b) y la expresión anterior puede sustituirse por la de $F = \mu N$ en las ecuaciones de equilibrio (sección 8.4). Cuando sólo están involucradas tres fuerzas en un cuerpo, la fuerza de fricción puede resolverse. Si el cuerpo está en contacto con el cuerpo, es más conveniente resolver el problema con las fuerzas de fricción y la fuerza normal (sección 8.4).

Cuando un problema involucre el análisis de las fuerzas ejercidas entre sí por dos cuerpos A y B, es importante mostrar las fuerzas de fricción con sus sentidos correctos. Por ejemplo, el sentido correcto para la fuerza de fricción ejercida por B sobre A es opuesto al sentido del movimiento relativo o movimiento relativo de A con respecto a B (figura 8.11).

En la segunda parte del capítulo se consideran cierto número de aplicaciones específicas de fricción en las cuales la fricción juega un papel importante. Por ejemplo, los tornillos son muy comunes y se utilizan para conectar objetos. Se debe tener cuidado de mostrar cada fuerza de fricción con su sentido correcto (problema resuelto 8.4). El análisis de tornillos de rosca múltiple, los cuales se utilizan con frecuencia en gomas, presiones y otros dispositivos, se debe analizar con cuidado y se debe mostrar el punto de contacto de la rosca de tornillo y mostrarla con una línea recta (sección 8.6). La anterior se hace porque el eje de la figura 8.11 muestra el eje de la rosca de tornillo. L es el avance del tornillo, esto es, la distancia a lo largo de la cual avanza el tornillo en una vuelta. W es la altura de la rosca, que es igual al avance del tornillo por el avance del tornillo. Se señaló que en el caso de tornillos de rosca múltiple, el avance L de un tornillo es igual al su paso, es decir, la distancia medida entre dos rosca consecutivas.

Otras aplicaciones de Ingeniería que se consideraron en este capítulo son las *transmisiones* y la *fricción en bandas* (sección 8.7). Los *transmisiones* incluyen a *transmisiones* (sección 8.8) a *transmisiones* y la *transmisión a tornillos* (sección 8.9) a *transmisiones* (sección 8.10).

A la solución de problemas se reduce a *la banda plana* que pasa sobre un cilindro fijo, es importante determinar primero la dirección en la que se desliza o se desliza sobre la banda. Si el tambor está girando, el movimiento o el movimiento (ambos) de la banda se determinan a partir de la dirección. Para poder aplicar la ley de fricción en la figura 8.20 esta a punto de deslizarse hacia la derecha con respecto al tambor, las fuerzas de fricción ejer-

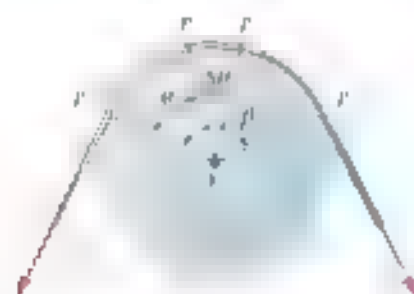


Figura 8.20

cidas por el tambor sobre la banda es en la dirección hacia la izquierda y a la derecha. Las fuerzas de fricción en la banda de la derecha son T_2 y en la banda de la izquierda son T_1 . El ángulo de fricción es β , el coeficiente de fricción estática es μ_s , y el ángulo (en radianes) subtendido por la banda es θ , en la sección 8.10 se derivaron las siguientes fórmulas

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = \mu_s \theta \quad (8.13)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu_s \theta} \quad (8.14)$$

Las ecuaciones (8.13) y (8.14) se utilizan para resolver los problemas de fricción en las *transmisiones* y la *fricción en bandas* (sección 8.10). La *transmisión* se desliza sobre el tambor se puede reemplazar en ambas ecuaciones el coeficiente de fricción estática μ_s por el coeficiente de fricción dinámica μ_k .

Fricción en bandas

Problemas de repaso



Figura P8.132

P. 8.132 Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre el bloque de 25 kg y el plano inclinado que se muestra en la figura es $\mu_s = 0.25$, determine el valor mínimo de la fuerza P que debe aplicarse al cable para que el bloque permanezca en reposo sobre el plano inclinado a 30° del horizontal.

P. 8.133 El bloque A de 20 lb y el bloque B de 30 lb están suspendidos por un cable sin peso que se muestra en la figura por mostrarla. Si el coeficiente de fricción estática entre todas las superficies de contacto es de 0.15, determine el valor de P para que el sistema permanezca en reposo.

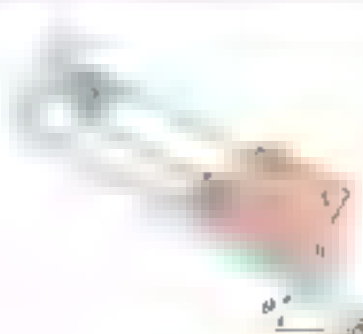


Figura P8.133

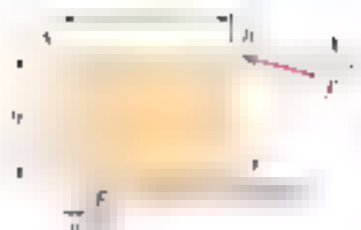


Figura P8.134

P. 8.134 Un trabajador mueve lentamente una caja de 50 kg hacia la izquierda sobre una plataforma que se muestra en la figura por mostrarla. Se aplica una fuerza P en la esquina superior derecha de la caja. Si la caja no se mueve y el ángulo de inclinación de la plataforma de la caja es $\theta = 30^\circ$, determine el coeficiente de fricción estática entre la caja y la plataforma, (b) la magnitud P de la fuerza correspondiente.

P. 8.135 En la figura se muestra una barra delgada que sostiene el peso P en el punto A entre la clavija C y la pared vertical que sostiene una carga P en el punto B. Se sabe que el peso de la barra es W y que la longitud de la barra es L . Determine el valor de la relación L/W para los cuales se mantiene el equilibrio.



Figura P8.135

8.141 La potencia del gato mecánico para automóvil mostrado en la figura se controla mediante el tornillo ABC que tiene una rosca sencilla en sus extremos: rosca derecha en A y rosca izquierda en C. Cada rosca tiene $\frac{1}{4}$ pulg de $\frac{1}{4}$ in y una longitud de 1.57 in. Se desea que el gato pueda levantar a $\mu = 0.5$ el peso de un automóvil de 4000 lb. ¿Qué fuerza P se debe aplicar para levantar el automóvil?



Figura P8.141

8.142 Una palanca de peso despreciable se apoya longitudinalmente a un eje de $\frac{1}{4}$ pulg de radio que se encuentra fijo al eje, como se muestra en la figura. Se sabe que para iniciar la rotación de la palanca en el sentido de las manecillas del reloj, es necesaria una fuerza P con magnitud de 275 N. determine a) el coeficiente de fricción estática entre el eje y la palanca, b) la mínima fuerza P necesaria para que la palanca no comience a girar en sentido contrario al de las manecillas del reloj.



Figura P8.142

8.143 Un par M_A se aplica al tambor motor B para mantener una velocidad constante en la banda polidora que se muestra en la figura. Si $\mu_k = 0.45$ entre la banda y el bloque de 15 kg que se está puliendo y $\mu_s = 0.30$ entre el tambor y el motor motor B, ¿qué momento M_A se debe aplicar al tambor motor B en la parte inferior de la banda si no debe ocurrir deslizamiento entre la banda y el tambor motor?



Figura P8.143



P8.C1 La posición de la barra AB de 10 kg se controla mediante el bloque de 2 kg que se desplaza lentamente hacia la izquierda al aplicarse la fuerza P mostrada en la figura. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre todas las superficies de contacto es de 0.25 , utilice software para calcular la magnitud P de la fuerza que debe aplicarse a los bloques que van desde 800 mm hasta 100 mm con incrementos de 30 mm . Con los resultados, grafique los resultados de P vs el valor correspondiente de x .



Figura P8.C1

P8.C2 Un soporte inclinado que se mantiene en la posición mostrada en la figura, sostiene a los bloques A y B . Si se sabe que el bloque A pesa 20 lb y que el coeficiente de fricción estática entre todas las superficies de contacto es de 0.35 , utilice software a fin de calcular el valor de θ para el cual el bloque A comienza a deslizarse. Además, grafique θ vs el peso del bloque B que varía desde 0 hasta 100 lb y usando incrementos de 10 lb .



Figura P8.C2

P8.C3 El cilindro C de 300 g se apoya sobre el cilindro D cuando se muestra la figura. Si se sabe que el coeficiente de fricción estática μ tiene el mismo valor en A y en B , utilice software para determinar el valor máximo de μ que puede aplicarse a los cilindros D sin que el cilindro C se deslice. Grafique μ vs el valor de μ desde 0 hasta 0.40 con incrementos de 0.05 .



Figura P8.C3

8.C4 Dos barras están conectadas mediante un bloque deslizante D y se le aplica una fuerza horizontal constante al que M_1 y M_2 se mueven a lo largo de las guías. Se sabe que el peso de los bloques es $W_1 = 300 \text{ N}$ y $W_2 = 400 \text{ N}$. El coeficiente de fricción es de 0.10. Use software para determinar el rango de valores de M_2 que permite que los bloques permanezcan en equilibrio. Considere valores de θ de 0° a 130° con incrementos de 10° .



Figura P8.C4

8.C5 El bloque A en la Fig. 8.55 se mueve lentamente hacia arriba sobre la superficie curva mediante un cable que pasa por un pequeño tambor cilíndrico en B . Se sabe que el peso del bloque es $W = 1000 \text{ N}$. El coeficiente de fricción entre el bloque y la superficie y entre el cable y el tambor. Utilice software para determinar la fuerza P que se requiere para mantener el bloque en equilibrio. Considere valores de θ entre 0° y 90° con incrementos de 10° . Para los mismos valores de θ calcule la magnitud de la reacción entre el bloque y la superficie. Observe que el ángulo de contacto entre el cable y el tambor fijo es $\beta = \pi - \theta$.



Figura P8.C5

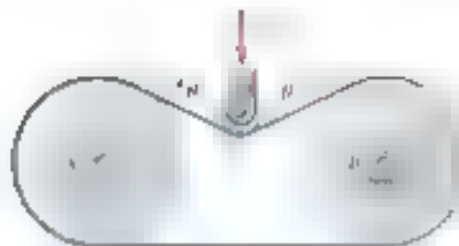


Figura P8.C8

8.C8 En la figura se muestra una banda plana que está fijada a los tambores en A y B. Se aplica una fuerza P hacia abajo en el punto C. El radio de los tambores es de 25 mm. El coeficiente de fricción estática entre la banda y los tambores es de 0.20. Determine la magnitud de la fuerza P que se requiere para mantener la banda en equilibrio. Considere valores de θ entre 0° y 90° con incrementos de 10° .

P8.C7 Dos collarines A y B que se deslizan sobre barras verticales con fricción. La geometría está dada en la figura. La barra AC que pesa 100 N se sujeta en A por un cable BC . El ángulo de la barra con la vertical es θ y el ángulo de la barra BC con la horizontal es ϕ . Se desea hallar el ángulo θ y la tensión en el cable BC para que se mantenga el equilibrio. Considere valores de θ entre 0 y 60° con incrementos de 10° .

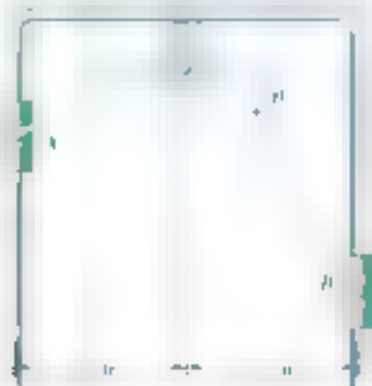


Figura P8.C7

P8.C8 El extremo B de una viga uniforme con longitud L , se jala mediante una grúa colacionada. En un inicio la viga se encuentra en el suelo con el extremo A directamente debajo de la polea C . A medida que el cable se jala lentamente, primero la viga se desliza hacia la izquierda con $\theta = 0$ hasta que se mueve una distancia x_m . En una segunda fase, el extremo B se eleva, mientras que el extremo A se desliza hacia la izquierda hasta que x alcanza su valor máximo x_m , y θ el valor correspondiente θ_1 . Después, la viga gira alrededor de A' mientras que θ sigue creciendo. Cuando θ alcanza el valor θ_2 , el extremo A comienza a deslizarse hacia la derecha y la sigue haciendo hasta que alcanza su gran valor x_m . Se desea encontrar los coeficientes de fricción entre la viga y el suelo, son $\mu_s = 0.30$ y $\mu_k = 0.40$. a) use software a fin de calcular x y θ para cualquier valor de θ mientras la viga se desliza hacia la izquierda, así mismo determine x_m , x_m y θ_1 . b) configure el software a fin de mostrar para cualquier θ el valor de x con el cual el deslizamiento hacia la derecha comienza. Considere como el primer valor θ la θ que corresponde a $x = x_m$.



Figura P8.C8

La resistencia de los elementos estructurales que se emplean en la construcción de puentes depende en gran medida de las propiedades de sus secciones transversales. Esto incluye las segundas momentos, o momentos de inercia, de las secciones transversales.

CAPITULO

9

Fuerzas distribuidas momentos de inercia



- 9.1 Introducción
- 9.2 Segundo momento o momento de inercia de un área
- 9.3 Determinación del momento de inercia de un área por integración
- 9.4 Momento polar de inercia
Radio de giro de un área
Teorema de los ejes paralelos o teorema de Steiner
- 9.7 Momentos de inercia de áreas compuestas
- 9.8 Producto de inercia
- 9.9 Ejes principales y momentos principales de inercia
- 9.10 Círculo de Mohr para momentos y productos de inercia
- 9.11 Momento de inercia de una masa
Teorema de los ejes paralelos
- 9.12 Momentos de inercia de placas delgadas
- 9.13 Determinación del momento de inercia de un cuerpo tridimensional por integración
- 9.14 Momentos de inercia de cuerpos compuestos
- 9.15 Momento de inercia de un cuerpo con respecto a un eje arbitrario que pasa por el punto O.
Productos de inercia de masa
- 9.17 Elipsoide de inercia. Ejes principales de inercia
- 9.18 Determinación de los ejes y los momentos principales de inercia de un cuerpo de forma arbitraria

[illegible]

www.geocienciasvirtuais.blogspot.com.co

MOMENTOS DE INERCIA DE ÁREAS

9.2. SEGUNDO MOMENTO O MOMENTO DE INERCIA DE UN ÁREA

En la primera parte de este capítulo se estudian fuerzas, momentos
 ΔB como un punto ΔB son proporcional a los elementos de masa
 ΔB y el elemento de masa ΔB es proporcional a la distancia ΔB desde el punto ΔB hasta el punto ΔA dado
 linealmente con la distancia que hay desde ΔA hasta un eje dado

Por lo tanto, cuando se considera un elemento diferencial de sección transversal ΔA en la figura 10.10, se aplica a las partes iguales y opuestas de ΔA una fuerza en cada una de las extremidades de ΔA . Se dice que una fuerza es una "fuerza de cuerpo" si se aplica a una parte de un cuerpo, como se demuestra que las fuerzas internas en cualquier sección de un viga son fuerzas de cuerpo, las cuales actúan sobre ΔA y ΔA actúa igualmente con la distancia y por lo tanto el momento de ΔA con respecto que pasa a través del centro de la sección. Dicho que se representa por el eje x en la figura 10.11 se muestra el momento de la sección. Las fuerzas en cada lado de ΔA mientras son fuerzas de cuerpo, se dice que las fuerzas en el elemento son "fuerzas de contacto" sobre el propio elemento, mientras las fuerzas son iguales a cero.

La magnitud de la resultante \mathbf{R} de las fuerzas elementales $\Delta \mathbf{F}$ que actúan sobre toda la sección es

$$F = \int k_y \, dA = k \int y \, dA$$

[illegible]

integrar sobre toda la sección se obtiene

$$M = \int ky^2 dA = k \int y^2 dA$$

Dacă f este o funcție continuă pe $[a, b]$ și $f(x) \geq 0$ pentru orice $x \in [a, b]$, atunci integrala definită a lui f este nenegativă, adică $\int_a^b f(x) dx \geq 0$. Dacă, în plus, $f(x) > 0$ pentru orice $x \in [a, b]$, atunci integrala este strict pozitivă, adică $\int_a^b f(x) dx > 0$.

[illegible]

El término segundo miembro es más apropiado que el término miembro de derecho porque por lo general sólo existen uno o dos miembros para derivar integrales de una clase sección 9.1). Sin embargo en la práctica de la ingeniería se utiliza el término miembro de fuerza para referirse tanto a los dos tipos de miembros.

FIGURE 9.1

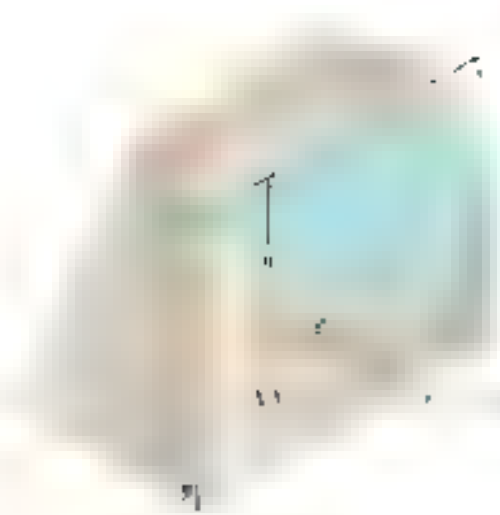


Figura 9.2

Si la presión es una fuerza rectangular, la resultante de las fuerzas de presión se podría determinar a partir de la curva de presión, como se hizo en la sección 9.2. Se puede demostrar que, cuando la presión es una fuerza rectangular, se puede utilizar el momento de área. Representamos un elemento diferencial de área ΔA con y el peso específico del agua, la presión en el elemento es $p = \gamma y$ y la magnitud de la fuerza elemental es $p \Delta A$ (ver figura 9.2). La magnitud de la resultante de las fuerzas elementales es

$$R = \int \gamma y \, dA = \gamma \int y \, dA$$

y se puede obtener el momento de área $Q = \int y \, dA$ del área de la superficie con respecto al eje x . El momento M de la resultante debe ser igual a la suma de los momentos $\Delta M = y \Delta F = \gamma y \Delta A$ de las fuerzas elementales. Al integrar sobre el área de la superficie, se tiene que

$$M = \gamma \int y \, dA = \gamma \int y \, Q \, dA$$

Aquí, la integral de dA representa el segundo momento de área o momento de inercia I_x del área con respecto al eje x .

9.3 DETERMINACION DEL MOMENTO DE INERCIA DE UN ÁREA POR INTEGRACION

En la sección anterior se definió el segundo momento de área o momento de inercia de un área A con respecto al eje x (ver ecuación 9.1). Al determinar el momento de inercia I_y del área A con respecto al eje y , se escribirá (ver figura 9.3a)

$$I_y = \int x^2 \, dA \quad I_y = \int x \, dA \quad (9.2)$$

Estas integrales, conocidas como los *momentos rectangulares de inercia* de la área A , se pueden evaluar al dividir el área en tiras rectangulares de ancho Δx y altura h paralelas al eje y (ver figura 9.3a). Dado que el ancho Δx es pequeño, podemos decir que la tira es una línea (ver figura 9.3b). Entonces, se obtiene el momento de inercia dI_x de la tira multiplicando su área ΔA por x^2 . La integral I_y se obtiene al sumar todas las dI_x en Q (ver figura 9.3c). Como todas las tiras están a la misma distancia x del eje y , se puede sacar x^2 de la integral de la tira $x^2 \int dA$.



Figura 9.3

Momento de inercia de un área rectangular Como un ejemplo se presentará el momento de inercia de un rectángulo con respecto a su base (figura 9.3). Desintegrando el rectángulo en tiras paralelas al eje x , se obtiene:

$$dA = b \, dy \quad dy = \frac{1}{b} dA$$

$$I_x = \int_0^h by^2 \, dy = \frac{1}{3}bh^3 \quad (9.2)$$

Calcúlese I_y e I_p con el uso de las mismas tiras elementales. La fórmula para el momento de inercia se obtiene al dejar que b sea el momento de inercia de una tira con respecto al eje y de una tira rectangular que es paralela al eje y como se ilustra en la figura 9.4. Este momento $I = dI_y = y^2 dA$ en la fórmula (9.2) se escribe:

$$dI_y = \frac{1}{3}y^3 \, dx$$

Por otra parte, se tiene que

$$dI_y = x^2 dA = x^2 y \, dx$$

Por tanto, se puede utilizar los dos elementos para calcular los momentos de inercia I_x e I_y de un área dada (figura 9.5).

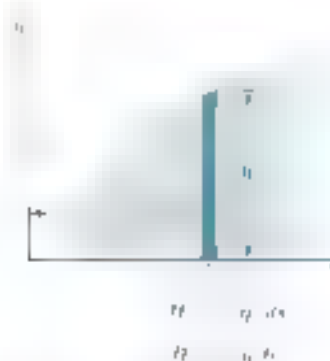


Figura 9.5

9.4. MOMENTO POLAR DE INERCIA

Una categoría muy importante de problemas relacionados con la rotación de las placas planas en los problemas de ingeniería con la rotación de placas es la siguiente:

$$J_p = \int r^2 dA \quad (9.3)$$

donde r es la distancia desde el origen O hasta el área elemental dA (figura 9.6). Este J_p es el momento polar de inercia del área A con respecto al "polo" O .

El momento polar de inercia de un área dada puede calcularse a partir de los momentos de inercia I_x e I_y del área. Si los ejes x e y son ortogonales, de hecho, se puede demostrar que $J_p = I_x + I_y$, se puede escribir:

$$J_p = \int r^2 dA = \int (x^2 + y^2) dA = \int x^2 dA + \int y^2 dA$$

www.geocienciasvirtuales.blogspot.com.co

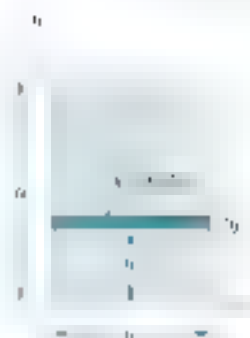


Figura 9.4



Figura 9.6

$$J_x = I + I_y$$

9]



Figura 9.7

9.5. RADIO DE GIRO DE UN ÁREA

Consideremos una A que tiene un momento de inercia I con respecto a un eje x (figura 9.6a). Imaginemos que se ha concentrado esta área en una tira delgada paralela al eje x (figura 9.6b). Si el área A concentrada de esta forma, debe tener el mismo momento de inercia con respecto al eje x , la tira delgada se concentrará a una distancia k_x del eje x , donde k_x está definida por la relación

$$I = k_x^2 A$$

Al resolver para k_x , se escribe

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

Se llama al radio de giro k_x como el radio k_x del área con respecto al eje x . De forma similar se puede definir los radios de giro k_y y k_z según: $I_y = k_y^2 A$ y $I_z = k_z^2 A$.

$$I_y = k_y^2 A \quad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad (9.6)$$

$$I_z = k_z^2 A \quad k_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} \quad (9.7)$$

Si se resuelve la ecuación (9.6) en términos de los radios de giro, se encuentra que

$$k_z^2 = k_x^2 + k_y^2 \quad (9.8)$$

Ejemplo. Para el rectángulo mostrado en la figura 9.8, se calcula el radio de giro k_x con respecto a su base x o los radios de giro k_y y k_z con respecto a los ejes y y z .

$$k_x = \frac{I_x}{A} = \frac{bh^3}{bh} = \frac{h^2}{3} \quad k_y = \frac{I_y}{A} = \frac{b^3h}{bh} = \frac{b^2}{3}$$

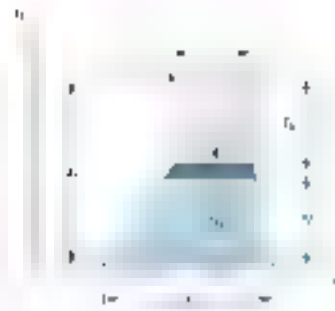
En la figura 9.8 se muestra el radio de giro k_x con respecto al eje x que se concentra en la coordenada $y = h/3$ del centro de área. Muestra que k_x depende de la longitud h de la tira paralela al eje x y está relacionada con el primer momento del área.



Figura 9.8

PROBLEMA RESUELTO 9.1

Determine el momento de inercia de un triángulo con respecto a su base.



SOLUCIÓN

Se dibuja un triángulo de base b y altura h . el eje x se selecciona de manera que coincida con la base del triángulo. Se selecciona dA como una tira horizontal de espesor dy a una distancia y de la base. La tira está a una distancia l del eje x , se escribe:

$$dl = y^2 dA \quad dA = l dy$$

Si se utilizan triángulos semejantes se tiene que:

$$\frac{l}{b} = \frac{h-y}{h} \quad l = b \frac{h-y}{h} \quad dA = b \frac{h-y}{h} dy$$

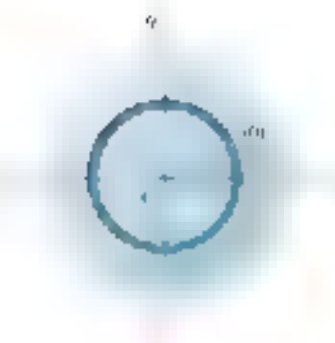
Con la integración de dl , desde $y = 0$ hasta $y = h$ se obtiene:

$$I = \int y^2 dA = \int_0^h y^2 \left(b \frac{h-y}{h} \right) dy = \frac{b}{h} \int_0^h (hy^2 - y^3) dy$$

$$= \frac{b}{h} \left[\frac{hy^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right]_0^h = \frac{b}{h} \left(\frac{h^4}{3} - \frac{h^4}{4} \right) = \frac{bh^3}{12}$$

PROBLEMA RESUELTO 9.2

a) Determine el momento polar central de inercia de un área circular por integración directa. b) utilice el resultado del inciso a) y determine el momento de inercia de un área circular con respecto a uno de sus diámetros.



SOLUCIÓN

a) Momento polar de inercia. Se selecciona dA como un elemento angular diferencial de área. Como todas las porciones del área elemental están a la misma distancia desde el origen, se escribe:

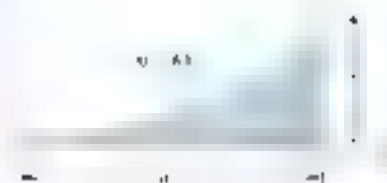
$$r^2 = r^2 dA \quad dA = r^2 d\theta$$

$$I = \int r^2 dA = \int_0^{2\pi} r^2 (2\pi r dr) = 2\pi \int_0^r r^3 dr$$

Debido a la simetría del área circular, se tiene que $I_x = I_y$. Entonces, se escribe:

$$I_x = I_y = I_p = 2I$$

$$I = \frac{\pi r^4}{2}$$



PROBLEMA RESUELTO 9.3

a) Determine el momento de inercia con respecto a cada uno de los ejes cartesianos que pasan por el vértice de la zona sombreada. Las coordenadas de esta área son las mismas que en el problema resuelto 9.1. I_{xx} y I_{yy} son los momentos de inercia y k_x y k_y son los radios de giro con respecto de cada uno de los ejes cartesianos.

SOLUCIÓN

Para resolver el problema resuelto 9.2 y 9.3, debemos hallar las ecuaciones paramétricas para la ecuación de la curva y para el área total:

$$y = \frac{h}{a}x \quad A = \frac{1}{2}ah$$

Momento de inercia I_x . Se selecciona dA como un elemento diferencial vertical de área. Como todas las porciones de este elemento están a la misma distancia desde el eje x , se puede escribir una ecuación para el momento de inercia de este elemento de área con respecto al eje x en:

$$dI_x = \int y^2 dA = \int \left(\frac{h}{a}x \right)^2 dx = \frac{1}{3} \frac{h^2}{a^2} x^3 dx$$

$$I_x = \int_0^a \frac{1}{3} \frac{h^2}{a^2} x^3 dx = \left[\frac{1}{12} \frac{h^2}{a^2} x^4 \right]_0^a = \frac{1}{12} \frac{h^2}{a^2} a^4 = \frac{1}{12} h^2 a^2$$

Momento de inercia I_y . Se utiliza el mismo elemento diferencial vertical de área. Como todas las porciones del elemento están a la misma distancia desde el eje y , se escribe:

$$dI_y = x^2 dA = x^2 (y dx) = x^2 \left(\frac{h}{a}x \right) dx = \frac{h}{a} x^3 dx$$

$$I_y = \int_0^a \frac{h}{a} x^3 dx = \left[\frac{h}{4a} x^4 \right]_0^a = \frac{h}{4a} a^4 = \frac{1}{4} h a^3$$

$$I_y = \frac{1}{4} h a^3$$

Radio de giro k_x y k_y . Por definición, se tiene que:

$$k_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{\frac{1}{12} h^2 a^2}{\frac{1}{2} ah / 3} = \frac{h^2}{6} \quad k_x = \frac{h}{\sqrt{6}}$$

$$k_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{\frac{1}{4} h a^3}{\frac{1}{2} ah / 3} = \frac{3}{2} a^2 \quad k_y = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

REPRODUCTION OF PROBLEMS IN NORMAL INDEPENDENT

[illegible][illegible]

$$t_1 \quad t_2 \quad \dots \quad t_n \quad | \quad t_1 \quad t_2 \quad \dots \quad t_n$$

[illegible]

El `find` devuelve el primer elemento que cumple la condición. Si no encuentra ninguno, devuelve `None`. En este caso, `find` devuelve `None` porque no encuentra el elemento `1` en la lista.

En la anterior difiere de los resultados para el primer mesón debido a que en esta ocasión se utilizó un valor de $\alpha = 0.05$. Los cálculos con un signo negativo

[illegible]2. **Calcula el momento polar de inercia J_{zz} , J_{zz} de la figura en cm⁴.**

$$I_x = \int r^2 dA \quad (U.3)$$

Finally, we note that the above results are not true for the case of a general \mathbb{R}^n -valued function f . For example, let $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ be defined by $f(x, y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$. Then f is a polynomial function, but it is not a linear combination of linear functions. However, it is a linear combination of quadratic functions. In fact, we can write $f(x, y) = x^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y^2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. This shows that the result of Theorem 1.1 is a special case of a more general result.

$$f_{(1)} = f_1 + f_2 \quad (0.4)$$

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx$

[illegible]

Problemas



Figura P8.1 y P8.5

9.1 a 9.4 Para el área sombreada que muestran las figuras, determine por integración directa el momento de inercia con respecto al eje y .

9.5 a 9.8 Para el área sombreada que muestran las figuras, determine por integración directa los momentos de inercia con respecto al eje x .

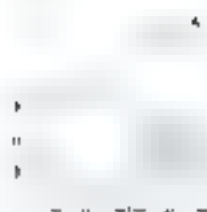


Figura P8.2 y P8.6

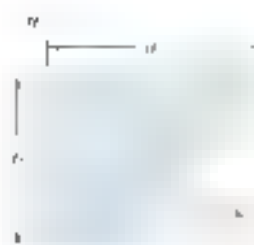


Figura P8.3 y P8.7

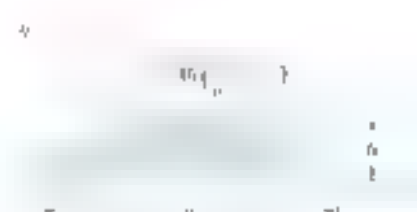


Figura P8.4 y P8.8

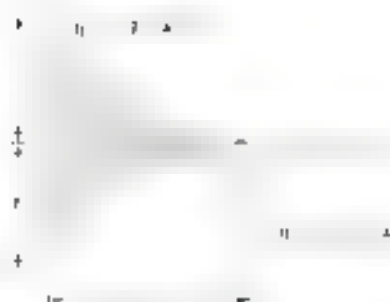


Figura P8.9 y P8.12

9.9 a 9.11 Para el área sombreada que muestran las figuras, determine por integración directa el momento de inercia con respecto al eje x .

9.12 a 9.14 Para el área sombreada que muestran las figuras, determine por integración directa los momentos de inercia con respecto al eje y .

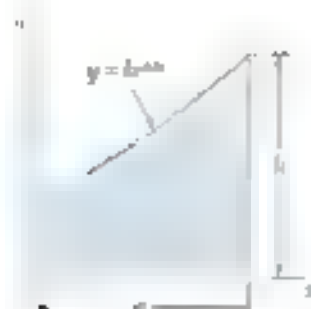


Figura P8.10 y P8.13



Figura P8.11 y P8.14

9.15 y 9.16 Para las áreas sombreadas que muestran las figuras, determine el momento de inercia y el radio de giro con respecto al eje x .



Figura P9.15 y P9.17



Figura P9.16 y P9.18

9.17 y 9.18 Para el área sombreada que muestran las figuras, determine el momento de inercia y el radio de giro con respecto al eje y .

9.19 Para el área sombreada que muestra la figura, determine el momento de inercia y el radio de giro con respecto al eje x .



Figura P9.19 y P9.20

9.20 Para el área sombreada que muestra la figura, determine el momento de inercia y el radio de giro con respecto al eje y .

9.21 y 9.22 Para el área sombreada que muestran las figuras, determine el momento de inercia y el radio de giro con respecto al punto P .

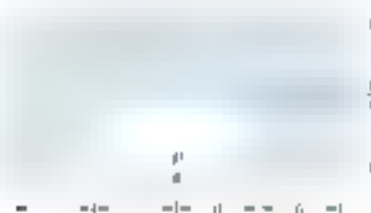


Figura P9.21



Figura P9.22



Figura P9.23 y P9.24



Figura P9.25

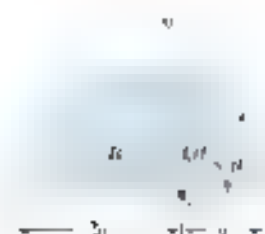


Figura P9.27

9.23 a) Determine por integración directa el momento polar de inercia de la lamina mostrada en la figura con respecto al eje x . b) Determine el momento polar de inercia de la lamina mostrada en la figura con respecto al eje y .

9.24 a) Demuestre que el radio de giro polar k_p del área anular mostrada en la figura indicada en la figura es $k_p = \sqrt{\frac{R^4 - r^4}{4(R^2 - r^2)}}$. b) Calcule el radio de giro polar k_p para los siguientes valores de R y r .

9.25 y 9.26 Para el área sombreada que muestran las figuras, determine el momento polar de inercia con respecto al punto P .

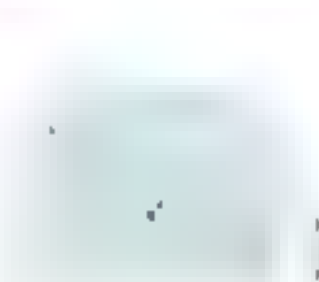


Figura P9.26

9.27 Para el área sombreada que muestra la figura, determine el momento polar de inercia y el radio de giro polar con respecto al punto O .

9.28 Para el triángulo isósceles que muestra la figura, determine el momento polar de inercia con respecto al punto P .

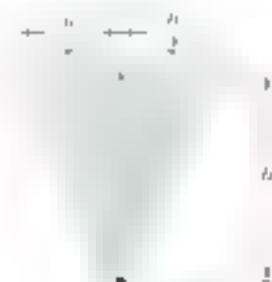


Figura P9.29

9.29 Con el momento polar de inercia del triángulo isósceles del problema 9.28, demuestre que el momento polar de inercia de un área circular de radio r es $\frac{\pi r^4}{2}$. Sugerencia: A medida que el área de un círculo se divide en un número creciente de sectores circulares del mismo tamaño, el área se aproxima por la suma de los sectores.

9.30 Demuestre que el momento polar de inercia de un área circular de radio r es $\frac{\pi r^4}{2}$. Sugerencia: A medida que el área de un círculo se divide en un número creciente de sectores circulares del mismo tamaño, el área se aproxima por la suma de los sectores.

9.6. TEOREMA DE LOS EJES PARALELOS O TEOREMA DE STEINER

Consideremos el momento de inercia I de un área A con respecto a un eje AA' (Figura 9.9). Si se representa con y la distancia desde un elemento de área dA hasta AA' , se escribe

$$I = \int y^2 dA$$

Ahora se cala un eje BB' que pasa por el centro de gravedad C de A y es paralelo a AA' . Se hace y el eje BB' como eje de referencia y se representa con y' la distancia desde el elemento dA hasta BB' . Se escribe



Figura 9.9

La distancia desde el elemento dA hasta BB' se escribe $y = y' + d$, donde d es la distancia entre los ejes AA' y BB' . Sustituyendo por y en la integral anterior, se escribe

$$\begin{aligned} I &= \int (y' + d)^2 dA = \int (y'^2 + 2y'd + d^2) dA \\ &= \int y'^2 dA + 2d \int y' dA + d^2 \int dA \end{aligned}$$

La primera integral representa el momento de inercia I' del área con respecto al eje BB' . La segunda integral representa el producto de inercia del área con respecto a BB' más el momento I del área con respecto al eje BB' más el momento de inercia I' del área con respecto al eje BB' . La tercera integral es igual al área A . Finalmente, se observa que la última integral es igual al área total A . Por tanto, se tiene

$$I = I' + Ad^2 \quad (9.9)$$

Esta fórmula expresa que el momento de inercia I de un área con respecto a un eje AA' es igual al momento de inercia I' del área con respecto a un eje BB' que pasa por el centro de gravedad C de A y es paralelo a AA' , más el producto de A por la distancia d al cuadrado entre los ejes. Este teorema se conoce como el **teorema de los ejes paralelos** o **teorema de Steiner**. Sustituyendo $k^2 A$ por I y $k'^2 A$ por I' , el teorema también se puede expresar de la siguiente forma

$$k^2 = k'^2 + d^2 \quad (9.10)$$

Se puede observar en este momento que para determinar el momento polar de inercia J_O de un área, con respecto a un punto O , con el momento polar de inercia J_C con respecto al centro de gravedad C de A , denotando con d la distancia entre O y C , se escribe

$$J_O = J_C + Ad^2 \quad \text{o} \quad k_O^2 = k_C^2 + d^2 \quad (9.11)$$

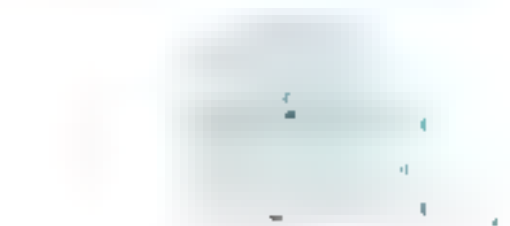


Figura 9.10



Figura 9.11



Fotografía 9.1 En la figura 9.13 se tabularon los datos de una pequeña muestra de todas las formas de acero laminado que se encuentran con facilidad. En la fotografía se muestran dos ejemplos de vigas de perfil ancho que se usan en la construcción de edificios.

Ejemplo 1 Como una aplicación del teorema de los ejes paralelos se puede utilizar para determinar el momento de inercia I_x de un área circular con respecto a un eje centroidal (figura 9.14). En el problema resuelto 9.2 se encontró que el momento de inercia de un área circular con respecto a un eje centroidal es $I_x = \pi r^4/4$. Por tanto se puede escribir

$$I_x = I + Ad^2 = \frac{\pi r^4}{4} + \pi r^2 d^2 = \frac{\pi r^4}{4}$$

Ejemplo 2 El teorema de los ejes paralelos también se puede utilizar para determinar el momento de inercia de un área cuando se conoce el momento de inercia del área con respecto a un eje paralelo. Por ejemplo, considere un área triangular (figura 9.11). En el problema resuelto 9.1 se encontró que el momento de inercia del triángulo con respecto a su base AA' es igual a $I_{AA'} = bh^3/12$. Con el teorema de los ejes paralelos se escribe

$$I_{BB'} = I_{AA'} + Ad^2 = \frac{bh^3}{12} + (bh)d^2 = \frac{bh^3}{12}$$

Es necesario restar el producto Ad^2 fue restado del momento de inercia dado, con el fin de obtener el momento centroidal de inercia del triángulo. Observe que dicho producto se suma cuando se pasa de un eje centroidal a un eje paralelo, pero debe restarse cuando se pasa a un eje centroidal. En otras palabras, el momento de inercia de un área siempre es menor en relación con un eje centroidal que con respecto a cualquier otro eje paralelo.

En la figura 9.11 se observa que el momento de inercia del triángulo con respecto a la línea DD' (la cual se ha dibujado a través de un vértice del triángulo) se puede obtener escribiendo

$$I_{DD'} = I_{BB'} + Ad^2 = \frac{bh^3}{12} + (bh)(h)^2 = \frac{bh^3}{4}$$

Observe que $I_{DD'}$ no se habría podido obtener directamente a partir de $I_{AA'}$. El teorema de los ejes paralelos sólo se puede aplicar si uno de los dos ejes paralelos pasa a través del centroide del área.

9.7 MOMENTOS DE INERCIA DE AREAS COMPUESTAS

Un área compuesta A que está compuesta por varias áreas compuestas $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ (figura 9.15) cuyo momento de inercia de A puede subdividirse en n partes evaluadas sobre $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, el momento de inercia de A con respecto a un eje dado se obtiene sumando los momentos de las áreas $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ con respecto al mismo eje. Por tanto, el momento de inercia de un área que consiste de varias de las formas compuestas mostradas en la figura 9.12, se puede obtener con las fórmulas proporcionadas en dicha figura. Sin embargo, antes de sumar los momentos de inercia de las áreas componentes, es posible que se tenga que utilizar el teorema de los ejes paralelos para pasar cada momento de inercia al eje deseado. Esto se muestra en los problemas resueltos 9.4 y 9.5.

En la figura 9.13 se proporcionan las propiedades de las secciones transversales de varias formas (o perfiles) estructurales. Como se señaló en la sección 9.2, el momento de inercia de una sección de una viga con respecto a su eje neutro está relacionado con el cálculo del momento flector en esa sección de la viga. Por tanto, la determinación de los momentos de inercia es un prerrequisito para el diseño y el análisis de elementos estructurales.


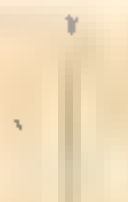
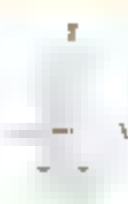

	Designación	Area in. ²	Altim. in.	Radio in.	Eje X-X			Eje Y-Y		
					I_x , in. ⁴	\bar{r}_x , in.	\bar{y} , in.	I_y , in. ⁴	\bar{r}_y , in.	\bar{z} , in.
	W15 x 50 ¹	14.7	27.90	4.495	800	7.35		40.1	1.75	
	W16 x 40	11.8	18.01	6.045	519	6.63		25.0		
	W18 x 50	18.5	26.7	6.0	890	7.74		40.1	1.75	
	W21 x 48	17.9	27.7	6.0	840	7.35		38.0	1.75	
	S15 x 70 ¹	20.6	19.00	6.251	638	6.71		54		
	S16 x 50	14.7	16.00	6.045	419	6.63		38.0		
	S18 x 50	18.5	26.7	6.0	890	7.74		40.1	1.75	
	S21 x 48	17.9	27.7	6.0	840	7.35		38.0	1.75	
	C12 x 20 ¹	7.35	12.00	3.047	441	4.47		4.47	0.740	0.671
	C14 x 15	5.45	14.00	3.047	284	4.47		4.47	0.740	0.671
	C16 x 10	4.75	16.00	3.047	219	4.47		4.47	0.740	0.671
	C18 x 9	4.75	18.00	3.047	194	4.47		4.47	0.740	0.671
	L6 x 6 x 1/2 ¹	6.44	3.04	3.04	20.8	1.52	1.75	20.8	1.52	1.75
	L4 x 4 x 1/4	3.49	1.98	1.98	4.4	0.99	1.19	4.4	0.99	1.19
	L3 x 3 x 1/8	1.96	1.31	1.31	1.1	0.63	0.78	1.1	0.63	0.78
	L2 x 2 x 1/8	1.10	0.67	0.67	0.6	0.32	0.40	0.6	0.32	0.40

Figura 9.12A

*Las medidas de la sección son iguales al tipo de construcción y tamaño. Dimensiones.

*Altim. medido en pulgadas y pesos en libras por pie.

*Altim. medido y pesos en pulgadas.




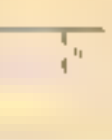
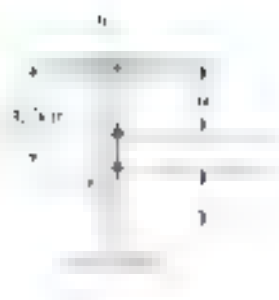
		Z x Y				I x Y	
Designación		Área (mm ²)	X _{cm} (mm)	Y _{cm} (mm)	I _{xx} (mm ⁴)	I _{yy} (mm ⁴)	
	W610 x 9.5	2500	5	180	120	100	
	W610 x 100	2300	467	176	810	170	
	W610 x 114	2500	4	1	810	170	
	W610 x 125	2500	201	103	344	301.7	
	S 100 x 10.2	250	4	10.2	85	10.2	
	S 100 x 11.3	250	4	11.3	85	10.2	
	S 100 x 12.5	250	4	12.5	85	10.2	
	S 100 x 14.3	250	4	14.3	85	10.2	
	C 100 x 17.1	2500	100	77	607	110	
	C 100 x 17.1	2500	100	77	607	110	
	C 100 x 17.1	2500	100	77	607	110	
	C 100 x 17.1	2500	100	77	607	110	
	L 152 x 152 x 10.0	3400	11.6	40.3	44.0	11.6	
	L 102 x 102 x 12.7	2430	2.34	31.0	30.2	2.34	
	L 76 x 76 x 6.4	832	0.57	23.0	21.4	0.57	
	L 152 x 102 x 12.7	3400	7.20	40.5	30.3	7.20	
	L 76 x 76 x 6.4	832	0.57	23.0	21.4	0.57	
	L 76 x 51 x 6.4	422	0.151	14.1	25.1	0.151	

Figura 9.130 Propiedades de secciones de acero laminado estándares del AISC

Áreas nominales en milímetros cuadrados y áreas en kilogramos por metro.

*Áreas, anchos y espesores en milímetros.



PROBLEMA RESUELTO 9.4

Se desea determinar el momento de inercia de una sección compuesta formada por un perfil de patín ancho y una placa de $9 \times \frac{1}{2}$ m. a su patín superior, como se muestra en la figura. Determine el momento de inercia y el radio de giro de la sección compuesta con respecto a los ejes x y y que pasan por el centroide C' de la sección.

SOLUCIÓN

Se calcula el área y el momento de inercia de cada una de las partes que componen la sección y se calcula la distancia Y al centroide de la sección compuesta utilizando los centroides de cada una de las partes y la forma de un área plana como referencia a la figura 9.13A. El área y la coordenada y del centroide de la placa están dados por

$$A = (9 \text{ m})(0.75 \text{ m}) = 6.75 \text{ m}^2$$

$$\bar{y} = \frac{1}{2}(14.1 \text{ m}) + \frac{1}{2}(0.75 \text{ m}) = 7.425 \text{ m}$$

Tabla A

Sección	Área, m^2	y , m	yA , m^3
Placa	6.75	7.425	50.117
Perfil de patín ancho	11.2	0	0
	$\Sigma A = 17.95$		$\Sigma yA = 50.117$

$$\bar{y} = \Sigma yA / \Sigma A = 50.117 / 17.95 = 2.792 \text{ m} \quad Y = 7.425 - 2.792 = 4.633 \text{ m}$$

Momento de inercia. Se utiliza el teorema de los ejes paralelos para determinar los momentos de inercia de cada una de las partes de la sección con respecto al eje x' . Este eje es central para la sección compuesta por lo que para cada una de las partes se calculan los momentos de inercia separadamente y los valores se suman para la forma compuesta que se obtiene a partir de la ecuación 9.13A.

Para la forma de patín ancho,

$$I_x = I_y + A\bar{y}^2 = 785 + (11.2)(2.792)^2 = 472.3 \text{ m}^4$$

Para la placa,

$$I_x = \bar{I}_x + A\bar{y}^2 = \left(\frac{1}{12}bh^3\right) + (6.75)(7.425 - 2.792)^2 = 145.2 \text{ m}^4$$

Para el área compuesta,

$$I_x = 472.3 + 145.2 = 617.5 \text{ m}^4 \quad I_x = 617.5 \text{ m}^4 \quad \leftarrow$$

El radio de giro k_x es

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{617.5 \text{ m}^4}{17.95 \text{ m}^2}} \quad \leftarrow$$



PROBLEMA RESUELTO 9.5

Determinar el momento de inercia del área sombreada con respecto al eje x .

SOLUCIÓN

El área dada puede obtenerse restándole un semicírculo a un rectángulo. Los momentos de inercia del rectángulo y del semicírculo se hallan por separado y se combinan en forma separada.



Momento de inercia del rectángulo. Haciendo referencia a la figura 9.12, se obtiene:

$$I_x = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12}(240 \text{ mm})(120 \text{ mm})^3 = 138.2 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Momento de inercia del semicírculo. Haciendo referencia a la figura 5.5, se determina la ubicación del centroide C del semicírculo con respecto al diámetro AA :

$$a = \frac{4r}{3\pi} = \frac{(4)(45 \text{ mm})}{3\pi} = 35.2 \text{ mm}$$

La distancia h desde el centroide C hasta el eje x es

$$h = 120 \text{ mm} - a = 120 \text{ mm} - 35.2 \text{ mm} = 84.8 \text{ mm}$$

Además, en referencia a la figura 9.12, se calcula el momento de inercia del semicírculo con respecto al eje AA (el eje x se halla a una distancia h del eje AA):

$$I_{AA} = \frac{1}{8}\pi r^4 = \frac{1}{8}\pi(45 \text{ mm})^4 = 25.76 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_x = \frac{1}{2}\pi r^4 = \frac{1}{2}\pi(45 \text{ mm})^4 = 12.72 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Con respecto a los ejes paralelos se obtiene el valor de I_y :

$$I_y = I_{AA} + A_0h^2 = 25.76 \times 10^6 \text{ mm}^4 + 25.2 \times 10^3 \text{ mm}^2(84.8 \text{ mm})^2$$

$$I_y = 21.5 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

De nuevo, con el teorema de los ejes paralelos se obtiene el valor de I :

$$I = I_y + A_0h^2 = 21.5 \times 10^6 \text{ mm}^4 + 25.2 \times 10^3 \text{ mm}^2(84.8 \text{ mm})^2$$

$$I = 92.3 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Momento de inercia del área dada. Si se le resta el momento de inercia del semicírculo al momento de inercia del rectángulo, se obtiene:

$$I_x = 138.2 \times 10^6 \text{ mm}^4 - 92.3 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_x = 45.9 \times 10^6 \text{ mm}^4$$



La fórmula $\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 \frac{t}{t_0}$ se aplica a las expresiones de la ecuación (8.3) al reemplazar la presión total p con la presión actual p_a y el área A con el área A_a de la sección actual. Se debe tener en cuenta que el área A_a es el área actual, no el área original. En el caso de un agujero se debe utilizar el área actual de apertura y los esfuerzos con un signo negativo.

La fórmula $\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 \frac{t}{t_0}$ se aplica a las expresiones de la ecuación (8.3) al reemplazar σ con la división $\frac{F}{A}$ y el área A con el área A_a de la sección actual. Se debe tener en cuenta que el área A_a es el área actual, no el área original. En el caso de un agujero se debe utilizar el área actual de apertura y los esfuerzos con un signo negativo.

La fórmula $\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 \frac{t}{t_0}$ se aplica a las expresiones de la ecuación (8.3) al reemplazar σ con la división $\frac{F}{A}$ y el área A con el área A_a de la sección actual. Se debe tener en cuenta que el área A_a es el área actual, no el área original. En el caso de un agujero se debe utilizar el área actual de apertura y los esfuerzos con un signo negativo.

$$f_{11} = f_1 + f_2 \quad (8.4)$$

la cual depende de la forma del área dada.

La fórmula $\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 \frac{t}{t_0}$ se aplica a las expresiones de la ecuación (8.3) al reemplazar σ con la división $\frac{F}{A}$ y el área A con el área A_a de la sección actual. Se debe tener en cuenta que el área A_a es el área actual, no el área original. En el caso de un agujero se debe utilizar el área actual de apertura y los esfuerzos con un signo negativo.

La fórmula $\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 \frac{t}{t_0}$ se aplica a las expresiones de la ecuación (8.3) al reemplazar σ con la división $\frac{F}{A}$ y el área A con el área A_a de la sección actual. Se debe tener en cuenta que el área A_a es el área actual, no el área original. En el caso de un agujero se debe utilizar el área actual de apertura y los esfuerzos con un signo negativo.

$$R = \gamma \int y^2 dA = \gamma I_y$$

$$M = \gamma \int y dA = \gamma I$$

donde y es la distancia desde el eje x hasta el centro de la placa por esta fórmula. Como R es el momento de inercia y I es el momento de inercia, se concluye que

$$\Sigma M = \gamma R = M$$

donde γ es la profundidad del punto de aplicación de R . Entonces

$$\gamma R = M \quad \text{o} \quad \gamma = \frac{I}{I_y}$$

El resultado se puede encontrar en detalle en la sección 9.2 de la literatura de ingeniería. Las fórmulas de la ecuación (8.4) se aplican a las formas de área de la ecuación (8.3) que es útil de ver en los cursos de ingeniería posteriores.

Problemas



Figura P9.31 y P9.32

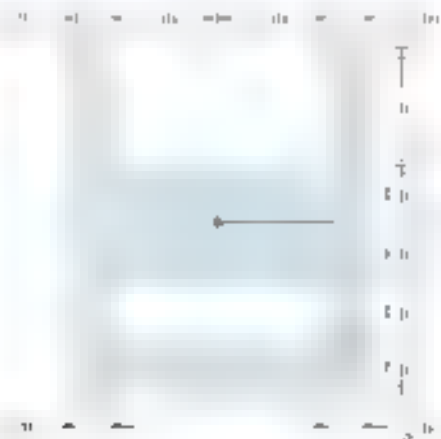


Figura P9.33 y P9.34

9.31 y 9.32 Para el área sombreada que muestran las figuras, determine el momento de inercia y el radio de giro del área con respecto al eje x .

9.33 y 9.34 Para el área sombreada que muestran las figuras, determine el momento de inercia y el radio de giro del área con respecto al eje y .

9.35 y 9.36 Para el área sombreada que muestran las figuras, determine los momentos de inercia con respecto a los ejes x y y si $a = 20$ mm.

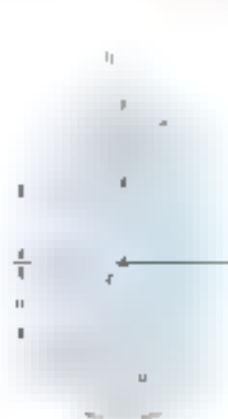


Figura P9.35



Figura P9.36

9.37 Para el área sombreada de $4\,000\text{ mm}^2$ que se muestra en la figura, determine la distancia d_2 y el momento de inercia con respecto al eje central al paralelo AA' si se sabe que los momentos de inercia con respecto a AA' y BB' son $1.2 \times 10^8\text{ mm}^4$ y $3.2 \times 10^8\text{ mm}^4$ y que $d_1 = 25$ mm.

9.38 Para la región sombreada que se muestra en la figura, determine el momento de inercia con respecto al eje central al paralelo AA' si se sabe que $d_1 = 25$ mm, $d_2 = 15$ mm y que los momentos de inercia con respecto a AA' y BB' son $7.84 \times 10^8\text{ mm}^4$ y $3.21 \times 10^8\text{ mm}^4$ respectivamente.

Figura P9.37 y P9.38

9.39 El área sombreada en la figura tiene un área de 70 m^2 . Determine los momentos de inercia I_x e I_y , si se sabe que $I_y = 2I_x$ y que el momento polar de inercia del área con respecto al punto A es $J_A = 2\,250 \text{ m}^4$.



Figura P9.39 y P9.40

9.40 Los momentos polares de inercia del área sombreada con respecto a los puntos A, B y D son $J_A = 2\,880 \text{ in}^4$, $J_B = 6\,720 \text{ in}^4$ y $J_D = 1\,560 \text{ in}^4$, respectivamente. Determine el momento polar de inercia J_C y la distancia d desde C hasta D.

9.41 a 9.44 Para el área mostrada en las figuras determine los momentos de inercia I_x e I_y con respecto a los ejes centroidales paralelo y perpendicular al eje AB, respectivamente.

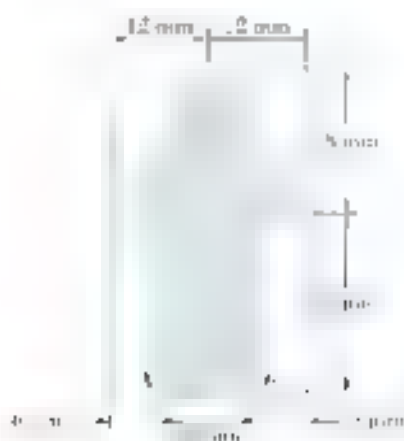


Figura P9.42



Figura P9.43

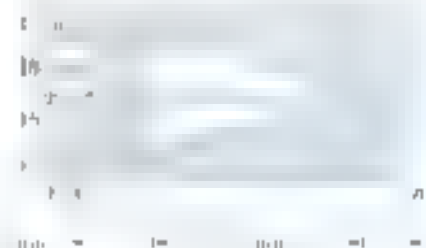


Figura P9.44

9.45 y 9.46 Para el área mostrada en las figuras determine el momento polar de inercia con respecto a a) el punto C y b) el centroide del área.



Figura P9.45



Figura P9.46

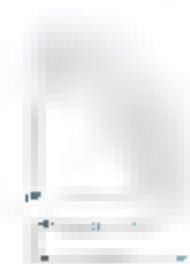


Figura P9.47



Figura P9.49

9.47 y 9.48 Para las áreas que intervienen en las figuras, determine el momento de inercia I_x y I_y con respecto a los ejes x y y que pasan por el centro de la figura.

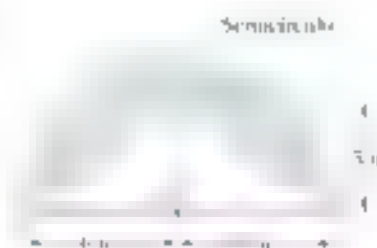


Figura P9.48

9.49 Como se muestra en la figura, dos placas de acero de 20 mm se sueldan a una sección S laminada. Para la sección combinada, determine los momentos de inercia, los radios de giro con respecto a los ejes centroidales x y y .

9.50 Como se muestra en la figura, dos canales se sueldan a una sección W laminada. Para la sección combinada, determine los momentos de inercia y los radios de giro con respecto a los ejes centroidales x y y .

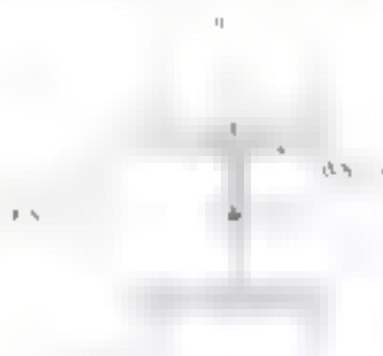


Figura P9.50

9.51 Para formar la sección de una caja reforzada, se sueldan entre sí dos secciones W laminadas. Determine los momentos de inercia y los radios de giro de la sección combinada con respecto a los ejes centroidales mostrados en la figura.

9.52 Dos canales se sueldan a una placa de acero de $d \times 12$ in, como se muestra en la figura. Determine el ancho d para el cual la relación I_x/I_y de los momentos de inercia centroidales de la sección es 6.

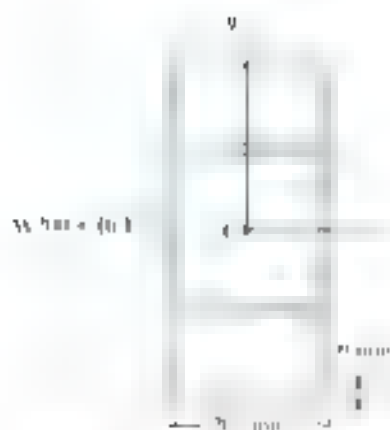


Figura P9.51



Figura P9.52

9.53 Como se muestra en la figura, dos ángulos de $76 \times 76 \times 6.4$ mm se sueldan a un canal C350 X 97.5. Determine los momentos de inercia de la sección combinada con respecto a los ejes centroidales x y y paralelos y perpendicular al alma del canal, respectivamente.



Figura P9.53

9.54 Como se muestra en la figura, dos ángulos de $1.4 \times 3 \times \frac{1}{2}$ in. se sueldan a una placa de acero. Determine los momentos de inercia de la sección combinada con respecto a los ejes centroidales x y y paralelos y perpendicular al alma del canal, respectivamente.

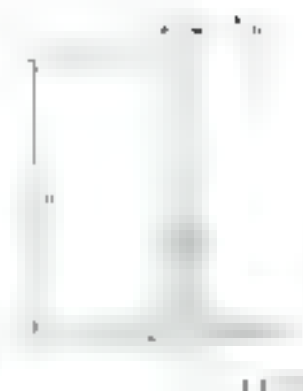


Figura P9.54

9.55 Una sección de canal se suelda como se muestra en la figura a un canal a su alfa superior. Determine los momentos de inercia de la sección combinada con respecto a los ejes centroidales x y y .



Figura P9.55

9.56 Dos ángulos de $1.5 \times 3 \times \frac{1}{2}$ in. se sueldan a una placa de acero de $\frac{1}{2}$ in. Determine la distancia e y los momentos de inercia de la sección combinada. Se sabe que $I_x = 3I_y$.

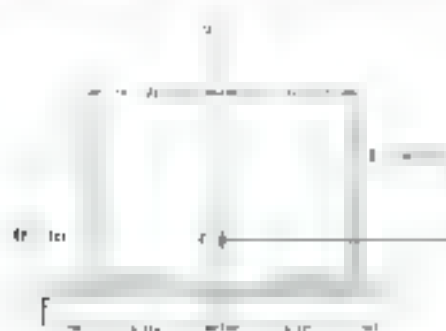


Figura P9.56

9.57 y 9.58 En las figuras se muestra un panel que conforma uno de los extremos de una pila. La cual se llena con agua hasta la línea AA'. Con respecto a la sección 1-2, determine la profundidad del punto de aplicación de la resultante de las fuerzas hidrostáticas que actúan sobre el panel (¿cuál es el centro de presión?)

Figura P9.57

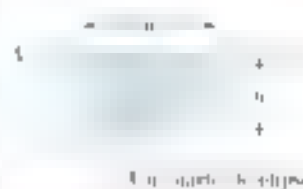


Figura P9.58

9.59 y 9.60 En las figuras se muestra un panel que conforma uno de los extremos de una pila. La cual se llena con agua hasta la línea AA'. Con respecto a la sección 1-2, determine la profundidad del punto de aplicación de la resultante de las fuerzas hidrostáticas que actúan sobre el panel (¿cuál es el centro de presión?)

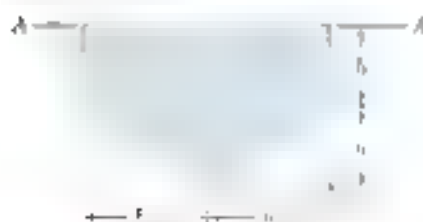


Figura P9.59



Figura P9.60

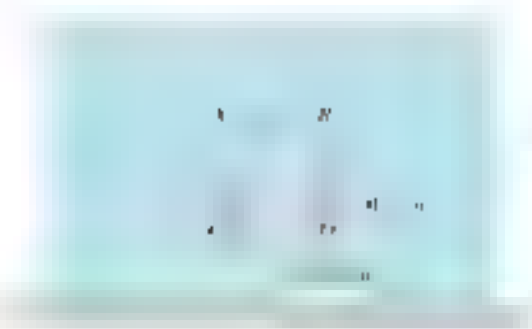


Figura P9.61

9.61 La compuerta en la figura está en un canal de 15 m de ancho. Se sabe que el agua que fluye por debajo de la compuerta ejerce una fuerza horizontal de 100 kN sobre la compuerta. Si se sabe que el coeficiente de fricción entre la compuerta y el fondo del canal es 0.1, determine la fuerza horizontal que se debe aplicar a la compuerta para mantenerla en su posición.

9.62 Una compuerta vertical de forma trapezoidal se emplea como una de las compuertas que se muestran en la figura. Se sabe que la fuerza horizontal que se le aplica a lo largo de la línea AB es de 100 kN. Si se sabe que la fuerza horizontal que se le aplica a lo largo de la línea CD es de 100 kN, determine la profundidad h del agua con la cual se abre la compuerta.

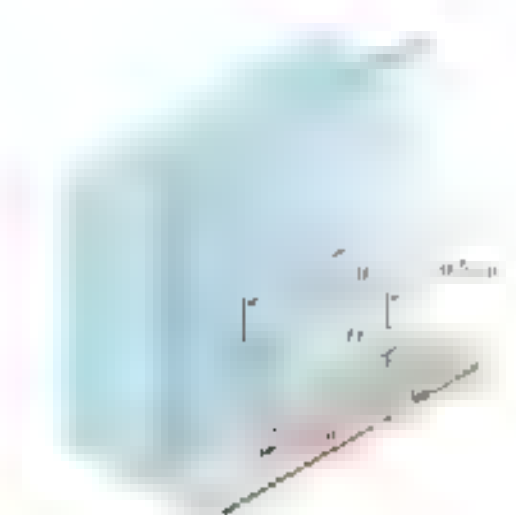


Figura P9.62

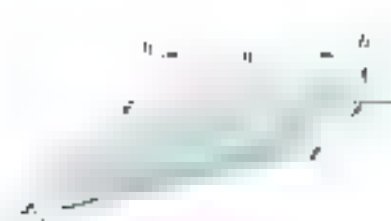


Figura P9.63

9.63 Determine la coordenada x del centroide del volumen mostrado en la figura. Sugerencia: La altura h del agua que se le aplica a la compuerta es de 10 ft; considere una analogía entre esta altura y la presión del agua sobre una superficie sumergida.

9.64 Determine la coordenada x del centroide del volumen mostrado en la figura. Sugerencia: Considere un volumen de agua que se le aplica a la compuerta de 10 ft de altura. Véase la sugerencia del problema 9.63.



Figura P9.64

9.65. Un elemento que está sujeto a las fuerzas mostradas en la figura se encuentra en una plana A que está sumergida. Puede reducirse a una fuerza P sobre el centro C del área y dos pares. La fuerza P es perpendicular al área y su magnitud es $P = \gamma h \sin \theta$ donde γ es el peso específico del líquido, h es la profundidad desde M = $\gamma h = \theta \times M = \gamma h \sin \theta$, donde $h \sin \theta = f \times y^2 / A$ (véase la sección 9.25). Observe que los pares son independientes de la profundidad a la que está sumergida el área.



Figure P9.85

2.88 Demuestre que la resultante de fuerzas hidrostáticas que actúan sobre un área plana A que está sumergida es una fuerza \mathbf{F} perpendicular al área y con una magnitud de $F = \gamma A y_c \sin \theta = pA$, donde γ es el peso específico del líquido, y_c es la distancia que hay a lo largo del plano AB desde el punto C hasta el centro de gravedad G del área, θ es el ángulo que forma el plano AB con la horizontal y p es la presión hidrostática en el punto C . Además, demuestre que \mathbf{F} es una fuerza que actúa sobre el punto C_p , llamado el centro de presión, cuyas coordenadas son $x_p = I_{xy}/A y_c$ y $y_p = I_x/A y_c$, donde $I_x = \int_A y^2 dA$ y $I_{xy} = \int_A xy dA$ son los momentos de área de segundo orden. Demuestre que el punto C_p está en la línea que pasa por C y G y que C_p está a una distancia h de la profundidad x en la que está sumergida el área.



Figure P9.55

*9 B. PRODUCTO DE MERCÚRIO

Let's integrate!

$$I_{xy} = \int xy \, dA \quad (9.12)$$

[illegible]

El análisis de la información es necesario para poder determinar el nivel de actividad promediado de manera de poder evaluar la actividad. Por ejemplo, en un estudio se ha observado que el tiempo promedio de actividad de un individuo es de 15 minutos. Esto indica que el individuo está activo durante el 15% del tiempo. Sin embargo, si se analiza la actividad de un individuo en un período de tiempo más largo, se puede observar que la actividad es más alta de lo que se esperaba. Esto puede deberse a una serie de factores, como la actividad física, la actividad mental, la actividad social, etc. En este caso, el análisis de la información es necesario para poder determinar el nivel de actividad promediado de manera de poder evaluar la actividad.

[illegible]

Figure 9.14



Figure 8.16

Con las relaciones (9.14), se escribe:

$$I_x = I_z \cos^2 \theta - 2I_{zy} \sin \theta \cos \theta + I_y \sin^2 \theta \quad (9.15)$$

Por forma similar se obtiene. Las siguientes expresiones para I_y e I_{xy} :

$$I_y = I_z \sin^2 \theta + 2I_{zy} \sin \theta \cos \theta + I_x \cos^2 \theta \quad (9.16)$$

$$I_{xy} = (I_x - I_y) \sin \theta \cos \theta + I_{zy} \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad (9.17)$$

Recordando las relaciones trigonométricas

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \quad \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

y

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \quad \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

Se obtienen así las ecuaciones (9.15) y (9.17) de la siguiente forma:

$$I_x = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{zy} \sin 2\theta \quad (9.18)$$

$$I_y = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta + I_{zy} \sin 2\theta \quad (9.19)$$

$$I_{xy} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta + I_{zy} \cos 2\theta \quad (9.20)$$

Si se suman las ecuaciones (9.18) y la (9.19), se observa que

$$I_x + I_y = I_x + I_y \quad (9.21)$$

Por lo tanto, al variar el ángulo θ , los principales momentos de inercia I_x y I_y son iguales al momento de inercia I_z .

Las ecuaciones (9.18) y (9.20) son las ecuaciones paramétricas de una elipse. Esto se ve al poner $x = I_x$ y $y = I_y$ en las ecuaciones (9.18) y (9.20). Los ejes x y y se giran un ángulo θ con respecto a los ejes I_x e I_y . Para cualquier valor fijo del parámetro θ , todos los puntos que se obtienen de esta forma estarán localizados sobre un círculo. Para establecer esta propiedad, se elimina θ de las ecuaciones (9.18) y (9.20) (o anterior se lleva a ceros el denominador de la ecuación (9.20) y se eleva al cuadrado). Se eleva al cuadrado ambos miembros de las ecuaciones (9.18) y (9.20) y tomando las expresiones obtenidas. Así se escribe

$$\left(I_x - \frac{I_x + I_y}{2} \right)^2 + I_{xy}^2 = \left(\frac{I_x - I_y}{2} \right)^2 + I_{zy}^2 \quad (9.22)$$

Estableciendo

$$I_{\text{prom}} = \frac{I_x + I_y}{2} \quad \text{y} \quad R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2} \right)^2 + I_{zy}^2} \quad (9.23)$$

se escribe la identidad (9.22) de la siguiente forma

$$(I_x - I_{\text{prom}})^2 + I_{xy}^2 = R^2 \quad (9.24)$$

Los valores máximos y mínimos de I_x que tiene un eje de inercia principal I_{prom} y I_{xy} son $I_{\text{prom}} \pm R$ respectivamente, según la (9.24). Se observa que las ecuaciones (9.23) y (9.24) son las ecuaciones paramétricas del mismo círculo. Además, debido a la simetría del círculo con res-

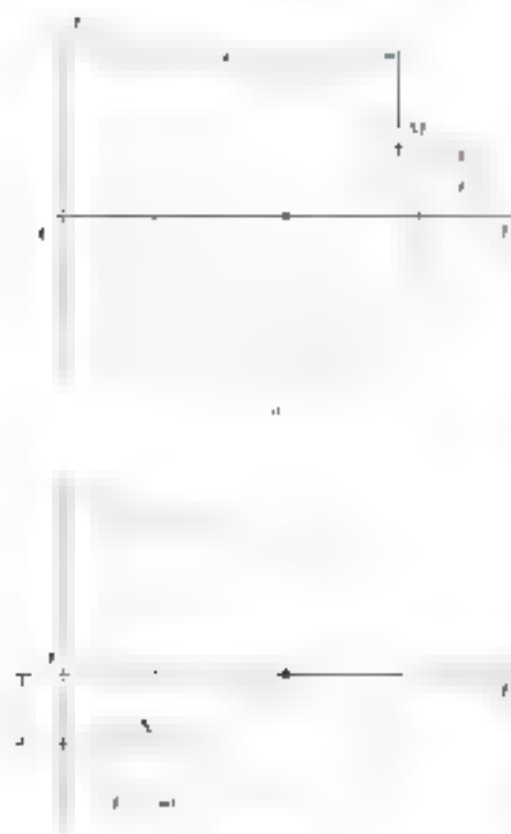


Figura 9.16

por el valor de la inercia total se hubiera obtenido. Los momentos de inercia con respecto al eje x de M se obtienen al trasladar el momento $I_{x'}$ de los ejes x' a I_{xx} (figura 9.16a). Esta propiedad se utilizará en la sección 9.10.

Los dos ejes x y y donde x es paralelo a x' antes mencionados en la figura 9.16a son de interés especial: el punto A corresponde al menor valor de momento de inercia I_{xx} y el punto B corresponde al mayor valor para la inercia total. A veces, estos puntos se conocen como valor de cero para el producto de momento. Por tanto, los ejes x y y se conocen como ejes principales de los ejes x' y y' por el hecho de que tomando $I_{xy} = 0$ en la ecuación (9.20). De esta forma se obtiene:

$$\tan 2\theta_m = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \quad (9.25)$$

Esta ecuación de momentos da con 2θ que están separados 180° y por tanto dos ejes x y y se conocen como ejes principales. Uno de estos ejes x corresponde al punto A en la figura 9.16a. También corresponde a x' a través de O en la figura 9.17 con respecto al cual el momento de inercia es el menor valor de momento de inercia. El punto B está en el otro extremo de x con respecto al cual el momento de inercia es el mayor valor. Los ejes x y y se conocen como ejes principales de los ejes x' y y' por el hecho de que los ejes x y y se conocen como ejes principales del área con respecto a O y los ejes x' y y' corresponden a I_{xx} e I_{yy} en términos de momento de inercia. La ecuación (9.25) se obtiene al sustituir en la ecuación (9.20) el producto de momento I_{xy} en la ecuación (9.20) y al dividir por I_{xx} dada con respecto a sus ejes principales es igual a x .

A partir de la figura 9.18a se observa que

$$I_{xxm} = I_{xxm} + A \quad I_{xym} = I_{xym} - A \quad (9.26)$$

Como una de las ecuaciones para I_{xxm} y I_{xym} correspondientes a las ecuaciones (9.23), se escribe

$$I_{xxm} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \quad (9.27)$$

A veces que se medirá leer la ecuación (9.27) en los ejes principales corresponden a I_{xx} y I_{yy} corresponden a I_{xx} y I_{yy} en términos de momento de inercia. Los ejes x y y se conocen como ejes principales de los ejes x' y y' por el hecho de que los ejes x y y corresponden al mayor valor de momento de inercia y los ejes x' y y' corresponden al menor valor de momento de inercia.

La ecuación (9.27) se puede usar para observar que si un área posee un eje de simetría a través de un punto O (figura 9.18b) se obtiene un eje principal de inercia con respecto a O . Por otro lado, si un área posee un eje de simetría a través de un punto O (figura 9.18b) se obtiene un eje principal de inercia con respecto a O .

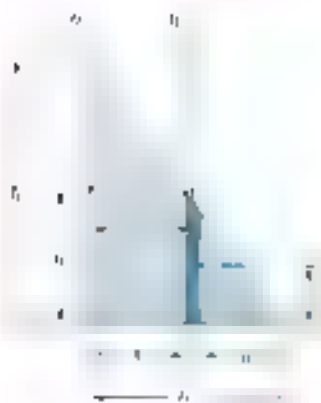
Las propiedades que se analizan de esta manera son las áreas principales de inercia. Los ejes principales de inercia se conocen como ejes principales de inercia. Si se selecciona un punto O en un área que coincide con el centro de gravedad del área, cualquier eje que pase a través de O es un eje principal: los dos ejes principales de un área con respecto a un centro de gravedad reciben el nombre de ejes principales de inercia.

*Esta ecuación también se puede obtener al dividir la ecuación (9.20) por I_{xx} .



PROBLEMA RESUELTO 9.6

Para el triángulo mostrado en la figura, *a)* calcule el momento de inercia I_{xy} con respecto a los ejes x y y , y *b)* en relación con los ejes centroidales que son paralelos a los ejes x y y .



SOLUCIÓN

a) Producto de inercia I_{xy} . Se selecciona una tira elemental de espesor dy en la figura. El momento de inercia de esta tira con respecto a los ejes x y y es:

$$dI_{xy} = dI_{xy'} + x_1 y_1 dA$$

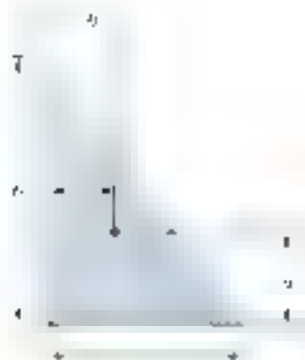
El momento de inercia de la tira con respecto a los ejes x' y y' es:

$$dI_{xy'} = \int_{x'} x'^2 y'^2 dA = \int_{x'} x'^2 y'^2 dx' = \frac{1}{3} x'^3 y'^2 \Big|_{x'=0}^{x'=x_1} = \frac{1}{3} x_1^3 y_1^2$$

Integrando dI_{xy} desde $x = 0$ hasta $x = b$ se obtiene:

$$I_{xy} = \int dI_{xy} = \int x_1 y_1 dA = \int_0^b x_1 \left(\frac{1}{2} y_1^2 \right) \left(1 - \frac{x_1}{b} \right) dx_1$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^b x_1 y_1^2 dx_1 - \frac{1}{2b} \int_0^b x_1^2 y_1^2 dx_1 = \frac{1}{2} y_1^2 \left[\frac{x_1^2}{2} \right]_0^b - \frac{1}{6b} y_1^2 \left[\frac{x_1^3}{3} \right]_0^b$$



b) Producto de inercia $I_{xy'}$. Las coordenadas del centroide del triángulo con respecto a los ejes x y y son:

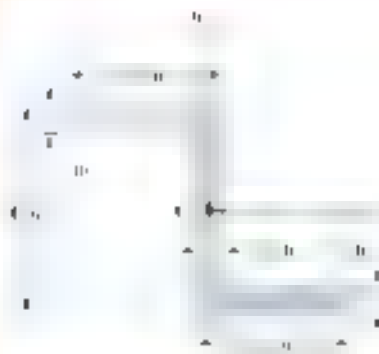
$$\bar{x} = \frac{1}{3}b \quad \bar{y} = \frac{1}{3}h$$

En la expresión para I_{xy} obtenida en la parte a), se aplica el teorema de los ejes paralelos y se obtiene:

$$I_{xy} = \bar{I}_{xy'} + \bar{x}\bar{y}A$$

$$I_{xy'} = I_{xy} - \bar{x}\bar{y}A = \frac{1}{6}bh^3 - \left(\frac{1}{3}b \right) \left(\frac{1}{3}h \right) \left(\frac{1}{2}bh \right)$$

$$\bar{I}_{xy'} = \frac{1}{6}bh^3 - \frac{1}{6}bh^3 = 0$$



PROBLEMA RESUELTO 9.7

Para la sección mostrada en la figura se pide encontrar los valores de los momentos de inercia con respecto a los ejes x y y que pasan por el centroide de la sección, los cuales son iguales a:

$$I_x = 1345 \text{ in}^4 \quad I_y = 1345 \text{ in}^4$$

Determine α , la orientación de los ejes principales de la sección con respecto a los ejes x y y que pasan por el centroide de la sección, los cuales son iguales a:

SOLUCIÓN

Primero se calcula el producto de inercia con respecto a los ejes x y y . El área es dividida en tres rectángulos como se muestra en la figura. Se observa que para cada uno de los rectángulos, el producto de inercia I_{xy} con respecto a ejes centroidales paralelos a los ejes x y y es igual a cero. Con el uso del teorema de los ejes paralelos $I_{xy} = I_{x'y'} + x'y'A$ se concluye que para cada uno de los rectángulos $I_{x'y'} = 0$ y $x'y'A = 0$.

Rectángulo	Área A	x in	y in	$x'yA$ in ⁴
I	8	6.25	1.75	-28
II	8	1.75	6.25	-28
III	8	6.25	6.25	250
				194

$$I_{xy} = \sum x'yA = -194 \text{ in}^4$$

a) **Ejes principales.** Cuando se conocen las magnitudes de I_x , I_y o I_{xy} se puede encontrar θ_{pp} para determinar los valores de θ_{pp} .

$$\tan 2\theta_{pp} = \frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} = \frac{2(-194)}{1345 - 1345} = \infty$$

$$2\theta_{pp} = 75.4^\circ \text{ y } 255.4^\circ$$

$$\theta_{pp} = 37.7^\circ \text{ y } 127.7^\circ$$

Para determinar los ejes principales se debe conocer los valores de I_x y I_y .

$$I_x = I_{x1} + I_{x2} + I_{x3} = I_{x1} + I_{x2} + I_{x3}$$

$$I_x = 1345 + 1345 + 1345 = 1345 \text{ in}^4$$

Observando que los centroides de cada una de las secciones rectangulares están en el eje b que del eje a , se concluye que $I_x = I_{max} = 1345 \text{ in}^4$ e $I_b = I_{min} = 1345 \text{ in}^4$. Por lo tanto, se puede concluir que $\theta = 37.7^\circ$ es la orientación de los ejes principales.

Problemas



Figura P9.67



Figura P9.69

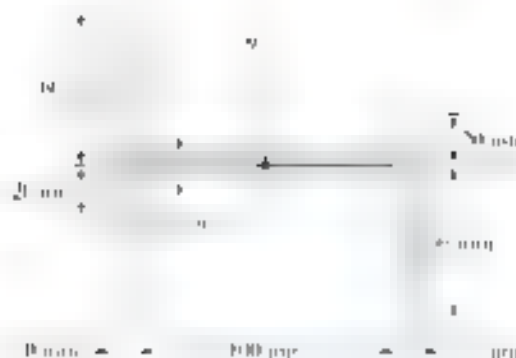


Figura P9.71



Figura P9.73

9.67 a 9.70 Para el área mostrada en las figuras, determine por integración directa el producto de inercia con respecto a los ejes x y y .



Figura P9.68

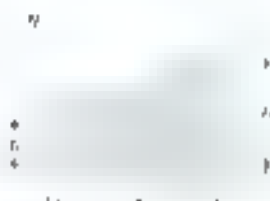


Figura P9.70

9.71 a 9.74 Utilice el teorema de los ejes paralelos para determinar el producto de inercia de un área dada en las figuras con respecto a los ejes centrales x y y .

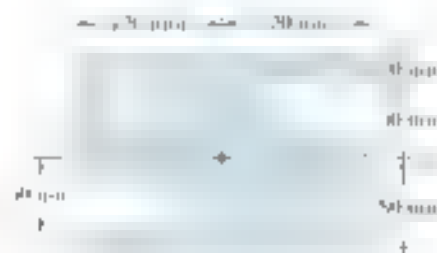


Figura P9.72

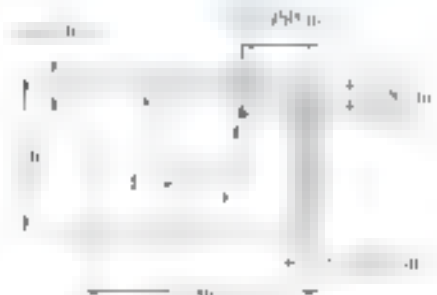


Figura P9.74

9.75 a 9.78 Utilice el teorema de los ejes paralelos para determinar los momentos de inercia de las áreas mostradas en las figuras con respecto a los ejes x e y .



Figura P9.75



Figura P9.77



Figura P9.76



Figura P9.78

9.79 Determine los momentos I_x y I_y por rotación de 90° de la sección de elipse del problema 8.67 con respecto a un nuevo sistema de ejes que se obtiene al rotar los ejes x e y de la figura 10.1 a 45° en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

9.80 Determine los momentos y los productos de inercia del área del problema 9.75 con respecto a los ejes x e y paralelos que se obtienen al rotar los ejes x e y 30° en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

9.81 Determine los momentos y los productos de inercia del área del problema 9.73 con respecto a los ejes x e y paralelos que se obtienen al rotar los ejes x e y 60° en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

9.82 Determine los momentos y los productos de inercia del área del problema 9.78 con respecto a los ejes x e y paralelos que se obtienen al rotar los ejes x e y 45° en el mismo sentido que las manecillas del reloj.

9.83 Determine los momentos y los productos de inercia de la sección T con respecto al eje x e y de la figura 10.1 a 30° en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

9.84 Determine los momentos y los productos de inercia de la sección T con respecto al eje x e y de la figura 10.1 a 45° en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

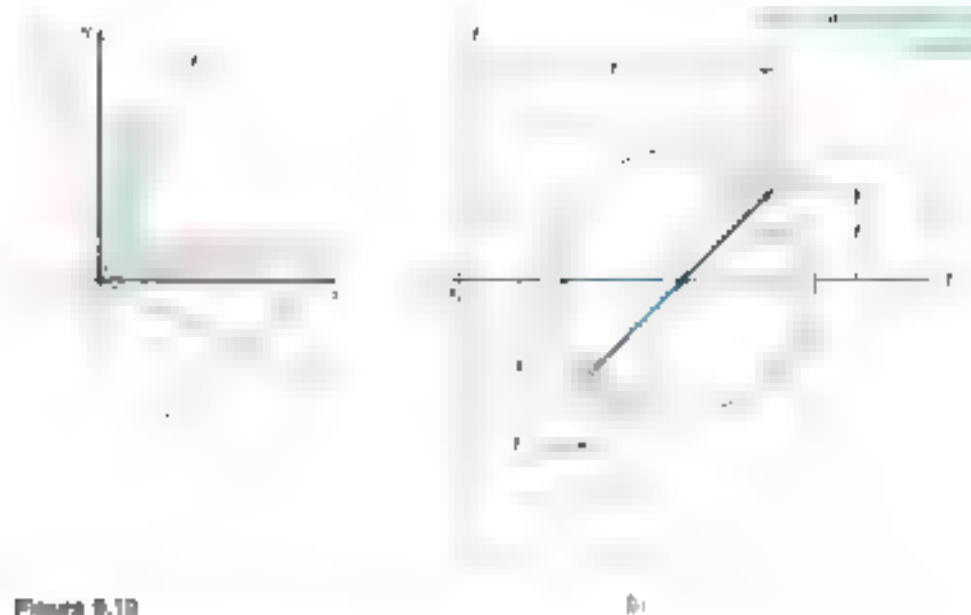


Figura 9.19

sea α en s , $I_1 = I_2 = 0$ cuando $\alpha = 0$, así que se considera que la rotación que lleva a CA hasta CA es en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj. En estas condiciones, el ángulo θ_{CA} que se obtiene a partir de α es $\alpha = 75^\circ$ cuando α es el eje principal OA en la figura 9.19a. En consecuencia, tanto la rotación que lleva a CA hasta OA también es en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj. Se concluye que los sentidos de rotación en ambos puntos de la figura 9.19a son los mismos. Si se considera la rotación en el sentido de las manecillas del reloj, α es un ángulo 2θ para llevar a CA hasta la CA en el círculo de Mohr, entonces una rotación en el sentido de las manecillas del reloj a través de un ángulo θ llevará a CA hasta el primer punto correspondiente OA en la figura 9.19a.

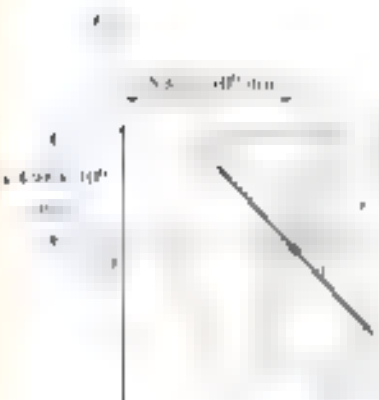
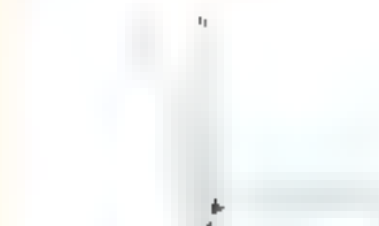
Como el círculo de Mohr está en un plano cartesiano, el nivel de rotación se puede determinar considerando los incrementos en el primer cuadrante de α con respecto a los ejes rectangulares x y y (figura 9.19a). Entonces, el punto X' de coordenadas I_1 e I_2 y el punto Y' de coordenadas $I_1 = I_2 = 0$ están localizados sobre el círculo de Mohr y en el eje CA en la figura 9.19a. Cabe señalar que el ángulo $\angle XOY'$ en la figura 9.19a. Puesto que, como se señaló anteriormente, el ángulo $\angle X'CA$ es igual al doble del ángulo $\angle XOY'$, se concluye que el ángulo $\angle X'CA$ en la figura 9.19a es el doble del ángulo $\angle XOY'$ en la figura 9.19a. Puesto que $\angle X'CA$ define los incrementos a partir de los ejes $I_1 = I_2$ y $I_1 = I_2 = 0$ hasta X' con respecto a los ejes rectangulares x y y' que forman un ángulo θ entre ellos, α se puede obtener rotando a través de un ángulo 2θ al diámetro XY' del círculo correspondiente a los ejes principales x y y' producidos por los ejes $I_1 = I_2$ y $I_1 = I_2 = 0$. Se observa que la rotación que lleva al diámetro XY' en la figura 9.19a tiene el mismo sentido que la rotación que lleva a los ejes x y y hasta los ejes x' y y' en la figura 9.19a.

Es necesario señalar que el uso del círculo de Mohr que está de acuerdo con las soluciones gráficas está sujeto a las soluciones basadas en la geometría y no en las distancias físicas involucradas. Se recomienda al lector no basarse en la solución de Mohr cuando se quiere obtener la solución de las distintas rotaciones que se requieren para la solución más perfecta de un problema dado, ya sea por computadora o de forma manual.



$$I_{xy} = 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{xy} = -2.54$$



PROBLEMA RESUELTO 9.8

Para la sección mostrada en la figura, se sabe que los momentos y el producto de inercia con respecto a los ejes x y y son, respectivamente:

$$I_x = 7.20 \times 10^6 \text{ mm}^4 \quad I_y = 2.30 \times 10^6 \text{ mm}^4 \quad I_{xy} = -2.54 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Con el uso del círculo de Mohr, determine: a) los ejes principales de la sección con respecto a O ; b) los valores de los momentos de inercia de la sección de la sección con respecto a O y c) los momentos y el producto de inercia de la sección con respecto a los ejes x' y y' que forman un ángulo de 20° con los ejes x y y .

SOLUCIÓN

1) Hijo del círculo de Mohr. Primero se grafica el punto X de coordenadas $I_x = 7.20$, $I_{xy} = -2.54$ y el punto Y de coordenadas $I_y = 2.30$, $-I_{xy} = 2.54$. Uniendo los puntos X y Y con una línea, la sección del círculo de Mohr que X y Y ocupan es la línea que pasa por el centro del círculo. La línea que pasa por el centro del círculo y la línea que pasa por el punto X y Y se intersectan en el punto C , el centro del círculo.

$$I_{pmax} = OC = \frac{1}{2}(I_x + I_y) = \frac{1}{2}(7.20 \times 10^6 + 2.30 \times 10^6) = 4.895 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$C'D = \frac{1}{2}(I_x - I_y) = \frac{1}{2}(7.20 \times 10^6 - 2.30 \times 10^6) = 2.450 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$R = \sqrt{(C'D)^2 + (DX)^2} = \sqrt{(2.450 \times 10^6)^2 + (2.54 \times 10^6)^2}$$

$$= 3.430 \times 10^6$$

Los ejes principales de la sección con respecto a los puntos O y C se encuentran en el círculo de Mohr. Un ángulo θ_m se mide a partir de la línea OC para llevarlo a CA define el ángulo $2\theta_m$. Así se tiene que:

$$\tan 2\theta_m = \frac{DX}{C'D} = \frac{2.54}{2.450} = 1.012 \quad 2\theta_m = 47.8^\circ \quad \theta_m = 23.9^\circ$$

Por tanto, el eje principal x' de la sección con respecto a O se encuentra a 23.9° del eje x y el eje principal y' de la sección con respecto a O se encuentra a 67.2° del eje y . Los ejes principales de inercia están representados por las abscisas de los puntos A y B . Por tanto, se tiene que:

$$I_{xmax} = OA = OC + CA = I_{pmax} + R = (4.895 + 3.430) \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{xmax} = 8.325 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{ymax} = OB = OC - CB = I_{pmax} - R = (4.895 - 3.430) \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{ymax} = 1.465 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

c) Momentos y producto de inercia con respecto a los ejes x' y y'
El círculo de Mohr de la sección X y Y se encuentra en el círculo de Mohr de la sección X' y Y' a 20° del eje x y y .

En sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj. Las coordenadas de X' y Y' proporcionan los momentos y el producto de inercia de la sección con respecto a los ejes x' y y' que forman un ángulo de 20° con los ejes x y y .

$$I_{x'} = OX' = OC + CX' = 4.895 \times 10^6 \text{ mm}^4 + (3.430 \times 10^6 \text{ mm}^4) \cos 72.2^\circ$$

$$I_{x'} = 5.21 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{y'} = OY' = OC - CY' = 4.895 \times 10^6 \text{ mm}^4 - (3.430 \times 10^6 \text{ mm}^4) \cos 72.2^\circ$$

$$I_{y'} = 4.53 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{x'y'} = OX'Y' = (3.430 \times 10^6 \text{ mm}^4) \sin 72.2^\circ$$

$$I_{x'y'} = 3.22 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Problemas

9.91 Utilice el círculo de Mohr para determinar los momentos y productos de inercia del cuarto de elipse del problema 9.67 con respecto a un sistema de ejes x y y los cuales se obtienen al rotar los ejes x' y y' de O en un ángulo de $\alpha = 45^\circ$ en sentido contrario al de las manecillas del reloj y b) 30° en el mismo sentido que las manecillas del reloj.

9.92 Utilice el círculo de Mohr para determinar los momentos y productos de inercia del problema 9.72 con respecto a unos nuevos ejes centroidales, los cuales se obtienen al rotar los ejes x y y en un ángulo de 30° en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

9.93 Utilice el círculo de Mohr para determinar los momentos y productos de inercia del área del problema 9.73 con respecto a unos nuevos ejes centroidales, los cuales se obtienen al rotar los ejes x y y en un ángulo de 45° en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

9.94 Utilice el círculo de Mohr para determinar los momentos y productos de inercia del área del problema 9.75 con respecto a unos nuevos ejes centroidales, los cuales se obtienen al rotar los ejes x y y en un ángulo de 45° en el mismo sentido que las manecillas del reloj.

9.95 Utilice el círculo de Mohr para determinar los momentos y productos de inercia de la sección transversal del ángulo L127 X 76 X 12, problema 9.74 con respecto a unos nuevos ejes centroidales, los cuales se obtienen al rotar los ejes x y y en un ángulo de 30° en el mismo sentido que las manecillas del reloj.

9.96 Utilice el círculo de Mohr para determinar los momentos y productos de inercia de la sección transversal del ángulo L127 X 76 X 12, problema 9.78 con respecto a unos nuevos ejes centroidales, los cuales se obtienen al rotar los ejes x y y en un ángulo de 45° en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

9.97 Para el cuarto de elipse del problema 9.67, utilice el círculo de Mohr para determinar los momentos y productos de inercia con respecto al origen y los valores correspondientes de los momentos de inercia.

9.98 a 9.102 Utilice el círculo de Mohr para determinar la orientación de los ejes principales centroidales que pasan por el origen y los valores correspondientes de los momentos de inercia.

9.98 Área del problema 9.72

9.99 Área del problema 9.76

9.100 Área del problema 9.73

9.101 Área del problema 9.75

9.102 Área del problema 9.77

Los momentos de inercia I_x y I_y para el área del problema 9.102 se obtienen en el problema 9.64.

9.103 Los momentos y los productos de inercia de la sección transversal del ángulo L127 X 76 X 12 con los ejes centroidales x y y que pasan por el punto C son, respectivamente, $I_x = 1.04 \text{ m}^4$, $I_y = 0.754 \text{ m}^4$ y $I_{xy} = 0.29 \text{ m}^4$. Encuentre el momento de inercia I_u de la sección transversal respecto a un eje u que pase por C igual a $I_{\min} = 0.692 \text{ m}^4$. Utilice el círculo de Mohr para determinar a) el producto de inercia I_{uv} de la sección respecto a los ejes principales y c) el valor de I_{\max} .

9.104 y 9.105 Utilice el círculo de Mohr y determine, para la sección transversal de la figura, la distancia d a partir de la cual se debe aplicar una fuerza P perpendicularmente a la sección transversal de manera que produzca sólo la flexión (la sección transversal se especifica en la figura 9.13).

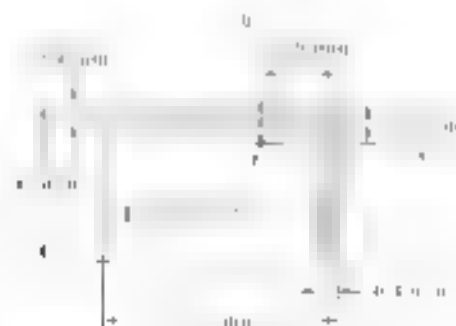


Figura P9.104

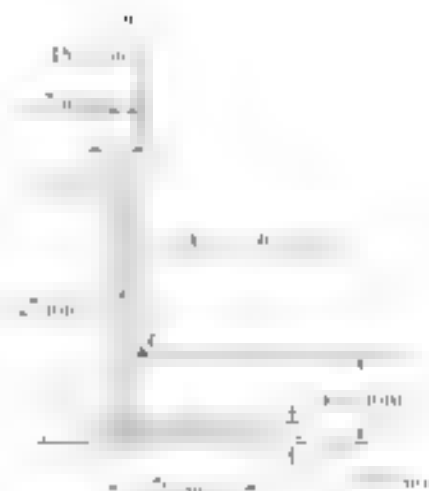


Figura P9.105

9.106 Las momentos de inercia con respecto a los ejes x e y en el eje z de las rectangulares x y y de una cierta área son, respectivamente, $I_x = 1\,200\text{ mm}^4$ e $I_y = 800\text{ mm}^4$. Si se sabe que después de rotar 30° a los ejes x y y , con el pivote en el centroide, el área se divide en partes de las rectangulares de modo que el valor del producto de inercia relativo a los ejes rotados es -450 mm^4 , determine el momento de Mohr para la transformación de los ejes x y y en x' y y' los momentos de inercia principales.

9.107 Se sabe que para un área dada $I_x = 48 \times 10^6\text{ mm}^4$ e $I_{xy} = -20 \times 10^6\text{ mm}^4$. Encuentre los ejes rectangulares principales x' y y' que pasan por el punto C y en sentido contrario al de las manecillas. Encuentre el momento de Mohr para la transformación de los ejes x y y en x' y y' los momentos de inercia principales.

9.108 Utilice el círculo de Mohr y demuestre que para cualquier área plana (por ejemplo, un pentágono), a) el momento de inercia con respecto a cualquier eje que pasa por el centroide siempre es el mismo, y b) el momento de inercia con respecto a cualquier eje que no pase por el centroide siempre es el mismo.

9.109 Utilice el círculo de Mohr y demuestre que la expresión $I = I_x^2 + I_y^2 + I_{xy}^2$, donde I_x , I_y e I_{xy} representan, respectivamente, los momentos y el producto de inercia de una cierta área plana con respecto a los ejes rectangulares x e y que pasan por el punto O , es independiente de la orientación de los ejes x e y . La expresión I es un invariante de la transformación de los ejes. Encuentre la longitud de una línea tangente al círculo de Mohr trazada desde el origen del sistema de los ejes coordenados.

9.110 Utilizando la propiedad de invariancia establecida en el problema anterior, exprese el producto de inercia I_{xy} de un área A con respecto a los dos ejes rectangulares que pasan por el punto O en términos de los momentos de inercia I_x e I_y de dicha área y de los momentos de inercia principales $I_{x'}$ e $I_{y'}$ de A con respecto a O . Se sabe que $I_{x'} = 100\text{ mm}^4$ e $I_{y'} = 25\text{ mm}^4$. Encuentre el momento de inercia I_{xy} de A con respecto a los ejes x e y que se muestra en la figura 9.13A.

9.11 MOMENTO DE INERCIA DE UNA MASA

Considere un pequeño cuerpo Δm que está libre para girar en la barra de masa insignificante horizontal que lo rodea libremente a una distancia r de AA' (figura 9.20). Si se aplica un par al sistema, el cuerpo Δm girará si las masas se suman que girarán en el mismo sentido de la barra alrededor de AA' . Los detalles de este movimiento serán estudiados posteriormente en cinética. Por ahora sólo se desea indicar que el momento de inercia de un sistema de masa Δm es el producto de la masa Δm por el cuadrado de la distancia r al eje AA' . Las propiedades más importantes de la barra de la sistema, esto es, una medida de la resistencia que ofrece el sistema cuando se trata de girar, es el momento de inercia I del sistema Δm con respecto al eje AA' .



Figura 9.20

Ahora considere un cuerpo de masa m , el cual se hará girar alrededor de un eje AA' (figura 9.21). Si se divide el cuerpo en elementos de masa $\Delta m_1, \Delta m_2$, etc., se encuentra que la resistencia que ofrece el cuerpo al movimiento rotacional se mide por la suma $\Delta m_1 r_1^2 + \Delta m_2 r_2^2 + \dots$. Por tanto, esta suma define el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje AA' . Mientras el momento de inercia de los masas se encuentra en la barra, el momento de inercia es que la barra

$$I = \int r^2 dm$$

8.258

El momento de inercia de un cuerpo con respecto al eje AA' está definido por la relación:

$$I = k \cdot m \quad \text{donde} \quad k = \frac{I}{m} \quad \text{eq. 9.29}$$

En este sentido, el radio de giro k representa la distancia a la cual se debe colocar el eje de rotación de un cuerpo con respecto al eje de rotación respecto a AA' debe permanecer inalterado (figura 9.20c). Sin importar la forma que se le dé a un cuerpo, su momento de inercia con respecto a un eje de rotación siempre será el mismo si el eje de rotación se encuentra a una distancia k del eje de rotación (figura 9.20d). Este cuerpo puede estar en la misma forma o con rotación o giro con respecto a AA'.

Si se utilizan las unidades del SI, el radio de giro k se expresará en metros y la masa en kilogramos. Si se utilizan las unidades del sistema inglés, el radio de giro k se expresará en pies y la masa en *slugs* (esto es en $\text{lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft}$). Por tanto, la unidad de inercia es $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ para el momento de inercia en unidades del SI y $\text{lb} \cdot \text{ft}^2$ en unidades inglesas.

El momento de inercia de un cuerpo con respecto a un eje que no pasa por el centro de masa puede ser determinado si se conoce el momento de inercia con respecto al eje que pasa por el centro de masa. Para cualquier cuerpo, el momento de inercia a una distancia a de su centro de masa es igual al momento de inercia con respecto al eje y más a^2 se expresa el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje y como:

$$I_y = I_{cm} + a^2 m = \int r^2 dm \quad \text{eq. 9.30}$$

Se pueden obtener expresiones similares para los momentos de inercia con respecto a los ejes x y z . Así se tiene que:

$$\begin{aligned} I_x &= I_{cm} + b^2 m \\ I_y &= I_{cm} + a^2 m \\ I_z &= I_{cm} + c^2 m \end{aligned} \quad \text{eq. 9.31}$$

Al igual que con el momento de inercia del punto de masas, el momento de inercia en las unidades del SI, se debe recordar que la unidad debe estar utilizada en la unidad derivada $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ en una unidad de fuerza (en el caso de la masa) y por tanto debe convertirse a newtons. Así se tiene que:

$$1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 = 4.43 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^2 = 1.356 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{s}^2$$

En resumen: $N = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$

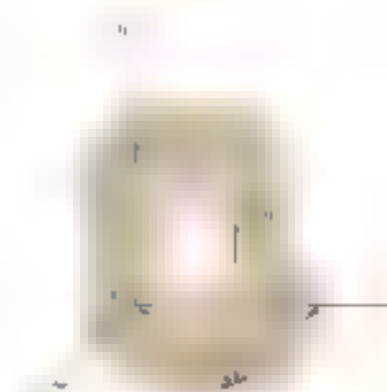


Figura 9.21



Fotografía 9.2 Como se expone en el capítulo de dinámica, el comportamiento rotacional de un cuerpo depende de la distribución de masa del cuerpo con respecto a su eje de rotación.

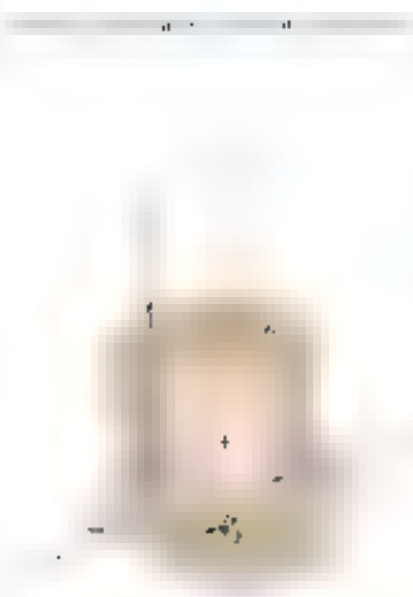


Figura 9.22

9.12. TEOREMA DE LOS EJES PARALELOS

Considera un cuerpo que se mueve en $S_0 = \mathbb{R}^3$ en un sistema de coordenadas $Oxyz$ que se mueve con respecto a un sistema $O'x'y'z'$ que se mueve con respecto a $Oxyz$. Sea $Ox'y'z'$ un sistema de ejes centrados paralelos, esto es, un sistema de ejes que se mueve con respecto a $Oxyz$ de manera que los ejes x', y', z' son paralelos a los ejes x, y, z , respectivamente. (Figura 9.22) Representa un elemento dm con respecto a $Oxyz$ y las coordenadas x', y', z' de este elemento con respecto a los ejes centrados $Ox'y'z'$.

$$x = x' + d, \quad y = y', \quad z = z' \quad (9.21)$$

Si d es la distancia entre los ejes Ox y $O'x'$, se puede expresar el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje x de la siguiente forma:

$$I_x = \int (y^2 + z^2) dm = \int [(y' + d)^2 + (z')^2] dm \\ = \int y'^2 dm + 2d \int y' dm + d^2 \int dm = I_{x'} + 2d \int y' dm + d^2 m$$

La primera integral en la expresión anterior representa el momento de inercia $I_{x'}$ del cuerpo con respecto al eje x' . La segunda y tercera representan el producto de d por el momento del cuerpo con respecto a los planos $x'y'$ y $x'z'$ como a dos planos conteniendo el punto G . Las tres integrales son iguales a cero: la última integral es igual a d^2 multiplicado por el cuerpo. Por tanto, se escribe,

$$I_x = I_{x'} + m(y'^2 + z'^2) \quad (9.23)$$

y en forma simétrica

$$I_y = I_{y'} + m(z'^2 + x'^2) \quad I_z = I_{z'} + m(x'^2 + y'^2) \quad (9.24)$$

Como ilustra en la figura 9.22 se puede verificar que la suma $z'^2 + x'^2$ representa el cuadrado de la distancia BB' entre los ejes y' y y . En consecuencia, $y' + d = y$ y $y' = y - d$ representan respectivamente los cuadrados de las distancias entre los ejes x y x' y los ejes y y y' . Por tanto, representando con d la distancia entre un eje arbitrario AA' y el eje central paralelo BB' (Figura 9.23) se puede escribir la siguiente relación general entre el momento de inercia I del cuerpo con respecto a AA' y el momento de inercia I' con respecto a BB' .

$$I = I' + md^2 \quad (9.25)$$

Expresando los momentos de inercia en términos de los radios de giro correspondientes, también se puede escribir

$$k = k' + d \quad (9.26)$$

donde k y k' representan respectivamente los radios de giro del cuerpo con respecto a AA' y BB' .

Figura 9.23

* Obsérvese que el teorema anterior se usa para definir el eje que pasa por el centro de

9.13. MOMENTOS DE INERCIA DE PLACAS DELGADAS

Consideremos a placa delgada de espesor h en el eje z al estar hecha de material homogéneo de densidad ρ constante. Nos vamos a ocupar de calcular el momento de inercia de masa de la placa con respecto a un eje AA' paralelo al plano de la placa (Figura 9.24a). Sea dA por

$$dA = \rho \int r^2 dA$$

Cuando $dA = \rho dA$, se escribe

$$I_{AA'} = \rho \int r^2 dA$$

Donde r representa la distancia perpendicular desde el elemento de área dA



Figura 9.24

hasta el eje AA' ; por tanto, la integral es igual al momento de inercia del área de la placa con respecto a AA' . Así se obtiene

$$I_{AA'} = \rho I_{AA'} \quad (9.35)$$

Por otra parte, sea BB' un eje perpendicular a AA' en el plano de la placa y que es perpendicular a AA' . Entonces $r^2 = d^2 + d'^2$ se tiene por

$$I_{BB'} = \rho I_{BB'} \quad (9.36)$$

Ahora considerando al eje CC' es perpendicular a la placa y que pasa a través de C en el interior de AA' y BB' (Figura 9.24c), se escribe

$$I_{CC'} = \rho I_{CC'} \quad (9.37)$$

Donde J es el momento polar de masa del área de la placa con respecto al punto C .

Recordando la relación $J = I_x + I_y$ que existe entre el momento polar de inercia y los momentos rectangulares de inercia de un área se obtiene relacionando los momentos de inercia de masa de una placa delgada

$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} \quad (9.38)$$

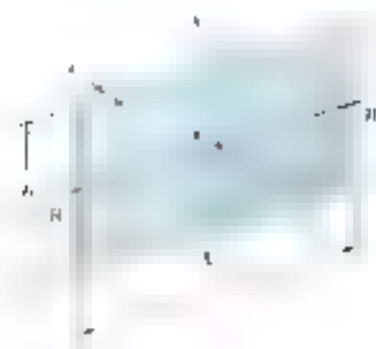


Figura 9.25



Figura 9.26

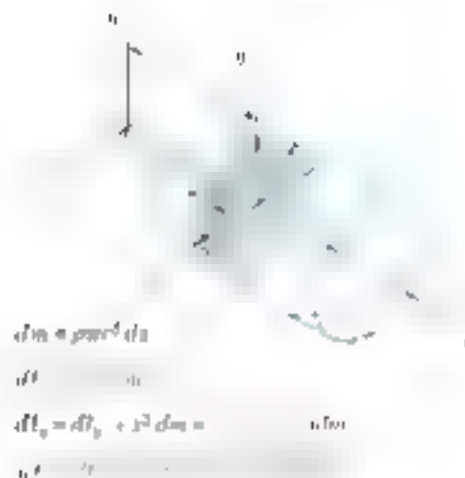


Figura 9.27 Determinación del momento de inercia de un cuerpo de revolución.

Placa rectangular En el caso de una placa rectangular de lados a y b (Figura 9.25) se obtienen los siguientes momentos de inercia de masa con respecto a los ejes AA' y BB' que pasan por el centro de la placa:

$$I_{AA'} \text{ masa} = \rho I_{AA'} \text{ área} = \rho I \frac{1}{12} a^3 b$$

$$I_{BB'} \text{ masa} = \rho I_{BB'} \text{ área} = \rho I \frac{1}{12} ab^3$$

Como varía por el producto ρb es igual a la densidad de la placa se escriben los momentos de inercia de masa de una placa rectangular delgada de la forma siguiente:

$$I_{AA'} \text{ masa} = I_{AA'} = \frac{1}{12} mb^3 \quad (9.39)$$

$$I_{BB'} = I_{BB'} + I_{AA'} = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2) \quad (9.40)$$

Placa circular En el caso de una placa circular de radio r (Figura 9.26) se escribe:

$$I_{AA'} \text{ masa} = \rho I_{AA'} \text{ área} = \rho I \frac{1}{2} \pi r^4$$

Como varía por el producto $\rho \pi r^2$ es igual a la densidad de la placa y como $I_{AA'} = I_{BB'}$ se escriben los momentos de inercia de masa de una placa circular de la siguiente forma:

$$I_{AA'} = I_{BB'} = \frac{1}{2} mr^2 \quad (9.41)$$

$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} = \frac{1}{2} mr^2 \quad (9.42)$$

9.14 DETERMINACIÓN DEL MOMENTO DE INERCIA DE UN CUERPO TRIDIMENSIONAL POR INTEGRACIÓN

El momento de inercia de un cuerpo tridimensional se obtiene variando la integral $I = \int r^2 dm$ de un cuerpo si éste es homogéneo o no homogéneo. En el caso de ρ constante la masa dm es igual a ρdV y se puede escribir $I = \int r^2 \rho dV$. Los momentos de inercia por tanto de la forma del cuerpo. Por tanto para determinar el momento de inercia de un cuerpo tridimensional será necesario llevar a cabo una triple integración, cuando necesitemos una doble integración.

Sin embargo, si el cuerpo posee dos planos de simetría, es posible determinar el momento de inercia del cuerpo sin necesidad de integrar, si entendemos por dA el elemento de masa de una placa delgada perpendicular a los planos de simetría. Por ejemplo, en el caso de cuerpos de revolución el elemento dA será un disco delgado (Figura 9.27). Con la fórmula (9.42) el momento de inercia de un disco con respecto al eje de revolución se puede expresar como se indica en la figura 9.27. Por otra parte, el momento de inercia del disco con respecto a cada uno de los ejes BB' y CC' se obtiene con la fórmula (9.41) y el momento de inercia con respecto al eje AA' se obtiene a partir de estas fórmulas, se obtienen los elementos de inercia del cuerpo.

9.15 MOMENTOS DE INERCIA DE CUERPOS COMPUESTOS

En la figura 9.28 se muestra un ejemplo de momento de inercia de un cuerpo compuesto. Para un cuerpo que consiste de varias de estas formas simples se puede obtener el momento de inercia de dicho cuerpo con respecto a un eje dado calculando primero los momentos de inercia de las partes que lo constituyen con respecto al eje deseado y sumando los respectivos. Como en el caso de las áreas, cada una de las partes compuestas se puede determinar sumando los radios de giro de las partes que lo componen.

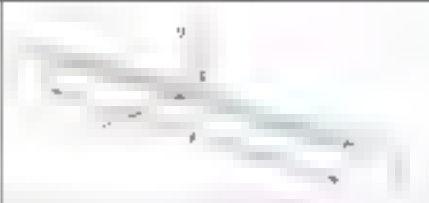


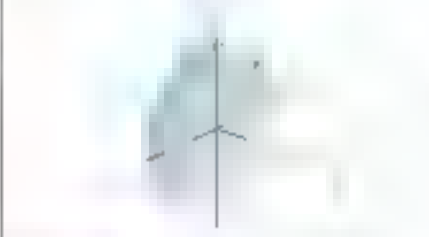


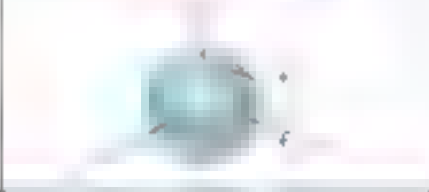
$\theta = \frac{1}{12} \frac{wL^3}{EI}$		$\theta_y = \theta_z = \frac{1}{12} \frac{wL^3}{EI}$
$\Delta = \frac{1}{8} \frac{wL^4}{EI}$		$\Delta = \frac{1}{8} \frac{wL^4}{EI}$ $\theta_y = \theta_z = \frac{1}{8} \frac{wL^4}{EI}$
$\Delta = \frac{1}{24} \frac{wL^4}{EI}$		$\Delta = \frac{1}{24} \frac{wL^4}{EI}$ $\theta_y = \theta_z = \frac{1}{24} \frac{wL^4}{EI}$
$\Delta = \frac{1}{24} \frac{wL^4}{EI}$		$\Delta = \frac{1}{24} \frac{wL^4}{EI}$ $\theta_y = \theta_z = \frac{1}{24} \frac{wL^4}{EI}$
$\Delta = \frac{1}{24} \frac{wL^4}{EI}$		$\Delta = \frac{1}{24} \frac{PL^3}{EI}$ $\theta_y = \theta_z = \frac{1}{24} \frac{PL^3}{EI}$
$\Delta = \frac{1}{24} \frac{wL^4}{EI}$		$\Delta = \frac{1}{24} \frac{PL^3}{EI}$ $\theta_y = \theta_z = \frac{1}{24} \frac{PL^3}{EI}$
$\Delta = \frac{1}{24} \frac{wL^4}{EI}$		$\Delta = \frac{1}{24} \frac{PL^3}{EI}$ $\theta_y = \theta_z = \frac{1}{24} \frac{PL^3}{EI}$

Figura 9.28



PROBLEMA RESUELTO 9.9

Determinar el momento de inercia respecto al eje y de la lamina de longitud L y masa m mostrada en la figura. Se supone que la lamina es homogénea y su densidad es ρ .

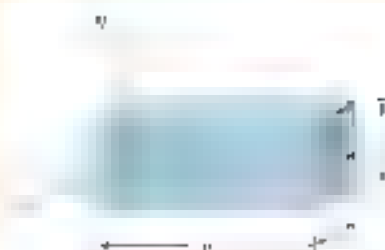
SOLUCIÓN

Se selecciona un elemento diferencial de masa dm que tiene una longitud dx y una masa $dm = \rho dx$.



$$dm = \rho dx$$

$$I_y = \int x^2 dm = \int_0^L x^2 \rho dx = \rho \int_0^L x^2 dx = \rho \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^L = \frac{\rho L^3}{3}$$



PROBLEMA RESUELTO 9.10

Para el prisma rectangular homogéneo mostrado en la figura, determinar el momento de inercia con respecto al eje z .



SOLUCIÓN

Se selecciona como elemento diferencial un elemento de la pinta longitudinal mostrada en la figura por todos.

$$dm = \rho b dx$$

Haciendo referencia a la sección 9.13, se encuentra que el momento de inercia del elemento con respecto al eje z' está dado por

$$dI_{z'} = \frac{1}{12} h^2 dm$$

Como se aplica el teorema de Steiner, la ecuación anterior se convierte en el momento de inercia del elemento dm con respecto al eje z

$$dI_z = dI_{z'} + x^2 dm = \frac{1}{12} h^2 dm + x^2 dm = \left(\frac{1}{12} h^2 + x^2 \right) \rho b dx$$

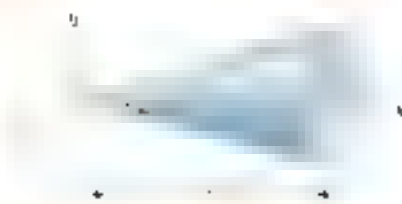
Integrando desde $x = 0$ hasta $x = a$ se obtiene

$$I_z = \int dI_z = \int_0^a \left(\frac{1}{12} h^2 + x^2 \right) \rho b dx = \rho ab \left(\frac{1}{12} h^2 a + \frac{1}{3} a^3 \right)$$

Como la masa total del prisma es $m = \rho ab a$ se puede escribir

$$I_z = m \left(\frac{1}{12} h^2 + \frac{1}{3} a^2 \right) \quad I = \frac{1}{12} m h^2 + \frac{1}{3} m a^2$$

Se observa que si se considera el caso de $h = 0$ se obtiene el momento de inercia de una lamina plana y la expresión para I_z se reduce a $\frac{1}{3} m a^2$ la cual es el resultado obtenido en el problema resuelto 9.9 cuando $L = a$.



PROBLEMA RESUELTO 9.11

Determinar el momento de inercia de un cilindro recto con respecto a un eje perpendicular a su eje de simetría y que pasa por el centro de masas. El cilindro tiene una densidad constante ρ y longitud h . Se pide calcular el momento de inercia con respecto al eje x que pasa por el centro de masa y es perpendicular al eje de simetría del cilindro.



SOLUCIÓN

Se selecciona el elemento diferencial de masa mostrado en la figura.

$$dm = \rho \pi r^2 dx = \pi \rho \frac{a^2}{h^2} x^2 dx$$

a) **Momento de inercia I_x** Con el uso de la expresión derivada en la sección 9.13 para un disco delgado perpendicular al eje x , la masa del elemento diferencial con respecto al eje x

$$dI_x = \frac{1}{2} r^2 dm = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{h} \right)^2 \left(\pi \rho \frac{a^2}{h^2} x^2 dx \right) = \frac{1}{2} \pi \rho \frac{a^4}{h^4} x^4 dx$$

Integrando desde $x = 0$ hasta $x = h$ se obtiene

$$I_x = \int dI_x = \int_0^h \frac{1}{2} \pi \rho \frac{a^4}{h^4} x^4 dx = \frac{1}{2} \pi \rho \frac{a^4}{h^4} \frac{h^5}{5} = \frac{1}{10} \pi \rho a^4 h$$

Como la masa total del cilindro es $m = \rho \pi a^2 h$, se puede escribir

$$I_x = \frac{1}{10} \pi \rho a^4 h = \frac{1}{10} a^2 (\rho \pi a^2 h) = \frac{1}{10} m a^2 \quad I = \frac{1}{10} m a^2$$

b) **Momento de inercia I_y** Se utiliza el mismo elemento diferencial. Al momento de integrar se debe considerar que el eje y no es perpendicular al eje x como en la sección 9.13 para un disco delgado, se escribe

$$dI_y = dI_y + x^2 dm = \frac{1}{2} r^2 dm + x^2 dm = \left(\frac{1}{2} r^2 + x^2 \right) dm$$

Se substituyen las expresiones para r y para dm en la ecuación anterior y se obtiene

$$dI_y = \left(\frac{1}{2} \left(\frac{x}{h} \right)^2 + x^2 \right) \pi \rho \frac{a^2}{h^2} x^2 dx = \left(\frac{1}{2} \frac{x^4}{h^2} + x^4 \right) \pi \rho \frac{a^2}{h^2} dx$$

$$I_y = \int dI_y = \int_0^h \left(\frac{1}{2} \pi \rho \frac{a^2}{h^2} \frac{x^4}{h^2} + \pi \rho \frac{a^2}{h^2} x^4 \right) dx = \pi \rho \frac{a^2}{h^2} \left(\frac{1}{2} \frac{h^5}{5} + \frac{h^5}{5} \right)$$

Con la introducción de la expresión para la masa total del cilindro m , se puede escribir I_y de la forma siguiente:

$$I_y = \frac{1}{5} m a^2 + \frac{1}{10} m a^2$$

c) **Momento de inercia I_z** Se aplica el teorema de los ejes paralelos y se escribe

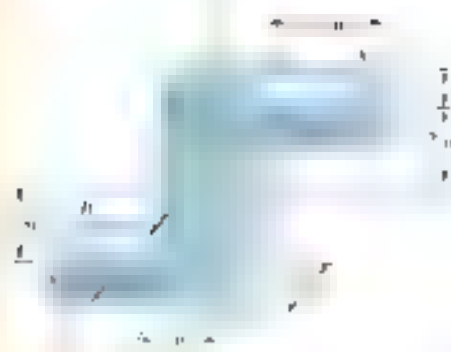
$$I_z = I_y + m \bar{x}^2$$

Resolviendo para I_y y recordando de la figura 9.21 que $\bar{x} = h/2$, se tiene que

$$I_y = I_z - m \bar{x}^2 = \frac{1}{5} m a^2 + h^2 = m \left(\frac{1}{5} a^2 + h^2 \right)$$

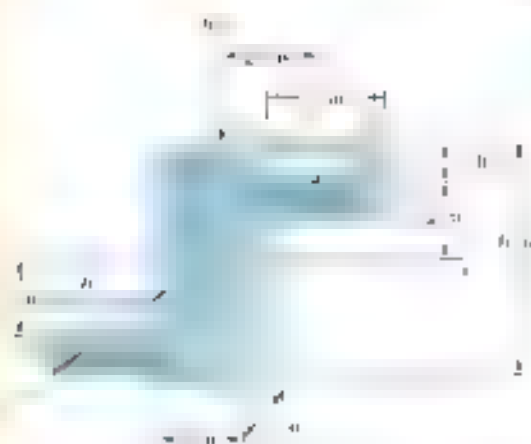
$$I_z = \frac{1}{5} m a^2 + \frac{1}{2} m h^2$$





PROBLEMA RESUELTO 9.12

La pieza de acero consta de un perfil rectangular de $6 \times 2 \times 2$ in. y dos cilindros de $1\frac{1}{2}$ in. de diámetro y 3 in. de longitud, como se muestra en la figura. Se sabe que el peso específico del acero es de 490 lb/ft³. Determinar los momentos de inercia de la pieza con respecto a los ejes coordenados.



SOLUCIÓN

Cálculo de las masas

Perfilado

$$V = (2 \text{ in.})(2 \text{ in.})(6 \text{ in.}) = 24 \text{ in.}^3$$

$$W = (24 \text{ in.}^3)(490 \text{ lb/ft}^3)\left(\frac{1 \text{ ft}}{12 \text{ in.}}\right)^3 = 6.91 \text{ lb}$$

$$m = \frac{6.91 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2} = 0.215 \text{ slug}$$

Cada uno de los cilindros

$$V = \pi(1 \text{ in.})^2(3 \text{ in.}) = 9.42 \text{ in.}^3$$

$$W = (9.42 \text{ in.}^3)(490 \text{ lb/ft}^3)\left(\frac{1 \text{ ft}}{12 \text{ in.}}\right)^3 = 0.261 \text{ lb}$$

$$m = \frac{0.261 \text{ lb}}{32.2 \text{ ft/s}^2} = 0.00811 \text{ slug}$$

Momentos de inercia. A partir de la figura 9.24 se calculan los momentos de inercia de cada una de las partes de la pieza con respecto a los ejes coordenados. En este caso los ejes de inercia no coinciden con los ejes de simetría de la pieza. Obsérvese que todas las longitudes deben estar expresadas en pies.

Perfilado

$$I_x = \frac{1}{12}m\bar{y}^2 = \frac{1}{12}(0.215 \text{ slug})(0.1 \text{ ft})^2 = 0.000179 \text{ slug} \cdot \text{ft}^2$$

$$I_y = \frac{1}{12}m\bar{x}^2 = \frac{1}{12}(0.215 \text{ slug})(0.1 \text{ ft})^2 = 0.000179 \text{ slug} \cdot \text{ft}^2$$

Cada uno de los cilindros

$$I_x = \frac{1}{2}m\bar{y}^2 + m\bar{y}^2 = \frac{1}{2}(0.00811 \text{ slug})\left(\frac{1}{12} \text{ ft}\right)^2 + (0.00811 \text{ slug})\left(\frac{1}{12} \text{ ft}\right)^2$$

$$= 2.59 \times 10^{-5} \text{ slug} \cdot \text{ft}^2$$

$$I_y = \frac{1}{12}m(3\bar{x}^2 + L^2) + m\bar{x}^2 = \frac{1}{12}(0.00811 \text{ slug})\left(3\left(\frac{1}{2} \text{ ft}\right)^2 + \left(\frac{1}{12} \text{ ft}\right)^2\right) + (0.00811 \text{ slug})\left(\frac{1}{2} \text{ ft}\right)^2$$

$$= 0.000207 \text{ slug} \cdot \text{ft}^2$$

$$I_z = m\bar{y}^2 + I_y = (0.00811 \text{ slug})\left(\frac{1}{12} \text{ ft}\right)^2 + 0.000207 \text{ slug} \cdot \text{ft}^2 = 0.000228 \text{ slug} \cdot \text{ft}^2$$

Conclusión. Con la suma de los valores obtenidos se concluye que

$$I_x = 4.54 \times 10^{-4} + 2(2.59 \times 10^{-5}) \quad I = 1.08 \times 10^{-3} \text{ slug} \cdot \text{ft}^2$$

$$I_y = 0.977 \times 10^{-3} + 2(4.17 \times 10^{-5}) \quad I = 1.16 \times 10^{-3} \text{ slug} \cdot \text{ft}^2$$

$$I_z = 4.85 \times 10^{-4} + 2(6.48 \times 10^{-5}) \quad I = 1.18 \times 10^{-3} \text{ slug} \cdot \text{ft}^2$$



PROBLEMA RESUELTO 9.13

Una placa delgada de acero de $\frac{1}{8}$ in de espesor se corta y se dobla para formar la figura de la figura. Se sabe que la densidad del acero es $\rho = 7.85 \text{ kg/m}^3$. Determinar los momentos de inercia I_x , I_y y I_z respecto a los ejes coordenados.

SOLUCIÓN

Se observa que la pieza consta de una placa semicircular y de una placa rectangular. La cual se le hace como se muestra en la figura.

Cálculo de las masas. Placa semicircular

$$V_1 = \frac{1}{2} \pi (0.10 \text{ m})^2 (0.004 \text{ m}) = 6.28 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$m_1 = \rho V_1 = (7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(6.28 \times 10^{-6} \text{ m}^3) = 0.1176 \text{ kg}$$

Placa rectangular

$$V_2 = (0.200 \text{ m})(0.160 \text{ m})(0.004 \text{ m}) = 1.28 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$m_2 = \rho V_2 = (7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(1.28 \times 10^{-6} \text{ m}^3) = 0.0101 \text{ kg}$$

Placa circular

$$V_3 = \pi r^2 t = \pi (0.050 \text{ m})^2 (0.004 \text{ m}) = 3.142 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$m_3 = \rho V_3 = (7.85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(3.142 \times 10^{-6} \text{ m}^3) = 0.02466 \text{ kg}$$

Momentos de inercia. Con el uso del método presentado en la sección 9.13 se calculan los momentos de inercia de cada uno de los componentes.

Placa semicircular. A partir de la figura 9.2b, se observa que para una placa circular de masa m y radio r se tiene que:

$$I_x = I_y = \frac{1}{8} \pi r^4$$

Debiliter a la muestra, se observa que para una placa semicircular

$$I_x = I_y = \frac{1}{16} \pi r^4$$

Como la masa de la placa semicircular es $m_1 = \frac{1}{2} m$, se tiene que:

$$I_x = I_y = \frac{1}{16} \pi r^4 = \frac{1}{16} (0.3156 \text{ kg})(0.10 \text{ m})^4 = 1.010 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_y = I_z = \frac{1}{4} \pi r^4 = \frac{1}{4} m_1 r^2 = \frac{1}{4} (0.3156 \text{ kg})(0.10 \text{ m})^2 = 0.305 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Placa rectangular

$$I_x = \frac{1}{12} m_2 r^2 = \frac{1}{12} (0.0101 \text{ kg})(0.16 \text{ m})^2 = 2.144 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_z = \frac{1}{12} m_2 r^2 = \frac{1}{12} (0.0101 \text{ kg})(0.2 \text{ m})^2 = 13.400 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_y = I_x + I_z = (2.144 + 13.400) \times 10^{-5} = 15.544 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Placa circular

$$I_x = \frac{1}{4} m_3 r^2 = \frac{1}{4} (0.02466 \text{ kg})(0.05 \text{ m})^2 = 0.154 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_y = \frac{1}{2} m_3 r^2 + m_3 x^2$$

$$= \frac{1}{2} (0.02466 \text{ kg})(0.05 \text{ m})^2 + (0.02466 \text{ kg})(0.1 \text{ m})^2 = 2.774 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_z = \frac{1}{4} m_3 r^2 + m_3 x^2 = \frac{1}{4} (0.02466 \text{ kg})(0.05 \text{ m})^2 + (0.02466 \text{ kg})(0.1 \text{ m})^2$$

$$= 2.620 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Placa completa

$$I_x = (1.010 + 2.144 + 0.154) \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad I = (1.010 + 10) \text{ kg}$$

$$I_y = (0.305 + 15.544 + 2.774) \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad I_y = 1.774 \times 10^{-4} \text{ kg}$$

$$I_z = (0.305 + 13.400 + 2.620) \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad I_z = 11.31 \times 10^{-4} \text{ kg}$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta sección se estudió el momento de inercia de masa y el radio de giro de un cuerpo de masa M respecto a un eje dado. En los casos 9.38 y 9.39, la ecuación se deriva a partir de la definición para ser utilizada con momentos de inercia de masa y se expone el cálculo de los momentos de inercia de masa de placas delgadas y de cuerpos tridimensionales.

El caso 9.40 de momento de inercia de masa de una placa delgada es el caso de momento de masa I de un cuerpo sin respecto a un eje dado, donde el valor lateral está determinado por la definición dada en la figura 9.38. En el caso 9.41, se establece la máxima masa M en un caso especial de la placa delgada circular, calculando el momento de inercia de masa para una placa circular respecto a un eje dado. En el caso 9.42, se muestra que los ejes paralelos a un eje dado se expresan en forma

de $I = I_0 + Md^2$, donde I_0 es el momento de inercia de masa de la placa respecto al eje dado y d es la distancia entre los ejes. En la sección 9.43 se deriva el momento de inercia de masa de una placa delgada de masa

$$I = I_0 + Md^2 \quad (9.33)$$

que establece que el momento de inercia I de un cuerpo de masa M respecto a un eje dado es igual a la suma de momento de inercia I_0 de dicho cuerpo con respecto al eje dado y Md^2 , donde d es la distancia entre los ejes. En el caso 9.44 se calcula el momento de inercia de una placa delgada por sus ejes principales, donde los ejes principales I_1 se pueden determinar por la suma de los cuadrados de las distancias medidos a lo largo de los ejes dados que satisfacen las ecuaciones (9.32) y (9.33).

En el caso 9.45 se muestra que el momento de inercia de una placa delgada es constante en cualquier eje dado. En tanto que las fórmulas deben expresarse en metros o pies según convenga y para problemas en los que se utiliza el sistema de unidades de uso común en Estados Unidos, las masas deben expresarse en kg o lb . Asimismo se resuelve la ecuación (9.33) para d en las unidades de longitud de la realización de los ejes dados. En los casos 9.42 y 9.43.

En el caso 9.46 se muestra que el momento de inercia de masa de una placa delgada con respecto a un eje dado puede obtenerse calculando el momento de inercia de un eje perpendicular a la placa por la ecuación $I = I_0 + Md^2$, donde I_0 es el momento de inercia de la placa $I_0 = \frac{1}{12}Md^2$. Observe que $I_0 = \frac{1}{12}Md^2$ en la figura 9.2 es perpendicular a la placa $I_0 = \frac{1}{12}Md^2$ es el momento de inercia de la placa $I_0 = \frac{1}{12}Md^2$.

En el caso 9.47 se muestra que el momento de inercia de una placa delgada con respecto a un eje dado puede obtenerse calculando el momento de inercia de un eje perpendicular a la placa $I_0 = \frac{1}{12}Md^2$ en la figura 9.2 es perpendicular a la placa $I_0 = \frac{1}{12}Md^2$ es el momento de inercia de la placa $I_0 = \frac{1}{12}Md^2$.

calcular el momento de inercia de una placa delgada con respecto a un eje perpendicular a la misma puede ser resuelto de dos maneras: se puede usar el momento de inercia con respecto a ejes que perpendiculares que están en el plano de la placa y ubicar a un eje en $x = 0$ y $y = 0$. Por lo tanto se debe recordar que la masa de una placa homogénea A , espesor t y densidad ρ es $m = \rho t A$.

En la sección 9.12 se muestra que el momento de inercia de un cuerpo con respecto a un eje perpendicular a la sección xy en la sección 9.13 se expresa como $I_x = I_{x_0} + m d_y^2$ y $I_y = I_{y_0} + m d_x^2$ donde d_x y d_y se dan en centímetros. Se puede usar una integral para encontrar el momento de inercia de un cuerpo que puede ser considerado en términos de líneas delgadas planas. Para estos casos es necesario expresar las masas de un cuerpo en términos de una diferencial y algunas dimensiones del mismo. También los problemas resueltos 1 y 2 que han sido resueltos en páginas delgadas perpendiculares a x y y se dan para que expresen las dimensiones de una placa como funciones de las variables x y y .

a) En el caso especial de un cuerpo de revolución, la placa elemental es un caso delgado y se debe utilizar las ecuaciones perpendiculares a la figura 9.2 para determinar los momentos de inercia de un cuerpo planar en x y y en la 9.14.

b) En el caso general, cuando el cuerpo no es un cuerpo de revolución, el elemento de masa dm es una placa delgada de forma diferente y no necesariamente las ecuaciones de la figura 9.2. Por ejemplo, como en el ejemplo 9.1 en la 9.15, el elemento fue una placa rectangular delgada. Para las dimensiones del ejemplo se puede usar $dm = \rho t dx dy$ las variables x y y en centímetros. Las ecuaciones de la figura 9.2 en la 9.12 de la sección 9.12

$$\begin{aligned} dI_x &= dI_{x_0} + (y_0^2 + z_0^2) dm \\ dI_y &= dI_{y_0} + (x_0^2 + z_0^2) dm \\ dI_z &= dI_z + (x_0^2 + y_0^2) dm \end{aligned}$$

donde las primicias se refieren a la distancia de los ejes rotacionales en el plano de la placa y donde $x_0 = y_0 + z_0$ representan las coordenadas del centro de la placa elemental. Las primicias en el plano de la placa se refieren al centro de la placa elemental. Encontrando una integral para una placa delgada, como en el ejemplo 9.1 de la página 48, se encuentra la masa m de una placa delgada en términos de la placa y se puede encontrar x_0 y y_0 en términos de x y y por lo que se puede encontrar dI_x y dI_y y se puede encontrar dI_z y dI_z en lugar de dI_z en la ecuación. Por último, al usar la geometría del cuerpo se expresa el resultado obtenido en términos de la variable x y se integra en x .

En la sección 9.12 se muestra que el momento de inercia de un cuerpo con respecto a un eje perpendicular a la sección xy en la sección 9.13 se expresa como $I_x = I_{x_0} + m d_y^2$ y $I_y = I_{y_0} + m d_x^2$ donde d_x y d_y se dan en centímetros. Se puede usar una integral para encontrar el momento de inercia de un cuerpo que puede ser considerado en términos de líneas delgadas planas. Para estos casos es necesario expresar las masas de un cuerpo en términos de una diferencial y algunas dimensiones del mismo. También los problemas resueltos 1 y 2 que han sido resueltos en páginas delgadas perpendiculares a x y y se dan para que expresen las dimensiones de una placa como funciones de las variables x y y .

A pesar de que los problemas propuestos en esta sección sobre momentos de inercia son relativamente fáciles, es necesario trabajar con cuidado y a veces con los límites. Algunas veces se requiere de un cálculo que se requiere de una proporción de la figura 9.25 se requiere de definir las fórmulas requeridas con el uso de las técnicas de esta lección.



Figura P8.111

8.111 En la figura se muestra un anillo de masa M que fue cortado de una placa circular homogénea. Determine el momento de inercia de la placa con respecto a a) el eje AA' y b) el eje centroidal CC' que es perpendicular al plano que contiene al anillo.

8.112 En la figura se muestra una placa triangular y semi-circular con un agujero. La placa es homogénea y tiene una densidad de masa constante. Determine el momento de inercia de la placa con respecto a a) el eje centroidal BB' y b) el eje centroidal CC' que es perpendicular a la placa.



Figura P8.112



Figura P8.113

8.113 El cuarto de anillo de masa M que se muestra en la figura se cortó de una placa triangular homogénea. Se sabe que el momento de inercia de masa del cuerpo con respecto a a) el eje AA' y b) el eje centroidal CC' que es perpendicular al plano que contiene al cuarto de anillo.

8.114 En la figura se muestra una enjuta parabólica que se cortó de una placa triangular homogénea. Se sabe que el momento de inercia de masa del cuerpo con respecto a a) el eje BB' y b) el eje DD' que es perpendicular al plano que contiene a la enjuta. (Sugerencia: Vea el problema resuelto 9.3.)



Figura P8.114

9.115 En la figura se muestra una placa delgada de masa m que se rota en la posición mostrada. Determine el momento de inercia de la placa con respecto a los ejes x y y que pasan por el punto O en la figura.



Figura P9.115 y P9.116

9.116 En la figura se muestra una placa delgada de masa m que se rota en la posición mostrada. Determine el momento de inercia de la placa con respecto a los ejes x y y que pasan por el punto O en la figura.



Figura P9.117 y P9.118

9.117 Para la placa delgada de forma trapezoidal y masa m mostrada en la figura, determine su momento de inercia de masa con respecto a) al eje x y b) al eje y .

9.118 Para la placa delgada de forma trapezoidal y masa m mostrada en la figura, determine su momento de inercia de masa con respecto a) el eje central CC' que es perpendicular a la placa y b) el eje AA' que es perpendicular a la placa y pasa por la esquina inferior izquierda de la placa.

9.119 Al rotar el área mostrada en la figura con respecto al eje x se obtiene un sólido homogéneo de revolución con masa m . Utilice integración directa para expresar en términos de m y h el momento de inercia de masa con respecto al eje x del sólido obtenido.



Figura P9.119

9.120 Determine por integración directa el momento de inercia de masa con respecto al eje x del cilindro homogéneo mostrado en la figura. Suponga que el cilindro tiene densidad uniforme y una masa m .



Figura P9.120

9.121 El área mostrada en la figura se rota con respecto al eje x para formar un sólido homogéneo de revolución con masa m . Determine por integración directa el momento de inercia de masa del sólido con respecto a) al eje x y b) al eje y . Expresar las respuestas en términos de m y las dimensiones del sólido.

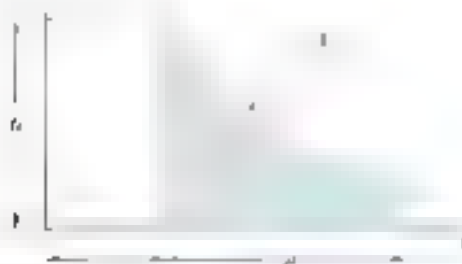


Figura P9.121

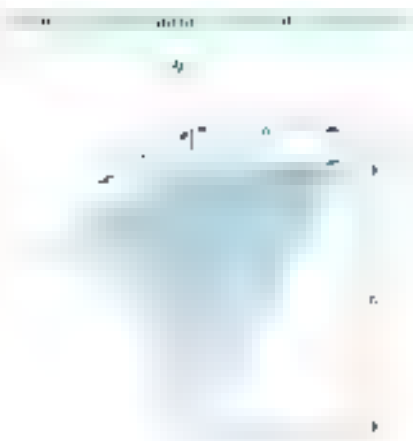


Figura P8.122 y P8.123



Figura P8.124

8.122 Suponga que el tetraedro que se muestra en la figura tiene una densidad uniforme y una masa M . Determine por integración directa su momento de inercia de masa con respecto al eje y .

8.123 Suponga que el tetraedro que se muestra en la figura tiene una densidad uniforme y una masa M . Determine por integración directa su momento de inercia de masa con respecto al eje y .

8.124 Suponga que el semielipse mostrado en la figura tiene una densidad uniforme y una masa M . Determine por integración directa su momento de inercia de masa con respecto al eje z .

8.125 Un alambre delgado de acero se dobla en la forma mostrada en la figura. Si se supone que la densidad del alambre es constante, determine por integración directa su momento de inercia de masa con respecto a cada uno de los ejes cartesianos.

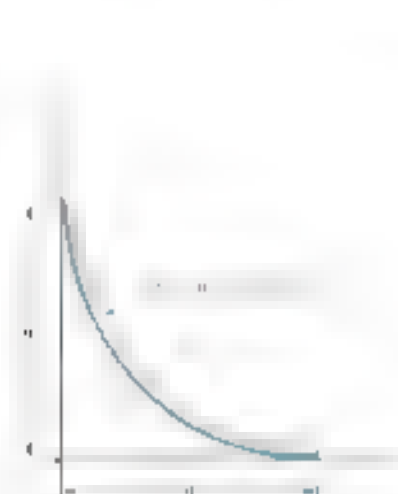


Figura P8.125

8.126 En la figura se muestra una placa rectangular de forma a por b y masa M , la cual está soldada a un bloque a lo largo de su base AB . Si se supone que la placa tiene una densidad uniforme δ , determine por integración directa el momento de inercia de masa de la placa con respecto a $a)$ el eje x , $b)$ el eje y y $c)$ el eje z .



Figura P8.126

9.127 En la figura se muestra la sección transversal de un rodillo móvil. Determine su momento de inercia y su radio de giro de masa con respecto al eje AA' . Considere que la densidad del latón es 8484 kg/m^3 y la del poliestireno de fibra reforzada es 1250 kg/m^3 .



Figura P9.127

9.128 En la figura se muestra la sección transversal de un rodillo móvil. Determine su momento de inercia y su radio de giro de masa con respecto al eje AA' . Considere que la densidad del aluminio es 0.100 lb/in.^3 y la del neopreno es 0.0452 lb/in.^3 .

9.129 Si el cascarón cilíndrico delgado que se muestra en la figura tiene una masa m , un radio r y una altura h , determine su momento de inercia de masa con respecto al eje x . (Sugerencia: Considere que el cascarón se forma al rotar un círculo de radio r a una altura h a una velocidad angular ω constante. Para aproximaciones sucesivas de ω determine los momentos que contienen r^2 y r^4 y mantenga los términos que contienen r^4 .)

9.130 La parte de máquina mostrada en la figura se formó al machucar un metal que rotó con una velocidad angular constante. Para $h = 60 \text{ mm}$, determine el momento de inercia de masa y el radio de giro de la parte mostrada con respecto al eje y .

9.131 La pieza de metal delgada se muestra en la figura de masa m . Después de ser machucada en la forma mostrada en la figura, se tornó un cilindro de 1.5 kg . Se sabe que los momentos de inercia de la máquina con respecto a los ejes AA' y BB' son, respectivamente, $0.331 \text{ g} \cdot \text{m}^2$ y $0.060 \text{ g} \cdot \text{m}^2$. Determine la longitud h y el radio de giro de la pieza con respecto al eje CC' .



Figura P9.131



Figura P9.128



Figura P9.129



Figura P9.130

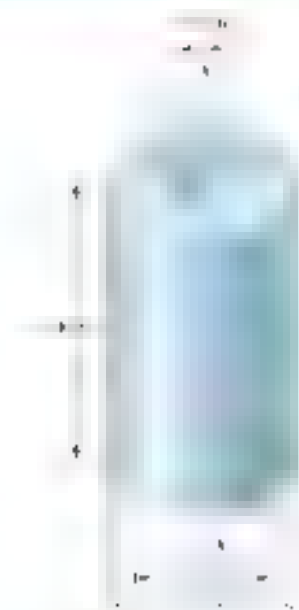


Figura P9.132



Figura P9.134

9.132 Determine el momento de inercia de masa del componente de máquina de 0.9 lb que se muestra en la figura con respecto al eje AA' .

9.133 El componente de máquina que se muestra en la figura está formado por un eje de 0.05 m de diámetro y dos brazos de 0.05 m de longitud. Determine a) el valor de a para que el momento de inercia de masa con respecto al eje AA' —el cual bisecta la pared superior del agujero— sea máximo, b) los valores correspondientes del momento de inercia de masa y del radio de giro con respecto al eje AA' . El peso específico del aluminio es 27.1 kN/m³.



Figura P9.133

9.134 El componente de máquina que se muestra en la figura y los brazos de 10 mm de espesor están hechos de aluminio. La densidad ρ es la misma que la del aluminio. La inercia de masa de un cilindro sólido de radio r y longitud L con respecto al eje AA' que pasa por el centro de masa de la longitud L es $\frac{1}{2} \pi \rho r^2 L^3$. Determine el momento de inercia de masa con respecto al eje AA' de la pieza completa.

9.135 y 9.136 Una lámina de acero de 2 mm de espesor se cortó y dobló para dar forma al componente de máquina que se muestra en las figuras. Si se sabe que la densidad del acero es de 7 850 kg/m³, determine el momento de inercia de masa del componente con respecto a cada uno de los ejes coordenados.



Figura P9.135

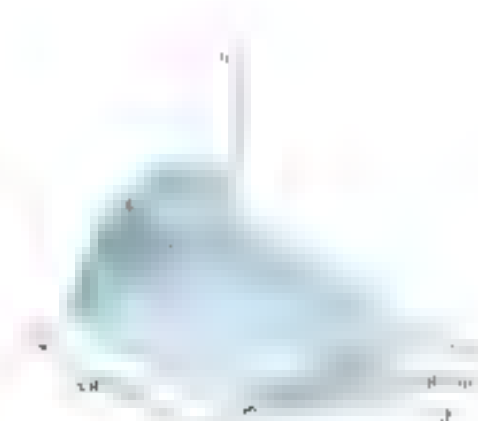


Figura P9.136

E.137 La energía para un dispositivo electrónico se transporta a partir de una bob. de 100 mH en 1 kV a una velocidad de 10 cm/s . ¿Cuál es la fuerza de inercia de masa de la bobina con respecto a cada uno de los ejes coordenados, si el peso específico del aluminio es de $0,110\text{ N/cm}^3$?

9.138 El ancla para estructuras que se muestra en la figura está hecha de un acero galvanizado. Determine el momento de inercia respecto de masa del ancla con respecto a cada uno de los ejes coordenados. El peso específico del acero galvanizado es de 470 lb/ft^3 .



Figure PG.150

2.739 Un sistema simple de un avión a reacción se ilustra a partir de tres vistas de modo que el lector pueda ver la disposición de las piezas. Las piezas utilizadas para ensamblar las tres piezas, determine el momento de inercia de la estructura completa con respecto al eje de simetría de la estructura. La densidad de la madera es de 780 kg/m^3 .

9.140 Un granjero encuentra un alfilerado al soldar una pica en su arado. El arado mide 1.50 m de largo y el alfilerado mide 1.00 m de ancho. Si se sabe que la densidad del acero es de 7.850 kg/m^3 y que el espesor de las partes del arado es de 5.00 mm , determine la masa y el momento de masa del alfilerado con respecto a cada uno de los ejes coordenados. Desprecie la masa de la soldadura.

9.141 El elemento de máquina mostrado en la figura está fabricado de acero. Determine el momento de inercia de masa del eje (de eje respecto a *a*) el eje *x*, *b*, el eje *y* y el eje *z*. (La densidad del acero es de 7.850 kg/m^3 .)



Figure P9.141

Figure P4 137

Figure 2.50

Figure P8.140

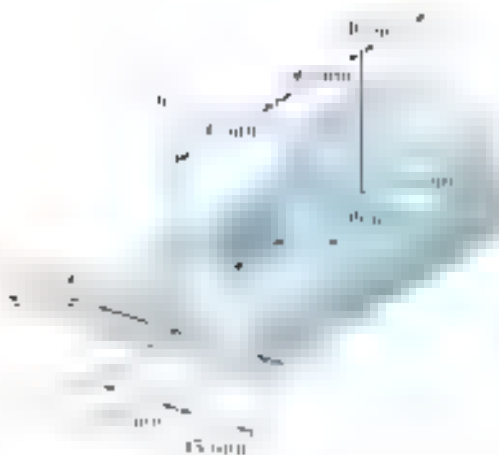


Figura P9.144



Figura P9.145

9.142 Determine el momento de inercia de masa del elemento de máquina de acero que se muestra en la figura con respecto al eje y . (El peso específico del acero es de 490 lb/ft^3 .)

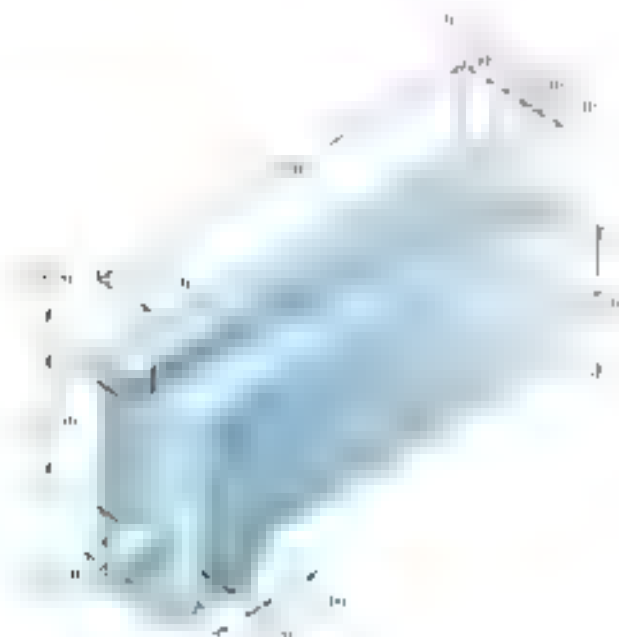


Figura P9.142 y P9.143

9.143 Determine el momento de inercia de masa del elemento de máquina de acero que se muestra en la figura con respecto al eje z . (El peso específico del acero es de 490 lb/ft^3 .)

9.144 Para el elemento de máquina hecho de acero que se muestra en la figura, determine el momento de inercia de masa y el radio de giro con respecto al eje x . (La densidad del acero es de 7.850 kg/m^3 .)

9.145 Para el dispositivo de acero que se muestra en la figura, determine el momento de inercia de masa con respecto a) al eje x , b) al eje y y c) al eje z . (La densidad del acero es de 7.850 kg/m^3 .)

9.146 Un alambre de aluminio con un peso por unidad de longitud de 0.25 lb/ft se dobla en la forma que se muestra en la figura. Determine el momento de inercia de masa del ensamble con respecto a cada uno de los ejes coordenados.

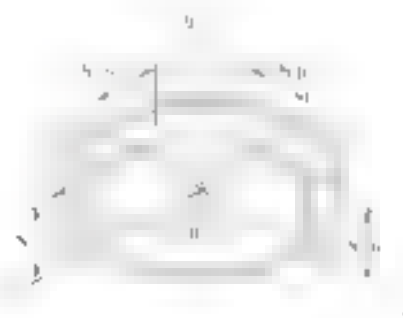


Figura P9.146

9.147 El arreglo que se muestra en la figura se forma al unir la barra AB con el eje CD . Se sabe que la densidad del acero es de 490 lb/ft^3 . Determine el momento de inercia de masa del alambre con respecto a cada uno de los ejes coordenados.



Figura P9.147

9.148 El alambre que se muestra en la figura se forma al unir las barras rectas que tienen densidades uniformes de 490 lb/ft^3 y 8050 kg/m^3 . Determine el momento de inercia de masa del alambre con respecto a cada uno de los ejes coordenados.



Figura P9.148

9.16. MOMENTO DE INERCIA DE UN CUERPO CON RESPECTO A UN EJE ARBITRARIO QUE PASA POR EL PUNTO O: PRODUCTOS DE INERCIA DE MASA

En esta sección se verá que puede calcularse el momento de inercia de un cuerpo con respecto a un eje arbitrario Ox que pasa por el origen O si se conocen las densidades y las coordenadas de masa de dicho cuerpo respecto a los tres ejes coordenados como otras cantidades. Los cálculos de los momentos de inercia se simplificarán.

El elemento de masa dm de un cuerpo V con respecto al punto O es igual a $\rho \, dV$, donde ρ representa la densidad por unidad de volumen en el elemento de masa dm en el punto P . Se representa por \mathbf{A} al vector unitario normal a la superficie dV y con \mathbf{r} al vector de posición desde el origen O al elemento dm . Se puede demostrar que $\mathbf{A} \times \mathbf{r}$ es igual a $r \sin \theta$, que es la magnitud del producto vectorial $\mathbf{A} \times \mathbf{r}$. Por tanto, se escribe:

$$I_{Ox} = \int \rho^2 \, dV = \int |\mathbf{A} \times \mathbf{r}|^2 \, dm \quad (9.43)$$

Expresando $|\mathbf{A} \times \mathbf{r}|^2$ en términos de las componentes rectangulares del producto vectorial, se tiene que:

$$I_{Ox} = \int (\lambda_2 y - \lambda_y x)^2 + (\lambda_3 z - \lambda_z y)^2 + (\lambda_1 x - \lambda_x z)^2 \, dm$$

donde las componentes λ_1 , λ_2 y λ_3 del vector unitario \mathbf{A} representan los cosenos directos de \mathbf{A} con el eje Ox y las componentes λ_x , λ_y y λ_z representan las coordenadas de \mathbf{A} en el punto P . Al expandir los términos cuadráticos al cuadrado y reordenar los términos, se escribe:

$$I_{Ox} = \lambda_1^2 \int y^2 \, dm + \lambda_2^2 \int x^2 \, dm + \lambda_3^2 \int z^2 \, dm - 2\lambda_1 \lambda_y \int xy \, dm - 2\lambda_1 \lambda_z \int yz \, dm - 2\lambda_2 \lambda_z \int xz \, dm \quad (9.44)$$



Figura 9.20

En las ecuaciones (9.30) se observa que los primeros integrales en (9.44) representan respectivamente los momentos de inercia $I_x = I_{xx}$, $I_y = I_{yy}$ y $I_z = I_{zz}$ de un cuerpo respecto a los ejes cartesianos Ox , Oy y Oz respectivamente. Los últimos tres integrales en (9.44) representan los productos de inercia de un cuerpo con respecto a los ejes Ox y Oy , Oy y Oz y Ox y Oz respectivamente. Así se escribe

$$I_{xx} = \int_V x^2 \rho \, dV, \quad I_{yy} = \int_V y^2 \rho \, dV, \quad I_{zz} = \int_V z^2 \rho \, dV \quad (9.45)$$

Si se escribe la ecuación (9.44) en términos de los integrales en las ecuaciones (9.30) y (9.45), se tiene que

$$I_{xx} = I_{xx} + I_{xx}, \quad I_{yy} = I_{yy} + I_{yy}, \quad I_{zz} = I_{zz} + I_{zz} \quad (9.46)$$

Es interesante observar que la suma de los productos de inercia de un cuerpo respecto a los ejes cartesianos Ox , Oy y Oz es una constante de la forma $I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}$ (9.46). Los productos de inercia de un cuerpo respecto a los ejes cartesianos Ox , Oy y Oz son simétricos, es decir, los productos de inercia de un cuerpo respecto a los ejes paralelos que producen el mismo valor absoluto pero con signo opuesto son iguales. En la ecuación (9.45) las expresiones para x , y y z dadas en las ecuaciones (9.45), se encuentra que

$$\begin{aligned} x &= x_{cg} + x' \\ y &= y_{cg} + y' \\ z &= z_{cg} + z' \end{aligned} \quad (9.47)$$

donde x_{cg} , y_{cg} y z_{cg} son las coordenadas del centro de gravedad G del cuerpo. I_{xx} , I_{yy} y I_{zz} representan los productos de inercia del cuerpo con respecto a los ejes centroidales x' , y' y z' (figura 9.22).

9.17 ELIPSO DE DE INERCIA. EJES PRINCIPALES DE INERCIA

Se imagina un cuerpo sólido homogéneo de masa M que se sitúa en un plano cartesiano con respecto a los ejes Ox y Oy que se grafica un punto Q en tal forma que OQ a una distancia $OQ = 1/\sqrt{I_{xx}}$ desde O . El lugar geométrico de los puntos Q obtenidos de esta manera forman una superficie (figura 9.23). La ecuación de esta superficie se puede obtener substituyendo $1/(OQ)^2$ en lugar de I_{xx} en la ecuación (9.45) y resolviendo para x y y obteniendo así la ecuación por $(OQ)^2$. Observando que

$$(OQ)^2 = x^2 + y^2 = (OQ)^2 A_{xx} + y^2 = (OQ)^2$$

donde x y y representan las coordenadas rectangulares de Q se escribe

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{xy} xy - 2I_{yz} yz - 2I_{zx} zx = 1 \quad (9.48)$$

La ecuación (9.48) es la ecuación de un elipsoide (figura 9.24). El momento de inercia I_{xx} es constante de un cuerpo cualquiera O respecto al eje Ox que está a una constante medida a partir de O . Por lo tanto, se puede definir el elipsoide de inercia de un cuerpo como el lugar geométrico de los puntos Q que satisfacen la ecuación (9.48).

Figura 9.30

de inercia del cuerpo con respecto a cualquier eje que pasa a través de O y se conoce como el **elipsoide de inercia** del cuerpo en O .

Se observa que si se rotan los ejes en la figura 9.31, cambian los valores de la ecuación (9.45) pero el elipsoide permanece puesto que los ejes coordenados son iguales a los ejes principales y los productos de inercia del cuerpo con respecto a los ejes coordenados son iguales. Se construye el elipsoide en cualquier punto de un cuerpo y se llama **elipsoide de inercia** en ese punto. Se observa que si se hacen pasar como ejes coordenados a los ejes principales x', y', z' del elipsoide de inercia (figura 9.31) se sabe que la ecuación del elipsoide de inercia respecto a dichos ejes coordenados tiene la siguiente forma:

$$I_{x'}x'^2 + I_{y'}y'^2 + I_{z'}z'^2 = 1 \quad (9.49)$$

La cual no contiene productos de los ejes coordenados. Construyendo las ecuaciones (9.45) y (9.49) se observa que los productos de inercia del cuerpo con respecto a los ejes x', y', z' deben ser iguales a cero. Esas ejes x', y', z' se conocen como los **ejes principales de inercia** del cuerpo en O . Obsérvese que, dado un cuerpo con forma arbitraria y un punto O , siempre es posible encontrar ejes que sean principales de inercia del cuerpo en O (estos ejes son perpendiculares entre sí). Los productos de inercia del cuerpo con respecto a los ejes x', y', z' que pasan a través de O de la ecuación (9.49) y el elipsoide de inercia del cuerpo en O son iguales a cero. De hecho, esta importante propiedad indica que los momentos y productos de inercia del cuerpo con respecto a los ejes x, y, z que pasan a través de O de la ecuación (9.45) y el elipsoide de inercia del cuerpo en O son iguales a cero.

Si se utilizan los ejes principales de inercia x', y', z' como ejes coordenados, la ecuación (9.45) para el momento de inercia de un cuerpo con respecto a un eje arbitrario que pasa a través de O se reduce a

$$I_{AB} = I_{xx} \lambda_x^2 + I_{yy} \lambda_y^2 + I_{zz} \lambda_z^2 \quad (9.50)$$

La determinación de los ejes principales de inercia de un cuerpo con forma arbitraria es algo complicado y será expuesta en la siguiente sección. Sin embargo, existen otros casos en los que se pueden determinar dichos ejes. En una muestra de ejemplo, consideremos un tetraedro regular (la masa está distribuida en la figura 9.32) que tiene un peso de W y dimensiones de longitud a (ver figura 9.32). Este cuerpo no posee simetrías de simetría evidente respecto a ejes entre sí (EJA y CJE). A pesar de no haber simetrías evidentes, se sabe que si se seleccionamos ejes x, y, z de manera que coincidan con los ejes principales de inercia, todos los productos de inercia serán iguales a cero. Por tanto, los ejes x, y, z seleccionados de esta manera son los ejes principales de inercia del cuerpo. En el caso de un tetraedro regular homogéneo $OABC$ mostrado en la figura 9.33, la línea que une la esquina O con el centro D de la cara opuesta es un eje principal de inercia en O y es la única línea a través de O que sea perpendicular a OD (ver figura 9.33). Los ejes principales de inercia en O están en el plano xy (ver figura 9.33). Esta propiedad resulta evidente si se observa que al rotar al tetraedro a través de 120° alrededor de OD permanecen invariantes las formas y la distribución de su masa. Se sabe que el elipsoide de inercia en O es un elipsoide de revolución (ver figura 9.33). Por lo tanto, el elipsoide es un cuerpo de revolución cuyo eje de revolución es OD y la línea OD es una línea que sea perpendicular a esta que pasa a través de O en la ser un eje principal del elipsoide.



Figura 9.31

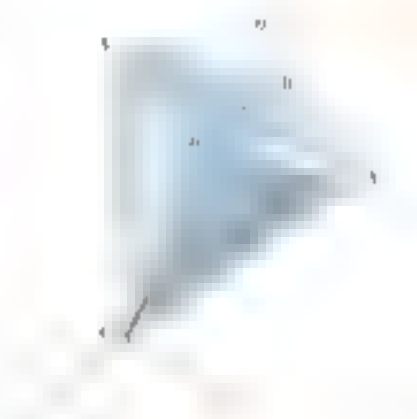


Figura 9.32

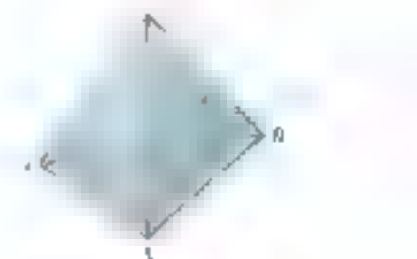


Figura 9.33

9.18. DETERMINACIÓN DE LOS EJES Y LOS MOMENTOS PRINCIPALES DE INERCIA DE UN CUERPO DE FORMA ARBITRARIA

El método de análisis descrito en esta sección debe utilizarse en casos que no es obvio que el cuerpo considerado sea un cuerpo con simetría obvia.

Considere el elipsoide de inercia del cuerpo en un punto dado.

El eje x es el eje de cada vector de momento P sobre la superficie del elipsoide x y en el vector unitario normal a la superficie es P . Se toma x como el eje x y y como el eje y y z como el eje z . Los puntos $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8, P_9, P_{10}$ son los puntos principales de la superficie del elipsoide y las líneas correspondientes se muestran en la figura 9.34.



Figura 9.34

Se debe recordar que en el cálculo se establece que la dirección de la normal a la superficie $f(x, y, z) = 0$ es ∇f . Por lo tanto, para obtener los puntos principales de la superficie del elipsoide de inercia se debe escribir ∇f por los valores, esto es,

$$\nabla f = (2k)x \mathbf{i} \quad (9.51)$$

donde k es una constante, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, y

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$$

Reemplazando en la ecuación (9.51) se observa que la función $f(x, y, z)$ correspondiente al elipsoide de inercia es

$$f(x, y, z) = I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{xy}xy - 2I_{yz}yz - 2I_{zx}zx = 1$$

Al sustituir $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ en la ecuación (9.51) y tomando los coeficientes de los vectores unitarios, se escribe

$$\begin{aligned} I_x x - I_{xy}y - I_{zx}z &= kx \\ -I_{xy}x + I_y y - I_{yz}z &= ky \\ -I_{yz}x - I_{yz}y + I_z z &= kz \end{aligned} \quad (9.52)$$

Al dividir cada uno de los términos entre la distancia r desde O hasta P , se obtienen tres ecuaciones semejantes que las denotamos como I_{xx} , I_{yy} y I_{zz} :

$$\begin{aligned} I_{xx} \lambda_x + I_{xy} \lambda_y + I_{xz} \lambda_z &= K \lambda_x \\ -I_{xy} \lambda_x + I_{yy} \lambda_y + I_{yz} \lambda_z &= K \lambda_y \\ -I_{xz} \lambda_x - I_{yz} \lambda_y + I_{zz} \lambda_z &= K \lambda_z \end{aligned} \quad (9.53)$$

Si se trata de encontrar los valores de λ de ecuación (9.53), las siguientes ecuaciones lineales homogéneas:

$$\begin{aligned} I_{xx} \lambda_x - I_{xy} \lambda_y - I_{xz} \lambda_z &= 0 \\ -I_{xy} \lambda_x + (I_{yy} - K) \lambda_y - I_{yz} \lambda_z &= 0 \\ -I_{xz} \lambda_x - I_{yz} \lambda_y + (I_{zz} - K) \lambda_z &= 0 \end{aligned} \quad (9.54)$$

Para que este sistema de ecuaciones tenga una solución distinta de $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = 0$, su discriminante debe ser igual a cero:

$$\begin{vmatrix} I_{xx} - K & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} - K & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} - K \end{vmatrix} = 0 \quad (9.55)$$

Al expandir este determinante y cambiar signos, se escribe

$$K^3 - (I_{xx} + I_{yy} + I_{zz})K^2 + (I_{xx}I_{yy} + I_{yy}I_{zz} + I_{zz}I_{xx}) - 2I_{xy}I_{yz}I_{xz} = 0 \quad (9.56)$$

Esto es una ecuación cúbica en K por propiedad. Tres raíces reales positivas K_1 , K_2 y K_3 .

Para obtener los ejes principales del eje principal correspondiente a la raíz K_1 , se sustituye K_1 en lugar de K en las ecuaciones (9.54). Los tres números de estas ecuaciones son linealmente dependientes, solo pueden darse dos ecuaciones independientes en λ_x , λ_y y λ_z . Sin embargo, se puede obtener una ecuación adicional extrayendo la parte real en ecuación (9.56) y los ejes principales de K_1 satisfacen la ecuación

$$\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 = 1 \quad (9.57)$$

Si se repite este procedimiento con K_2 y K_3 , se obtienen los ejes principales de los otros dos ejes principales.

Ahora se demuestra que K_1 , K_2 y K_3 de la ecuación (9.56) son los momentos principales de inercia de la elipse. Para esto se sustituye en las ecuaciones (9.53) la raíz K_1 en lugar de K y los valores de los ejes principales $(\lambda_x)_1$, $(\lambda_y)_1$ y $(\lambda_z)_1$ en lugar de los valores correspondientes de λ_x , λ_y y λ_z . Las ecuaciones se simplificarán. Ahora se multiplica cada término de la segunda y tercera ecuación por $(\lambda_x)_1$, $(\lambda_y)_1$ y $(\lambda_z)_1$, respectivamente, y se suman las ecuaciones obtenidas así. De esta manera, se escribe

$$\begin{aligned} I_{xx} \lambda_x^2 + I_{xy} \lambda_x \lambda_y + I_{xz} \lambda_x \lambda_z - 2I_{xy} \lambda_x \lambda_y - 2I_{xz} \lambda_x \lambda_z &= K_1 (\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2) \end{aligned}$$

Si se recuerda la ecuación (9.57), se observa que el lado izquierdo de esta ecuación es cero, es el momento de inercia de la elipse en el eje principal correspondiente a K_1 . Por lo tanto, el momento de inercia de la elipse en el eje principal correspondiente a K_1 es K_1 . Por lo tanto, el momento de inercia de la elipse en el eje principal correspondiente a K_2 es K_2 . Por lo tanto, el momento de inercia de la elipse en el eje principal correspondiente a K_3 es K_3 . Por lo tanto, los momentos principales de inercia de la elipse son K_1 , K_2 y K_3 .



PROBLEMA RESUELTO 9.14

Considere un prisma rectangular de altura a y anchura b y c . Determine el momento y producto de inercia del prisma con respecto a los ejes centroidales x y y y z . ¿Cual es el momento de inercia del prisma con respecto a la diagonal OB ?

SOLUCION

a) Momentos y productos de inercia con respecto a los ejes centroidales. **Momentos de inercia.** Al introducir los ejes centroidales x' y y' con respecto a los cuales están dadas las expresiones de inercia en la figura 9.15, se aplica el teorema de los ejes paralelos:

$$I_x = I_{x'} + a^2 A = \frac{1}{12} b c^3 + a^2 b c$$

En forma similar,

$$I_y = \frac{1}{12} c b^3 + a^2 b c$$

Producto de inercia. Debido a la simetría, los productos de inercia con respecto a los ejes centroidales x' y y' y z' son iguales a cero y, de hecho, son los productos de inercia con respecto a los ejes x y y . Entonces se tiene que:

$$I_{xy} = I_{x'y'} + a x y = 0 + a (b c) \left(\frac{1}{2} b \right) \left(\frac{1}{2} c \right) = \frac{1}{4} a b^2 c$$

En forma similar,

$$I_{yz} = \frac{1}{4} a c^2 b \quad I_{zx} = \frac{1}{4} a b c$$

Si se aplica el teorema de los ejes paralelos a la ecuación (9.48) se tiene que:

$$I_{OB} = I_x \lambda_1^2 + I_y \lambda_2^2 + I_z \lambda_3^2 - 2 I_{xy} \lambda_1 \lambda_2 - 2 I_{yz} \lambda_2 \lambda_3 - 2 I_{zx} \lambda_3 \lambda_1$$

donde los cosenos directores de OB son:

$$\lambda_1 = \cos \theta_1 = \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2 + a^2}}$$

$$\lambda_2 = \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2 + a^2}} \quad \lambda_3 = \frac{a}{\sqrt{b^2 + c^2 + a^2}}$$

Si se sustituyen los valores de los cosenos directores en la ecuación (9.49) y para los cosenos directores en la ecuación para I_{OB} , se tiene que:

$$I_{OB} = \frac{1}{(b^2 + c^2 + a^2)^{3/2}} \left[\frac{1}{12} b c^3 + c^2 a^2 b + \frac{1}{12} a c^3 + a^2 b^2 c + \frac{1}{4} a b^2 c + \frac{1}{4} a c^2 b + \frac{1}{4} a b c \right]$$

$$I_{OB} = \frac{1}{12} \frac{b c^3 + c^2 a^2 + a c^3 + a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}{b^2 + c^2 + a^2}$$

Solución alternativa. El momento de inercia I_{OB} puede obtenerse directamente a partir de los momentos principales de inercia I_1, I_2, I_3 puesto que la línea OB pasa a través del centro de masa. Como los ejes x, y, z son ejes principales de inercia, se utiliza la ecuación (9.50) y se escribe:

$$I_{OB} = \bar{I}_1 \lambda_1^2 + \bar{I}_2 \lambda_2^2 + \bar{I}_3 \lambda_3^2$$

$$= \frac{1}{12} \frac{b c^3 + c^2 a^2 + a c^3 + a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2 + a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}{b^2 + c^2 + a^2}$$



PROBLEMA RESUELTO 9.15

Si para el prisma rectangular del problema resuelto 9.14 se tiene que $a = 5$ y $b = 3$ h) calcule los momentos principales de inercia y e) calcule a) y b) los ejes principales de inercia en Ω .

SOLUCIÓN

Para resolver el problema se debe recurrir a la solución del problema resuelto 9.14, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{1}{3} mc^2 & I_y &= \frac{16}{3} mc^2 & I_z &= \frac{13}{3} mc^2 \\ I_{xy} &= \frac{1}{2} mc^2 & I_{yz} &= \frac{1}{2} mc^2 & I_{zx} &= \frac{1}{4} mc^2 \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores de los momentos y productos de inercia en la ecuación (9.56) y agrupando términos semejantes, se obtiene:

$$K^3 - \left(\frac{28}{3} mc^2\right)K^2 + \frac{143}{12} (m^2 c^4)K - \frac{16}{3} m^3 c^6 = 0$$

Entonces se resuelve para los valores de K a partir de la ecuación (9.56) y se obtiene los valores que coinciden con los momentos principales de inercia del cuerpo en el origen.

$$K_1 = 0.565467 mc^2 \quad K_2 = 4.20545 mc^2 \quad K_3 = 4.55562 mc^2$$

Para el primer momento principal de inercia K_1 se sustituye el valor K_1 en la ecuación (9.57) formando un sistema de tres ecuaciones a partir del cual se obtiene el vector unitario principal asociado a K_1 . Por tanto, para el primer momento principal de inercia K_1 se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{3} - 0.565467\right) mc^2 (\lambda_1)_1 &= \frac{1}{2} mc^2 (\lambda_1)_1 & \text{en } \lambda_1 &= 1 \\ -\frac{1}{2} mc^2 (\lambda_1)_2 + \left(\frac{16}{3} - 0.565467\right) mc^2 (\lambda_1)_2 &= 0 & \text{en } \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_1 &= \lambda_1 + \lambda_1 + \lambda_1 = 1 \end{aligned}$$

Si se resuelve el sistema de ecuaciones se obtiene:

$$(\lambda_1)_1 = 0.536600 \quad (\lambda_1)_2 = 0.494900 \quad (\lambda_1)_3 = 0.212357$$

Entonces, los ángulos que forma el primer eje principal de inercia con los ejes cartesianos son:

$$\theta_{1x} = 57.5^\circ \quad \theta_{1y} = 60.7^\circ \quad \theta_{1z} = 63.6^\circ$$

Si se utiliza sucesivamente el mismo conjunto de ecuaciones con K_2 y K_3 se encuentran que los ángulos asociados con el segundo y con el tercer momento principal de inercia son:

$$\theta_{2x} = 52.4^\circ \quad \theta_{2y} = 7^\circ$$

PRODUCCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta sección se determinan los *productos de inercia de masa de un cuerpo* I_{xy} , I_{yz} y I_{zx} se muestra cómo se determinan los *momentos de inercia* de dicho cuerpo con respecto al eje de simetría que pasa a través del *centro de masa* que coincide con el *origen O* los *ejes principales de inercia* de un cuerpo y las *correspondientes momentos principales de inercia*.

1. Para x , y y z los *productos de inercia de masa* de un cuerpo con respecto a los ejes coordinados pueden expresarse como la suma de los *productos de inercia de las partes* que constituyen el cuerpo con respecto a los ejes *simétricos*. La *razón* para las partes que constituyen el cuerpo se puede obtener el *teorema de los ejes paralelos* y escribir las ecuaciones (3.45).

$$I_{xy} = I_{xy'} + mxy' \quad I_{yz} = I_{yz'} + myz' \quad I_{zx} = I_{zx'} + mzx'$$

donde las primas representan los ejes *centroideles* de la masa. Las partes compuestas y *centroideles* representan las *coordenadas de sus centros de gravedad*. Se debe recordar que *los productos de inercia de masa* pueden ser positivos, negativos o cero. Así las ecuaciones se pueden utilizar en cuenta los siguientes x y y .

2. Con base en las ecuaciones (3.45) se puede determinar los *productos de inercia de masa* de los cuerpos que son *iguales a cero*. El ejemplo se puede encontrar en la figura 3.46(a) para el plano xy ; para el *triángulo* y el *rectángulo* en el plano xy ; para un cuerpo que se *pliega* en *simetría* alrededor del plano xy y para un cuerpo con un *eje de simetría* paralelo al eje z los *productos de inercia* I_{yz} e I_{zx} son *iguales a cero*.

3. Las partes rectangulares, circulares y semicirculares y los cuerpos *simétricos* paralelos a los ejes coordinados, *triángulos* y *rectángulos* paralelos a los ejes coordinados y *rectángulos* y *semicirculares* *simétricos* de *simetría* paralelos a los ejes coordinados y *rectángulos* rectangulares con ejes de *simetría* paralelos a los ejes coordinados *todos los productos de inercia* I_{xy} , I_{yz} e I_{zx} son *iguales a cero*.

4. Los *productos de inercia de masa* se pueden encontrar si se pueden utilizar a partir de las ecuaciones (3.45). Asimismo, en general se requiere un *triple integración* para determinar el *momento de inercia de masa* se puede utilizar una *solución* en un cuerpo dado puede *dividirse* en una serie de partes *relacionadas* y *trápezos* los *productos* son *relativos* a los *expuestos* en la *figura* anterior para los *momentos de inercia*.

continúa

El tensor I_{ij} es simétrico, es decir, $I_{ij} = I_{ji}$, es decir, $I_{12} = I_{21}$, $I_{13} = I_{31}$, $I_{23} = I_{32}$. En consecuencia, si se elige cualquier sistema de ejes cartesianos $Ox_1x_2x_3$, al estar I_{ij} en esta forma el determinante ΔI antes de calcular I_{ij} puede ser libre a determinar los momentos y productos de masas. De esta forma el cuerpo con respecto a los ejes cartesianos dados así como los ejes cartesianos $Ox_1x_2x_3$ del vector unitario \hat{A} a lo largo de OA .

Se elige el sistema de ejes cartesianos $Ox_1x_2x_3$ que sea el que se quiere para la demostración. Para demostrar $\Delta I = 0$ se quiere que se muestre que el determinante ΔI no cambia al cambiar el sistema de ejes cartesianos para la demostración de la invariancia de I_{ij} son iguales a cero. De los ejes se tomará como los ejes principales de inercia y los momentos de inercia correspondientes se llamarán los momentos principales de inercia de I_{ij} de modo que I_{ij} en los casos los ejes principales de inercia $Ox_1x_2x_3$ pueden denominarse a I_{11}, I_{22}, I_{33} y los productos de inercia. El procedimiento respectivo para determinar los momentos principales y los ejes principales se muestra de la siguiente manera: se elige un sistema de ejes $Ox_1x_2x_3$ cualquiera. Dado un eje de inercia \hat{A} se elige los ejes principales de inercia.

El eje de inercia \hat{A} se elige de modo que $I_{11} = I_{22} = I_{33}$ y se elige el eje de inercia \hat{A} de modo que $I_{11} = I_{22} = I_{33}$ y se elige el eje de inercia \hat{A} de modo que $I_{11} = I_{22} = I_{33}$ y se elige el eje de inercia \hat{A} de modo que $I_{11} = I_{22} = I_{33}$. Los ejes de inercia \hat{A} se eligen de modo que $I_{11} = I_{22} = I_{33}$ y se eligen los ejes principales de inercia del cuerpo.

El eje de inercia \hat{A} se elige de modo que $I_{11} = I_{22} = I_{33}$ y se eligen los ejes principales de inercia del cuerpo. El eje de inercia \hat{A} se elige de modo que $I_{11} = I_{22} = I_{33}$ y se eligen los ejes principales de inercia del cuerpo. El eje de inercia \hat{A} se elige de modo que $I_{11} = I_{22} = I_{33}$ y se eligen los ejes principales de inercia del cuerpo.

Los ejes de inercia \hat{A} se eligen de modo que $I_{11} = I_{22} = I_{33}$ y se eligen los ejes principales de inercia del cuerpo. Los ejes de inercia \hat{A} se eligen de modo que $I_{11} = I_{22} = I_{33}$ y se eligen los ejes principales de inercia del cuerpo. Los ejes de inercia \hat{A} se eligen de modo que $I_{11} = I_{22} = I_{33}$ y se eligen los ejes principales de inercia del cuerpo.

Problemas



Figura P9.149

9.149 Para el dispositivo de acero que se muestra en la figura, determine los productos de inercia de masa I_{xy} , I_{yz} e I_{zx} . La densidad del acero es de 7.850 kg/m^3 .

9.150 Para el elemento de aluminio que se muestra en la figura, determine los productos de inercia de masa I_{xy} , I_{yz} e I_{zx} . La densidad del aluminio es de 2.700 kg/m^3 .



Figura P9.150

9.151 9.152 Para el elemento de aluminio que se muestra en la figura, determine los productos de inercia de masa I_{xy} , I_{yz} e I_{zx} . (El peso específico del aluminio es de 0.100 lb/in^3 .)



Figura P9.151



Figura P9.152

9.153 a 9.156 Una sección de una lámina de 20×10^3 kg/m³ espesor z se dobla para formar el componente de máquina mostrado en la figura. Se pide: calcular el momento de inercia I_{xx} , I_{yy} y I_{xy} de cada uno de los elementos de masa I_{x1} , I_{x2} e I_{x3} de cada uno de ellos.



Figura P9.153



Figura P9.154

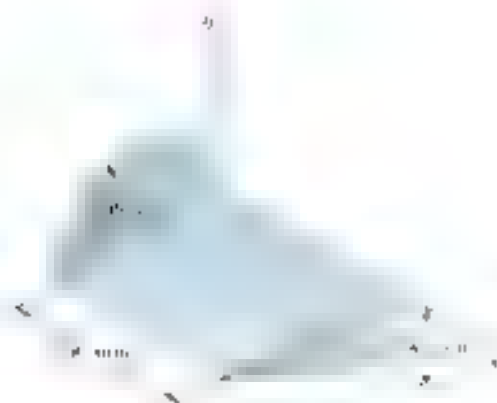


Figura P9.155



Figura P9.156

9.157 y 9.158 En la siguiente figura se muestran dos secciones de una lámina de 20×10^3 kg/m³ espesor z que forman una pieza por simetría de longitud l en el eje x . Se pide: calcular el momento de inercia I_{xx} , I_{yy} y I_{xy} de cada una de ellas.



Figura P9.157



Figura P9.158



Figura P9.159



Figura P9.162

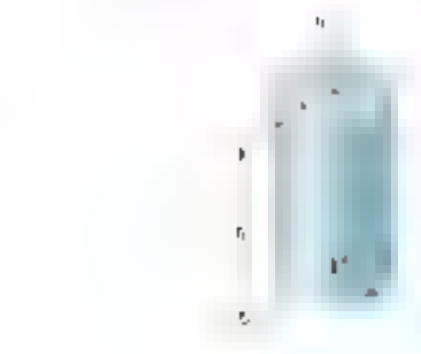


Figura P9.163

9.159 El arreglo mostrado en la figura se formó con un alambre de aluminio de 1.5 mm de diámetro. Si la densidad del aluminio es de 2.7 Mg/m^3 , determine los productos de inercia de masa I_{xy} , I_{yz} e I_{zx} de la figura de alambre.

9.160 El arreglo mostrado en la figura se formó con un alambre delgado de aluminio de 1 mm de diámetro. Si la masa por unidad de longitud del alambre se denota con m' , determine los productos de inercia de masa I_{xy} , I_{yz} e I_{zx} de la figura de alambre.



Figura P9.160

9.161 Complete la obtención de las ecuaciones (9.47) que expresan el teorema de los ejes paralelos para productos de inercia de masa.

9.162 Para el tetraedro homogéneo de masa m que se muestra en la figura, determine los productos de inercia de masa I_{xy} , I_{yz} e I_{zx} con base en el resultado del factor aI_{yz} e I_{zx} .

9.163 En la figura se muestra un cilindro circular homogéneo de masa m . Determine el momento de inercia de masa del cilindro con respecto a la línea OA que pasa por el centro O y el punto A que se representa rotando el semicírculo de la superficie superior del cilindro.

9.164 En la figura se muestra un cono circular homogéneo de masa m . Determine el momento de inercia de masa del cono con respecto a la línea OA que une al origen O con el punto A .



Figura P9.164

9.165 Para el elemento de máquina del problema 9.141 que se muestra en la figura, determine el momento de inercia de masa con respecto a la línea que une el origen O y el punto A .

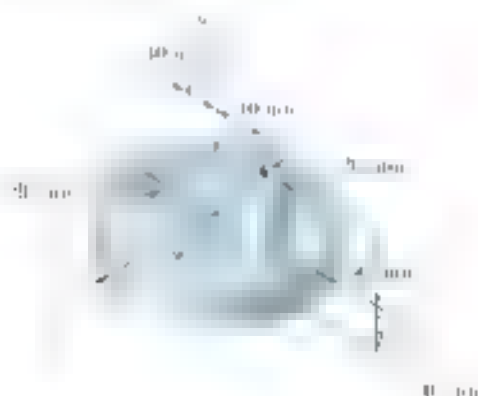


Figura P9.165

9.166 Determine el momento de inercia de masa del dispositivo de acero de los problemas 9.143 y 9.149 con respecto a un eje que pasa por el origen O y que está caracterizado por el vector $\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$.

9.167 Una placa ligada con resaca homogénea y pesada W está distribuida en la forma que se muestra en la figura. Determine su momento de inercia de masa con respecto a la línea que une el origen O con el punto A .

Figura P9.167

9.168 Una placa de hoja de metal con espesor t y peso específico γ se encuentra en la forma que se muestra en la figura. Determine su momento de inercia de masa con respecto a una línea que une el origen O y el punto A .

9.169 Para los componentes de inercia de los problemas 9.146 y 9.155, determine el momento de inercia de masa con respecto a un eje que pasa por el origen y que está caracterizado por el vector unitario $\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$.

9.170 Para el elemento de máquina del problema 9.141, determine el momento de inercia de masa con respecto a un eje que pasa por el origen O y que está caracterizado por el vector unitario $\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$.

9.171 Problema 9.143.

9.172 Problema 9.147.

9.173 Problema 9.146.

9.174 Para el prisma rectangular mostrado en la figura, determine los momentos de inercia de masa con respecto a los ejes x y y que pasan por el punto A y B cuando se calienta en el punto A y B el punto B .



Figura P9.173



Figura P9.175

9.174 Para el cono circular recto del problema número 9.11, determine el valor de la relación a/b tal que el eje principal de inercia del cono se transforme en una esfera cuando se calcule en *a)* el ápice del cono y *b)* el centro de la base del cono.

9.175 Para el cilindro circular homogéneo de radio a y longitudinal L , que se muestra en la figura, determine el valor de la relación a/L tal que el eje principal de inercia del cilindro se transforme en una esfera cuando la inercia se calcule en *a)* el centroide del cilindro y *b)* el punto A .

9.176 Dados un cuerpo arbitrario y tres ejes rectangulares x , y y z como se muestra, demuestre que el momento de inercia de masa del cuerpo con respecto a cualquier uno de los ejes x , y o z no puede ser mayor que la suma de los momentos de inercia de masa del cuerpo con respecto a los otros dos ejes. Esto es, demuestre que $I_x \leq I_y + I_z$, $I_y \leq I_x + I_z$ y $I_z \leq I_x + I_y$ para cualquier cuerpo. Además, demuestre que si el cuerpo es un sólido homogéneo de revolución entonces $I_x = I_y = I_z$ donde x , y o z es el eje transversal.

9.177 Considere un cubo de masa m y lados de longitud a . *a)* Demuestre que el eje principal de inercia en el centro del cubo es una esfera y determine el momento de inercia de masa con respecto a cada uno de los ejes rectangulares x , y y z en el centro. *b)* Calcule los ejes principales de inercia en el centro de masa y determine los momentos principales de inercia del cubo en dicho punto.

9.178 Dados un cuerpo homogéneo de masa m y de forma arbitraria, así como los tres ejes rectangulares x , y y z con origen en O , demuestre que la suma de los momentos de inercia de masa $I_x + I_y + I_z$ del cuerpo no puede ser menor que cuatro veces el momento de inercia de masa de cualquier material y masa m con centro en O . Además, con el resultado del problema 9.176, demuestre que si el cuerpo es un sólido de revolución, donde z es el eje de revolución, su momento de inercia de masa I_z alrededor del eje transversal x o y no puede ser menor que el momento de inercia de una esfera con la misma masa y del mismo material.

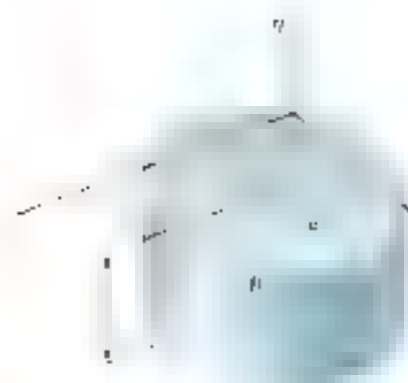


Figura P9.179

9.179 En la figura se muestra un cilindro circular homogéneo de masa m . El diámetro OB de la cara superior forma un ángulo de 45° con los ejes x y y . Determine los principales momentos de inercia de masa del cilindro en el origen O . *b)* Calcule los ángulos que los ejes principales de inercia en O forman con los ejes x , y y z en radianes. *c)* Trace el eje de simetría de la superficie que forman los ejes principales de inercia en O respecto a los ejes x , y y z .

9.180 a 9.184 Para el componente que se describe en el problema indicado, determine *a)* los momentos principales de inercia de masa en el origen y *b)* los ejes principales de inercia en el origen. Dibuje el cuerpo y el eje de simetría de la superficie que forman los ejes principales de inercia en el origen en los ejes x , y y z .

9.180 Problema 9.165

9.181 Problemas 9.145 y 9.149

9.182 Problema 9.167

9.183 Problema 9.168

9.184 Problemas 9.148 y 9.170

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 9

En el presente capítulo, la sección 9.1 examina la relación entre el momento de la resultante \mathbf{R} de las fuerzas $\Delta \mathbf{F}$ distribuidas sobre un área plana A y las fuerzas equivalentes. Las fuerzas $\Delta \mathbf{F}$ son proporcionales tanto a las áreas ΔA de los elementos sobre los cuales actúan, como a las distancias y desde dichos elementos hasta una línea fija; por consiguiente, se tiene $\Delta \mathbf{F} = k y \Delta A$. Se encontró que la magnitud de la resultante \mathbf{R} es proporcional al primer momento $\int y \Delta A$ del área A , mientras que el momento de \mathbf{R} con respecto al eje x es proporcional al segundo momento o momento de inercia, $I_x = \int y^2 \Delta A$ de A con respecto al mismo eje (sección 9.2).

Las *momentos rectangulares de inercia* I_x e I_y de un área (sección 9.3) se obtienen al evaluar las integrales

$$I_x = \int y^2 \Delta A \quad I_y = \int x^2 \Delta A \quad (9.1)$$

Para tales los se pueden evaluar en una sola integral si se conoce el área ΔA como función alguna de x o y de los ejes coordenados. También se obtienen los *momentos de inercia* I_x e I_y a partir de la misma integral (sección 9.4) evaluando la fórmula para el momento de inercia de un área rectangular problema resuelto 9.3.



Figura 9.35



Figura 9.36

El *momento polar de inercia* de un área A con respecto al polo O (sección 9.4) se definió como

$$J_O = \int r^2 \Delta A \quad (9.2)$$

donde r es la distancia que hay desde O hasta el elemento de área ΔA (Figura 9.37). Observe que $r^2 = x^2 + y^2$ es la distancia al origen

$$J_O = I_x + I_y \quad (9.4)$$

www.geocienciasvirtual.blogspot.com.co

Momento polar de inercia

Áreas de giro



Teorema de los ejes paralelos



Figura 9.37

El **radio de giro de un área A** con respecto al eje x se define como k_x si se define como k_y el radio de giro de A con respecto al eje y y con respecto a O , se obtiene

$$k_x = \sqrt{I_x/A} \quad k_y = \sqrt{I_y/A} \quad k_o = \sqrt{I_o/A} \quad (9.9)$$

En la sección 9.6 se presentaba un **teorema de los ejes paralelos** el cual establece que el momento de inercia I de un área con respecto a un eje paralelo AA' figura 9.37 es igual al momento de inercia I_c de A con respecto al eje central BB' que es paralelo a AA' más el producto del área A por el cuadrado de la distancia d entre los dos ejes.

$$I = I_c + Ad^2 \quad (9.10)$$

La fórmula anterior también puede utilizarse para determinar el momento de inercia I con respecto a un eje central BB' cuando se conoce su momento de inercia I_c con respecto al eje paralelo AA' . Se debe elegir en este caso si se desea restar el producto Ad^2 del momento de inercia I conocido.

Una relación similar se cumple entre el momento polar de inercia J_o de un área con respecto al punto O y el momento polar de inercia J_c de la misma área con respecto al punto C . Representando con d la distancia entre O y C , se tiene

$$J_o = J_c + Ad^2 \quad (9.11)$$

El teorema de los ejes paralelos se puede utilizar en forma efectiva para calcular el **momento de inercia de un área compuesta** con respecto a un eje dada la sección 9.7. Considerando una área compuesta por secciones primarias se calcula el momento de inercia de cada una con respecto al eje primario BB' o al eje secundario AA' que se indica en las figuras 9.38 y 9.39. Luego se agregan. Posteriormente se aplica el teorema de los ejes paralelos para determinar el momento de inercia de cada una de las áreas componentes con respecto al eje deseado y se suman los valores obtenidos de esta forma (problemas resueltos 9.4 y 9.5).

Las secciones 9.8 a la 9.10 estuvieron dedicadas a la transformación de los momentos de inercia de un área mediante una **rotación de ejes combinada**. En primer lugar se define el **producto de inercia de un área A** como

$$I_{xy} = \int_A xy \, dA \quad (9.12)$$

y se demuestra que $I_{xy} = 0$ si el eje x o y es un eje de simetría de A con respecto al cual A tiene porciones iguales. Luego se define el **teorema de los ejes paralelos para productos de inercia**. Se obtiene

$$I_{xy} = \bar{I}_{xy} + \bar{x}\bar{y}A \quad (9.13)$$

donde I_{xy} es el producto de inercia del área con respecto a los ejes centroidales $x' y'$ que son paralelos a los ejes x y y , respectivamente, y \bar{x} y \bar{y} son las coordenadas de centroides de A con respecto a x y y .

Figura 9.38

En la sección 9.9 se determinaron los momentos y el producto de inercia I_x , I_y e I_{xy} de un área con respecto a los ejes x' y y' en un sistema de ejes rotados. Rotando los ejes con las adas x y y originales, se usó el teorema de Steiner para encontrar el momento de inercia de un área del rectángulo (figura 9.38). Se expresó I_x , I_y e I_{xy} en términos de los momentos y el producto de inercia I_x , I_y e I_{xy} calculados con respecto a los ejes x y y originales. Se obtuvo que

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta \quad (9.14)$$

$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta \quad (9.15)$$

$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta \quad (9.20)$$

Los ejes principales del área con respecto a O se definen como los ejes que perpendicularmente entre sí respecto a los ejes x y y originales. Los momentos de inercia de un área son máximos y mínimos. Los valores correspondientes de θ , representados por θ_m , se obtienen a partir de la fórmula

$$\tan 2\theta_m = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \quad (9.25)$$

Los ejes x_m y y_m que son perpendiculares entre sí son los ejes principales de inercia de un área de área con respecto a O se obtienen.

$$I_{\text{máx, mín}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \quad (9.27)$$

También se señaló que el valor correspondiente del producto de inercia es cero.

La transformación de los momentos y el producto de inercia de un área con respecto a los ejes x y y originales se puede expresar como sigue debido al *círculo de Mohr* (sección 9.10). Dados los momentos y el producto de inercia I_x , I_y e I_{xy} del área con respecto a los ejes

Momentos principales de inercia

Círculo de Mohr

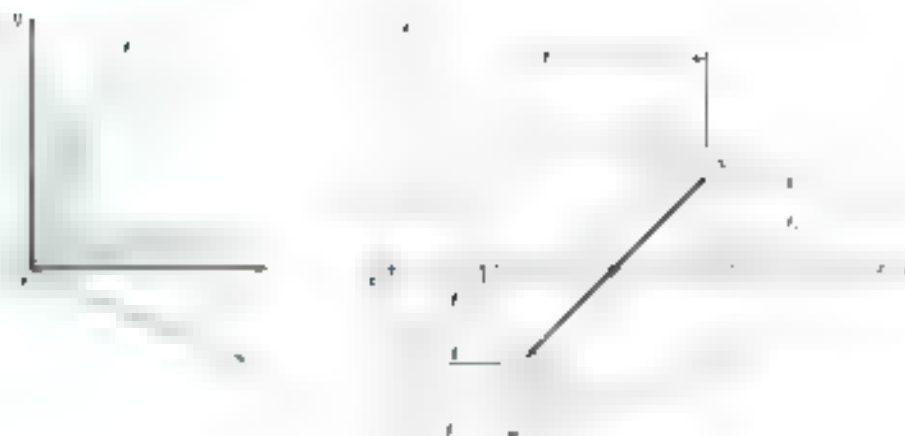


Figura 9.39

coordenados x y y se grafican los puntos $X(d_x, -d_y)$ y $Y(d_y, -d_x)$ y se une con una línea que divide los ángulos 90° (Fig. 9.39). Esa línea es un diámetro del círculo de Mohr y, por tanto, define dicho círculo. Conforme se rotan los ejes, volviendo a través de un ángulo θ , el círculo se rota a través del doble de dicho ángulo y las coordenadas de X' y Y' proporcionan los nuevos valores $I_{x'}$, $I_{y'}$ o I_x de los momentos y I_{xy} de los productos de área. Además, el ángulo θ_m y las coordenadas de los puntos A y B definen los ejes principales a y b y los momentos principales de inercia del área (problema resuelto 9.5).

La segunda parte de capítulo está dedicada a calcular los momentos de inercia de masas, los cuales se aplican a la mecánica en problemas que involucran rotación. Como se puede apreciar, el momento de inercia de masa de un sólido con respecto a un eje AA' (figura 9.40) se definió como

$$I = \int r^2 dm \quad (9.28)$$

donde r es la distancia desde AA' hasta el elemento de masa [sección 8.11]. El *radio de giro* del cuerpo se definió como

$$k = \sqrt{\frac{I}{m}} \quad (9.29)$$

Los momentos de inercia de un cuerpo con respecto a los ejes cartesianos se expresaron de la siguiente manera:

$$I_x = \int (y^2 + z^2) dm \quad (9.30)$$

$$I_y = \int (x^2 + z^2) dm$$

$$I_z = \int (x^2 + y^2) dm$$



Figura 9.40

Se vio que el *teorema de los ejes paralelos* también se aplica a los momentos de inercia de masa (sección 9.12). Por tanto, el momento de inercia I de un cuerpo con respecto a un eje paralelo a AA' (figura 9.41) puede expresarse como

$$I = \bar{I} + md^2 \quad (9.33)$$

donde \bar{I} es el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje centrado BB' que es paralelo a AA' , m es la masa del cuerpo y d es la distancia entre los dos ejes.



Figura 9.41



Figura 9.42



Figura 9.43

Los momentos de inercia de placas delgadas se pueden obtener a partir de los momentos de inercia de sus ejes de simetría (Fig. 9.39). Se encuentra que, para una *placa rectangular*, los momentos de inercia con respecto a los ejes simétricos centrados AA' y BB' son

$$I_{AA'} = \frac{1}{12} ma^2 \quad I_{BB'} = \frac{1}{12} mb^2 \quad (9.39)$$

$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2) \quad (9.40)$$

donde m es la masa, a y b son las dimensiones de la placa y C es el punto dado por

$$I_{AA'} = I_{BB'} = \frac{1}{4} mr^2 \quad (9.41)$$

$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} = \frac{1}{4} mr^2 \quad (9.42)$$

Cuando una placa posee *tres ejes de simetría*, es posible determinar la integral para determinar los momentos de inercia con respecto a un eje dado si se selecciona el elemento de masa dm como una línea de masa (problemas resueltos 9.10 y 9.11). En esta parte cuando un cuerpo en estado de reposo tiene formas geométricas comunes, su momento de inercia con respecto a un eje dado puede determinarse con las fórmulas proporcionadas en la ecuación 9.39 o la ecuación 9.42 de los ejes paralelos (problemas resueltos 9.12 y 9.13).

En esta parte de la capítulo se pretende determinar el momento de inercia de un cuerpo con respecto a un eje arbitrario. El procedimiento se trata de manera C (sección 9.14). Se se presentan

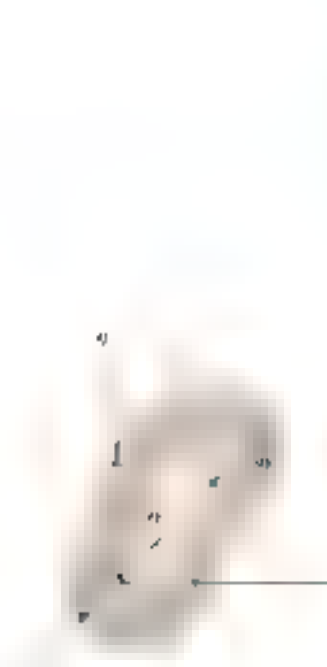


Figura 9.44

Momentos principales de inercia

con $\lambda = \lambda_x + \lambda_y + \lambda_z$ los componentes del vector unitario λ a lo largo de OL (figura 9.44) y se introducen los *productos de inercia*

$$I_{xy} = \int xy \, dm \quad I_{yz} = \int yz \, dm \quad I_{zx} = \int zx \, dm \quad (9.45)$$

se encontró que el momento de inercia del cuerpo con respecto a OL se pueden expresar como

$$I_{OL} = I_x \lambda_x^2 + I_y \lambda_y^2 + I_z \lambda_z^2 - 2I_{xy} \lambda_x \lambda_y - 2I_{yz} \lambda_y \lambda_z - 2I_{zx} \lambda_z \lambda_x \quad (9.46)$$

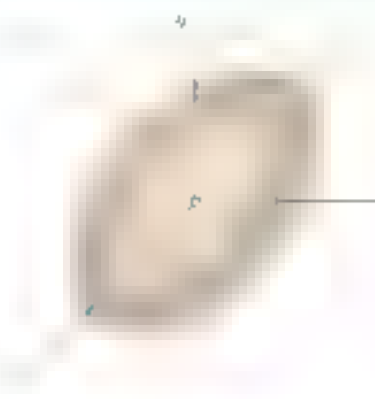


Figura 9.45

evaluar los I_{OL} para Q a lo largo de cada uno de los ejes x , y y z (es decir $I_{OL} = I_x$, I_y o I_z según el eje) se obtiene la superficie que se puede considerar como *elipsoide de inercia* del cuerpo en el punto O . Los ejes principales x , y y z en este caso son los ejes Q en los que los *productos de inercia* del cuerpo están a los *productos de inercia* I_{xy} , I_{yz} e I_{zx} del cuerpo con respecto a dichos ejes son iguales a cero. Existen muchas situaciones en las cuales se encuentran los ejes principales a partir de un cuerpo a partir de las propiedades de simetría de este mismo. Por ejemplo, si se tiene como los ejes principales como los ejes coordenados, se puede expresar a I_{OL} como

$$I_{OL} = I_x \lambda_x^2 + I_y \lambda_y^2 + I_z \lambda_z^2 \quad (9.50)$$

donde $I_x = I_{OL} = I$ son los *momentos principales de inercia* del cuerpo en O .

Como se puede observar los ejes principales se obtienen a partir de la ecuación (9.50) es necesario resolver la ecuación cúbica

$$K^3 - (I_x + I_y + I_z)K^2 + (I_x I_y + I_y I_z + I_z I_x - I_{xy}^2 - I_{yz}^2 - I_{zx}^2)K - (I_x I_y I_z - I_x I_{yz}^2 - I_y I_{zx}^2 - I_z I_{xy}^2 - 2I_{xy} I_{yz} I_{zx}) = 0 \quad (9.56)$$

Se encontró [sección 9.15] que las raíces K_1 , K_2 y K_3 de esta ecuación son los *momentos principales de inercia* del cuerpo en O . Entonces se obtienen los ejes principales λ_1 , λ_2 y λ_3 de este problema correspondiente al momento principal de inercia K sustituyendo K en las ecuaciones (9.46) y resolviendo para λ . Conociendo los ejes principales y los momentos K_1 , K_2 y K_3 se puede encontrar el momento con K y λ para cualquier λ . Las ecuaciones (9.46) de los otros dos ejes principales problema resuelto 9.15.

Problemas de repaso

9.185 Para el área sombreada que se muestra en la figura, determine por integración directa los momentos de fuerza con respecto a los ejes x y y .



Figura P9.185

9.186 Para el área sombreada que se muestra en la figura, determine los momentos de fuerza y el radio de giro con respecto a los ejes x y y .

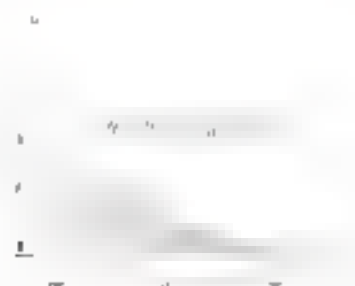


Figura P9.186

9.187 Para el área sombreada que se muestra en la figura, determine el momento de fuerza y el radio de giro con respecto al eje y .



Figura P9.187



Figura P9.188

9.88 Para el área sombreada que se muestra en la figura, determine los momentos de inercia con respecto a los ejes x y y .

9.89 Para el área que se muestra en la figura, determine los momentos polar de inercia con respecto a *a*) el punto O y *b*) el centroide del área.



Figura P9.189

9.190 Con el propósito de construir una viga asimétrica, se unieron entre sí dos ángulos $L76 \times 76 \times 6,4$ mm y dos ángulos $L152 \times 102 \times 12,7$ mm, como se muestra en la figura. Determine los momentos de inercia de la sección combinada con respecto a sus ejes centroidales x y y .

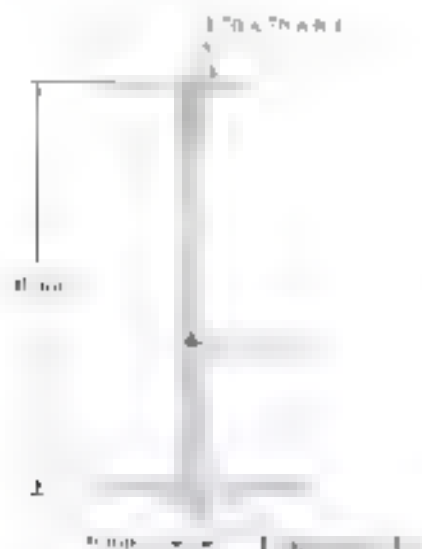


Figura P9.190

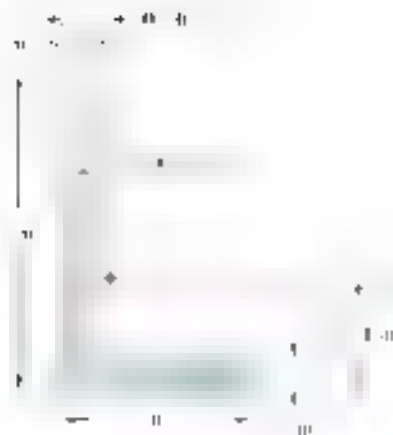


Figura P9.191 y P.192

9.191 Para la sección transversal del ángulo $L5 \times 3 \times \frac{1}{2}$ in. que se muestra en la figura, determine el momento de inercia con respecto al eje x y y .

9.192 Para la sección transversal del ángulo $L5 \times 3 \times \frac{1}{2}$ in. que se muestra en la figura, determine el momento de inercia con respecto al eje x y y un ángulo de 30° en el mismo sentido que las flechas de la figura. Determine los ejes centroidales x_c y y_c de la sección transversal y los momentos de inercia con respecto a estos ejes.

9.193 El componente de máquina que se muestra en la figura se cortó de una pieza de hoja de metal de grado 303 como se muestra. La masa de dicho componente es representada con m , determine su momento de inercia de masa con respecto a los ejes x , y y z en el O .



Figura P9.193 y P.194

9.194 El componente de máquina que se muestra en la figura se cortó de una pieza de hoja de metal de grado 303 como se muestra. La masa del componente es representada con m , determine su momento de inercia de masa con respecto a a' el eje AA' y b' el eje BB' donde los ejes AA' y BB' son paralelos al eje z y se encuentran en un plano paralelo y que está a una distancia a por encima del plano xy .

9.195 Una placa gruesa de 2 mm de hoja de acero se corta y se dobla para formar el componente de máquina que se muestra en la figura. Si se da que $a = 100$ mm, $b = 150$ mm y $c = 200$ mm, determine la inercia de masa del componente con respecto a cada uno de los ejes coordenados.

9.196 Para el componente de máquina hecho de acero que se muestra en la figura, determine los momentos de inercia de masa con respecto a los ejes x y y que se muestran. El diámetro es de 500 mm.



Figura P9.195



Figura P9.196 y P.197

Figura P9.196

9.C1 Para un área con momentos y productos de inercia conocidos I_x , I_y e I_{xy} , utilice software para calcular los momentos y productos de inercia $I_{x'}$, $I_{y'}$ e $I_{x'y'}$ del área con respecto a los ejes x' y y' obtenidos al rotar, en un ángulo θ y en sentido horario, a las nuevas bases de los ejes x y y originales. Tome $\theta = 0^\circ$ y 90° para $I_{x'} = I_x$, $I_{y'} = I_y$ de la sección de 100×100 mm es 8.33×10^6 mm⁴ y $I_{xy} = 0$ hasta 90° en incrementos de 5° .

9.C2 Para un área con momentos y productos de inercia conocidos I_x , I_y e I_{xy} , utilice software para calcular la suma de los productos de inercia I_{xy} y los valores correspondientes de los momentos de inercia principales I_u y I_v de este programa para resolver el problema 9.1. Utilice el programa resuelto 9.7.

9.C3 En la figura se muestra cómo las secciones transversales pueden aproximarse mediante una serie de rectángulos. Con un software calcule los momentos de inercia y los radios de giro de secciones transversales de esta forma con respecto a sus ejes centroidales horizontal y vertical. Utilice este programa en las secciones transversales mostradas en a) las figuras P9.31 y P9.33, b) las figuras P9.32 y P9.34, c) la figura P9.43 y d) la figura P9.44.

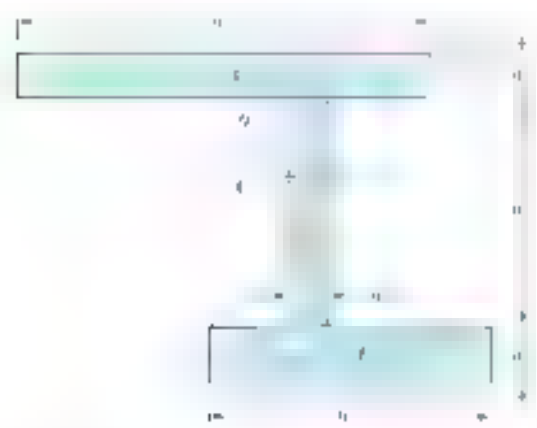


Figura P9.C3 y P9.C4

9.C4 En la figura se muestra cómo las secciones transversales pueden aproximarse mediante una serie de rectángulos. Con un software calcule los momentos de inercia y los radios de giro de secciones transversales de esta forma con respecto a sus ejes centroidales horizontal y vertical. Utilice este programa para resolver el problema 9.1. Utilice el programa resuelto 9.7.

9.C5 El área mostrada en la figura se rota alrededor del eje x para formar un sólido homogéneo de masa m . Aproxime esta área usando una serie de 400 rectángulos de la forma $b(x) \Delta x$ cada uno con un ancho Δx y utilice el programa `area.m` para resolver el problema 9.C4. Use este programa para resolver el problema 9.C5. La densidad es $\rho = 2 \text{ kg/m}^3$ y la longitud es $L = 21 \text{ m}$ y ponga $n = 400$ en este programa. $m = 2 \text{ kg}$, $a = 100 \text{ mm}$ y $h = 400 \text{ mm}$.



Figura 9.C5

9.C6 Un alambre homogéneo con un peso por unidad de longitud de 0.04 lb/ft se usa para formar la figura que se muestra. Aproxime esta figura usando 10 rectángulos de la forma $b(x) \Delta x$ cada uno con un ancho Δx y utilice el programa `area.m` para resolver el problema 9.C4. Use este programa para resolver el problema 9.C6. La densidad es $\rho = 1 \text{ m}^3/\text{m}^3$ y la longitud es $L = 4 \text{ m}$. $a = 2 \text{ m}$, $L_1 = 17 \text{ m}$, $h = 10 \text{ m}$ y $c = 3 \text{ m}$, $L_2 = 25 \text{ m}$ y $h = 6 \text{ m}$.

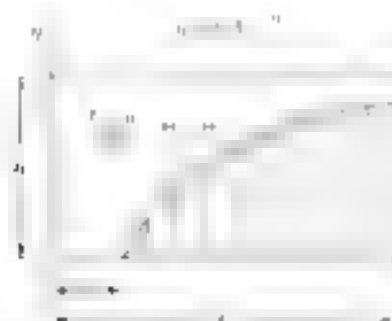


Figura 9.C6

9.C7 Para un cuerpo con momentos y productos de inercia de masa conocidos $I_x, I_y, I_z, I_{xy}, I_{yz}, I_{zx}$ y I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} se usa el programa `area.m` para resolver el problema 9.C4. Use este programa para resolver el problema 9.C7. La densidad es $\rho = 1 \text{ m}^3/\text{m}^3$ y la longitud es $L = 4 \text{ m}$. $a = 2 \text{ m}$, $L_1 = 17 \text{ m}$, $h = 10 \text{ m}$ y $c = 3 \text{ m}$, $L_2 = 25 \text{ m}$ y $h = 6 \text{ m}$.

9.C8 En la configuración del problema 9.C7 incluya el cálculo de los momentos de inercia de masa $I_x, I_y, I_z, I_{xy}, I_{yz}, I_{zx}$ y I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} y utilice el programa `area.m` para resolver el problema 9.C4. Use este programa para resolver el problema 9.C8. La densidad es $\rho = 1 \text{ m}^3/\text{m}^3$ y la longitud es $L = 4 \text{ m}$. $a = 2 \text{ m}$, $L_1 = 17 \text{ m}$, $h = 10 \text{ m}$ y $c = 3 \text{ m}$, $L_2 = 25 \text{ m}$ y $h = 6 \text{ m}$.

Este método de trabajo visual es particularmente
efectivo cuando puede encontrarse una relación
simple entre los desplazamientos de los puntos
y la extensión de la zona afectada.

El método de trabajo visual puede ser utilizado
para:

Fotografía para obtener acceso a un punto de
canalera en construcción.

CAPITULO

10

Método del trabajo virtual



CAPÍTULO 10. MÉTODO DEL TRABAJO VIRTUAL

- Introducción
 - Trabajo de una fuerza
 - Principio del trabajo virtual
 - Aplicaciones del principio del trabajo virtual
 - Máquinas simples. Eficiencia mecánica
 - Trabajo de una fuerza durante un desplazamiento finito
- Energía potencial
 - Energía potencial y equilibrio
 - Estabilidad del equilibrio



Figura 10.1

10.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se estudian las problemáticas relacionadas con el equilibrio de cuerpos rígidos y se introducen al estudiante que las fuerzas aplicadas sobre los cuerpos establecen ecuaciones. Se plantearán y resolverán las ecuaciones de equilibrio $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$ y $\sum M_A = 0$ para determinar el estado de las estructuras. Se introducirá un método que resulta más eficiente que los anteriores: el método de las fuerzas de equilibrio virtual, conocido como *principio de trabajo virtual*, el cual fue desarrollado por primera vez en el siglo XVII por el matemático suizo Jean Bernoulli.

Como se verá en la sección 10.3, el principio del trabajo virtual es aplicable para determinar el equilibrio de los cuerpos rígidos y sistemas de cuerpos rígidos cuando las fuerzas sobre los cuerpos son fuerzas de contacto y fuerzas de enlace. En esta sección se comienza a partir de la posición de equilibrio, el cual es el estado en el que las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo son cero. Este método es el más eficiente para encontrar la solución de problemas relacionados con el equilibrio de máquinas y estructuras que están constituidos por varios elementos conectados entre sí.

En la segunda parte del capítulo se aplicará el método del trabajo virtual en forma alternativa basada en el concepto de *energía potencial*. En la sección 10.8 se estudiará que si una partícula, cuerpo rígido o sistema de cuerpos rígidos está en equilibrio, la derivada de la energía potencial con respecto a los variaciones del sistema físico debe ser cero.

También en este capítulo se aprenderá a evaluar la eficiencia mecánica de una máquina simple. En la última parte de este capítulo se estudia si el equilibrio es estable, inestable o neutro (sección 10.9).

10.2. TRABAJO DE UNA FUERZA

Pongámonos a reflexionar sobre los conceptos de *desplazamiento* y *trabajo* que se ven en la mecánica clásica. Comencemos por la parte de desplazamiento. El desplazamiento de un punto A a un punto B es el vector \vec{AB} . Si consideramos el vector de posición correspondiente al punto A el pequeño vector que mide $d\vec{r}$ en A, el desplazamiento se relaciona con el elemento $d\vec{r}$ de vector $d\vec{r}$ en la trayectoria, es decir, el camino. Si ponemos por ejemplo la partícula en una fuerza \vec{F} , el *trabajo de la fuerza F* en el desplazamiento $d\vec{r}$ se define como la cantidad

$$dU = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (10.1)$$

la cual se obtiene al tomar el producto escalar del vector de fuerza \vec{F} con el vector de desplazamiento $d\vec{r}$. Si se representan con F y dr las magnitudes de la fuerza y el desplazamiento, respectivamente, y con α el ángulo entre ambos vectores \vec{F} y $d\vec{r}$, recordando la definición de producto escalar de los vectores, se obtiene

$$dU = F dr \cos \alpha \quad (10.2)$$

Como el trabajo es una *cantidad escalar*, es tiene magnitud y signo pero no dirección. También cabe destacar que el trabajo puede estar expresado en unidades diferentes al de las unidades de longitud por unidad de fuerza. Así, en el sistema de unidades de uso común en los países de habla hispanica se expresan unidades de $\text{kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}^2$ o J (Joule) en el

usan unidades del SI, entonces el trabajo se expresa en $\text{N} \cdot \text{m}$. A esta unidad se le denomina **joule** (J)¹.

Con base en la ecuación (10.1') se puede concluir que el trabajo dW es positivo si el ángulo α es agudo y negativo si el ángulo α es obtuso. Fíjese en las expresiones anteriores y en el vector fuerza \mathbf{F} en la figura 10.2(a) para ver el desplazamiento $d\mathbf{r}$ en la dirección del vector \mathbf{F} (es decir, $d\mathbf{r}$ es paralelo a \mathbf{F}), por lo que \mathbf{F} hace un ángulo agudo con $d\mathbf{r}$; entonces el trabajo se obtiene como $dW = F dr$. Por último, si \mathbf{F} es perpendicular a $d\mathbf{r}$, el trabajo dW es igual a cero.

También el trabajo dW de una fuerza \mathbf{F} durante un desplazamiento $d\mathbf{r}$ se puede considerar como el producto de F con la componente de $d\mathbf{r}$ en la dirección del vector \mathbf{F} (figura 10.2b). Este concepto es muy práctico cuando se desea determinar el trabajo realizado

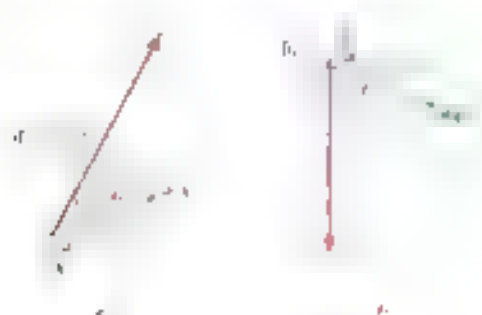


Figura 10.2

por un peso W que se mueve (figura 10.2c). En este caso, el trabajo dW es igual al producto de W con el desplazamiento vertical dy de un elemento de gravedad dy del cuerpo. Si el desplazamiento es hacia abajo, el trabajo realizado es positivo, pero si el desplazamiento es hacia arriba, entonces el trabajo realizado será negativo.

Hay cierto número de fuerzas que se estudian en estática y que no realizan trabajo. Fuerzas aplicadas a puntos fijos ($ds = 0$) o que actúan en líneas que permanecen a un desplazamiento $ds = 0$ (dentro de este tipo de fuerzas se encuentran las fuerzas de reacción que se generan en puntos sin movimiento relativo al cuerpo que se sostiene como en respecto al punto). Las fuerzas de reacción en superficies se encuentran cuando el cuerpo se encuentra sobre una superficie a lo largo de la fuerza de reacción que genera un rodillo cuando se refiere a lo largo de un eje, el peso de un cuerpo cuando se refiere a la gravedad si el cuerpo se mueve horizontalmente y la fuerza de fricción que una rueda genera cuando esta rueda se mueve se define como tal. Se debe considerar lo mencionado solamente. Algunos ejemplos de fuerzas que se realizan trabajo son el peso de un cuerpo (excepto en el caso considerado anteriormente), la fuerza de fricción que actúa en un cuerpo que se mueve sobre una superficie horizontal y la fuerza de las mareas que actúan sobre un cuerpo en movimiento.

¹ El joule es la unidad de energía en las unidades de SI, sin importar si dicha energía está en forma mecánica (trabajo, energía potencial y energía cinética), química, eléctrica o térmica. Se debe notar que aunque $1 \text{ N} \cdot \text{m}$ es equivalente a 1 joule , no es lo mismo que 1 joule en $\text{N} \cdot \text{m}$ y no en joules, puesto que el momento de una fuerza no es una forma de energía.



Fotografía 10.1 Las fuerzas ejercidas por los cilindros hidráulicos para posicionar el elevador de esta máquina se les integra pueden determinarse de manera algebra mediante el método del trabajo virtual (o anterior es posible porque existe una relación simple entre los desplazamientos de los puntos de aplicación las fuerzas que actúan sobre los elementos de elevador).

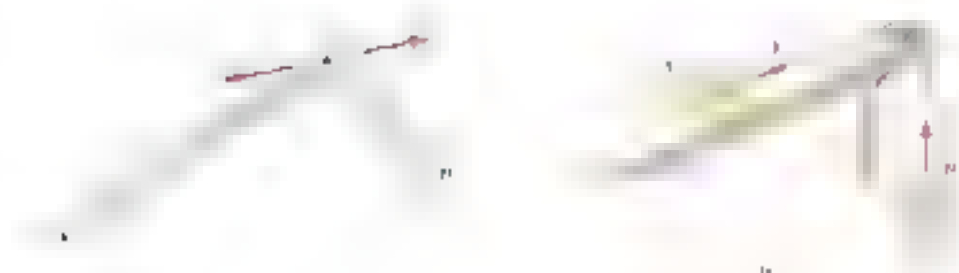


Figure 10.3

En ciertos casos, la suma del trabajo realizado por varias fuerzas es cero. Por ejemplo, considérense dos cuerpos (figura 10.3a) — AC — empujados en C mediante un par de fuerzas iguales (figura 10.3b). Entre las fuerzas que actúan en AC está la fuerza F ejercida en C que realiza

En general, el trabajo de estas fuerzas no son cero, pero esta suma igual a cero. La suma de los trabajos generados por la fuerza F ejercida por A sobre BC y la fuerza F ejercida por B sobre AC es cero, ya que las fuerzas son iguales y opuestas y se ejercen sobre los mismos puntos. Así, cuando se empuja una barra rígida, el trabajo realizado por todas las fuerzas por dentro sobre AB y BC —el trabajo realizado por las fuerzas internas en C — es cero. Se puede obtener una conclusión análoga al considerar una barra como un par de dos bloques conectados mediante una cuerda inextensible (AB y BC en la figura 10.3a). La fuerza de tensión T en A es igual a la fuerza de tensión T en B , ya que la fuerza de tensión T en B es igual a la fuerza de tensión T en A . Debido a que estas dos fuerzas tienen la misma magnitud y los puntos A y B se mueven la misma distancia sin embargo, en un caso el trabajo es positivo y en el otro es negativo, de modo que el trabajo realizado por las fuerzas internas se cancela.

Se puede demostrar que el trabajo total de las fuerzas internas que actúan en un par de cuerpos rígidos es cero. En este caso, consideremos dos partículas A y B que se mueven con velocidades \mathbf{v}_A y \mathbf{v}_B y fuerzas iguales y opuestas que actúan una sobre la otra (figura 10.3c). Como se



Figure 10.4

general, los desplazamientos por dentro de cada uno de los puntos A y B son diferentes, así que los trabajos de desplazamiento de la longitud AB de la cuerda son iguales de una dirección a las partículas de la parte superior a la inferior y viceversa. Sin embargo, con respecto a la otra, por tanto, el cuerpo no se mueve. En este sentido, el trabajo de F es igual a la magnitud y opuesto en signo al trabajo de $-F$ y su suma es cero.

Al calcular el trabajo de las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo rígido es conveniente considerar el trabajo de un par sin considerar por separado el trabajo de cada una de las dos fuerzas que lo

pectivamente direcciones opuestas a los ejes positivos x y y . Si se expresa las coordenadas x_B y y_C en términos del ángulo θ y diferenciando se obtiene

$$\begin{aligned}x_B &= 2l \sin \theta & y_C &= l \cos \theta \\ \delta x_B &= 2l \cos \theta \delta \theta & \delta y_C &= -l \sin \theta \delta \theta\end{aligned}\quad (10.4)$$

Por tanto, el trabajo virtual realizado por las fuerzas Q y P es

$$\begin{aligned}\delta U &= \delta U_Q + \delta U_P = -Q \delta x_B - P \delta y_C \\ &= 2Ql \cos \theta \delta \theta + Pl \sin \theta \delta \theta\end{aligned}$$

Estableciendo $\delta U = 0$ se obtiene

$$2Ql \cos \theta \delta \theta + Pl \sin \theta \delta \theta = 0 \quad (10.5)$$

$$Q = \frac{1}{2}P \tan \theta \quad (10.6)$$

En este problema es clara la superioridad del método de trabajo virtual sobre las técnicas de equilibrio convencional. Al utilizar el método de trabajo virtual se pueden eliminar todas las reacciones desconocidas contrastando el planteo de la ecuación de equilibrio $\sum M_i = 0$ con el método de trabajo virtual. La ventaja de la superioridad del método del trabajo virtual se puede utilizar para resolver problemas relacionados con las máquinas y los sistemas. Si el desplazamiento virtual es solo una constante entonces, entonces, aunque las fuerzas aplicadas son diferentes, la ecuación de trabajo virtual se obtiene que el trabajo virtual es el mismo para las fuerzas aplicadas y las fuerzas de reacción.

Además, el método del trabajo virtual puede utilizarse para resolver problemas de equilibrio de estructuras. En este capítulo, se considerará la estabilidad de las estructuras y se considerarán los desplazamientos virtuales consideraciones. Por ejemplo, considere el armazón ACB mostrado en la figura 10.8a. Si se mantiene fijo el punto A mientras que el punto B se mueve en un desplazamiento virtual arbitrario (Fig. 10.8b), entonces es necesario considerar el trabajo realizado por P y B_1 . Entonces, se puede determinar el valor de la componente de reacción B_1 de la estructura.



Fotografía 10.2 La fuerza de agarre de la palanca, además de los que se presentan en la fotografía puede ser representada como una fuerza de la fuerza aplicada a la manivela estableciendo primero las relaciones geométricas entre los elementos de la abrazadera para después aplicar el método del trabajo virtual.

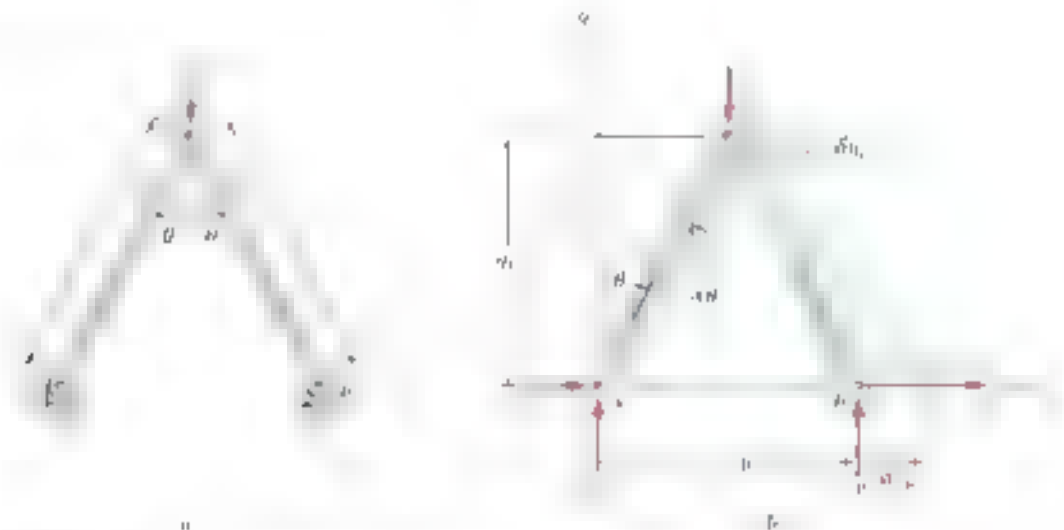


Figura 10.8

entre el bloque B y el plano horizontal, se tiene que $F = \mu N = \mu P/2$. Las otras dos fórmulas (10.4), es posible determinar el trabajo efectuado por las fuerzas Q , P y F realizada durante el desplazamiento virtual mostrado en la figura 10.9, esto es:

$$\begin{aligned}\delta U' &= -Q \delta x_B - P \delta y_C - F \delta x_B \\ &= -2Ql \cos \theta \delta \theta + Pl \sin \theta \delta \theta - \mu Pl \cos \theta \delta \theta\end{aligned}$$

Estableciendo $\delta U' = 0$, se obtiene:

$$2Ql \cos \theta \delta \theta = Pl \sin \theta \delta \theta - \mu Pl \cos \theta \delta \theta \quad (10.7)$$

La condición para el trabajo virtual es igual al trabajo de entre las fuerzas el desplazamiento de la fuerza de fricción. Resolviendo para Q se tiene:

$$Q = P \frac{\sin \theta - \mu \cos \theta}{2 \cos \theta} \quad (10.8)$$

Nota que si $\tan \theta = \mu$, entonces $Q = 0$; esto sucede cuando θ es igual al ángulo de fricción ϕ . Por otra parte, si $\theta < \phi$ entonces $Q < 0$. Por tanto, la prensa se le puede usar solo para valores de θ mayores que el ángulo de fricción.

La *eficiencia mecánica* de una máquina se define como la relación

$$\eta = \frac{\text{trabajo de salida}}{\text{trabajo de entrada}} \quad (10.9)$$

Es importante recordar que la eficiencia mecánica η de la máquina es el trabajo de salida es igual al trabajo de entrada. Pero la eficiencia mecánica de una máquina real siempre será menor que 1.

En el caso de la prensa de banco que se analiza de este libro, se escribe:

$$\eta = \frac{\text{trabajo de salida}}{\text{trabajo de entrada}} = \frac{2Ql \cos \theta \delta \theta}{Pl \sin \theta \delta \theta}$$

Al sustituir el valor de Q de la ecuación (10.8) se obtiene:

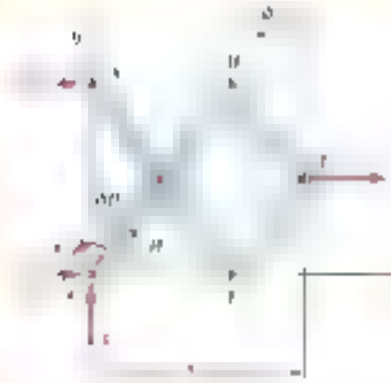
$$\eta = \frac{P(\tan \theta - \mu) \cos \theta \delta \theta}{Pl \sin \theta \delta \theta} = 1 - \mu \cot \theta \quad (10.10)$$

Se puede observar que al disminuir de las fuerzas de fricción $\mu = 0$ y $\eta = 1$. Es decir, para valores de μ arbitrarios, la eficiencia η es cero cuando $\mu \cot \theta = 1$, esto es, cuando $\tan \theta = \mu$, o $\theta = \tan^{-1} \mu$. Por lo tanto, esto se comprueba que la prensa de banco puede usarse sólo para valores de θ mayores que el ángulo de fricción ϕ .



PROBLEMA RESUELTO 10.1

Calcular la fuerza horizontal P que debe aplicarse en el punto C para que el sistema se encuentre en equilibrio en la posición mostrada en la figura.



SOLUCIÓN

Al seleccionar un sistema de ejes coordenados arbitrarios en P se tiene:

$$x_D = 3l \cos \theta \quad \delta x_D = -3l \sin \theta \delta \theta$$

Principio del trabajo virtual. Como las reacciones A_y , B_x y B_y no realizan trabajo virtual, el trabajo virtual realizado por P y M debe ser cero. Note que tanto P como M actúan, respectivamente, en la dirección positiva de x y θ , por lo que se puede escribir:

$$\delta U = 0 \quad \begin{aligned} +M \delta \theta + P \delta x_D &= 0 \\ +M \delta \theta + P(-3l \sin \theta \delta \theta) &= 0 \end{aligned}$$



PROBLEMA RESUELTO 10.2

Para el mecanismo mostrado en la figura, determinar la expresión para P en función de θ para que el sistema se encuentre en equilibrio en la posición mostrada en la figura. El resorte tiene una constante elástica k y una longitud natural h . Este valor es el peso del mecanismo.

SOLUCIÓN

Con el sistema de coordenadas mostrado en la figura se tiene:

$$\frac{\partial y_C}{\partial \theta} = \frac{\partial (2l \sin \theta)}{\partial \theta} = 2l \cos \theta \quad \frac{\partial y_D}{\partial \theta} = \frac{\partial (2l \cos \theta)}{\partial \theta} = -2l \sin \theta$$

La elongación del resorte es:

$$y_D - h = 2l \cos \theta - h$$

La magnitud de la fuerza ejercida en C por el resorte es:

$$F = kx = k(2l \cos \theta - h) \quad (1)$$

Principio del trabajo virtual. Como las reacciones A_y , A_x y C no realizan trabajo virtual, el trabajo virtual realizado por P y F debe ser cero:

$$\delta U = 0 \quad \begin{aligned} P \delta y_C - F \delta y_D &= 0 \\ P(2l \cos \theta \delta \theta) - k(2l \cos \theta - h)(2l \sin \theta \delta \theta) &= 0 \end{aligned}$$

$$\cos \theta = \frac{P + 2kh}{4k l} \quad \leftarrow$$

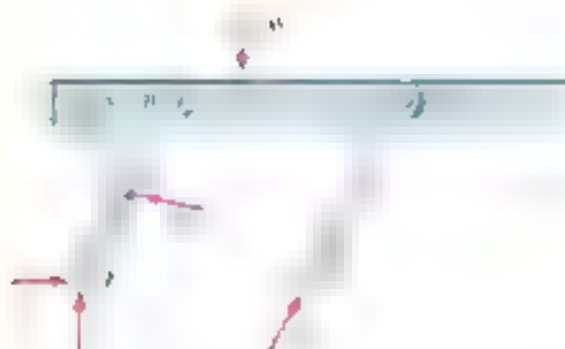
Si se sustituye esta expresión en (1), se tiene:

$$F = \frac{1}{2} P \quad \leftarrow$$



PROBLEMA RESUELTO 10.3

Una mesa de elevación hidráulica se utiliza para levantar una carga. La mesa consta de la plataforma horizontal y del cilindro vertical, ambos de longitud $2a$, y los dos cilindros de los radios a y b respectivamente iguales (en la figura se muestran sólo un mecanismo y un cilindro hidráulico). Los elementos AB y CD tienen $2a$ de longitud, cada uno y el elemento AD se une a a metros de la izquierda del elemento AB . Se la mesa está a su altura h y la fuerza W que actúa en el centro de su peso es soportada por el sistema mostrado en la figura. Determine la fuerza ejercida por cada cilindro al levantar la carga por un valor de $\theta = 60^\circ$, $a = 0.70$ m y $L = 3.20$ m. Este mecanismo se estudió previamente en el problema resuelto 6.7.



SOLUCIÓN

La plataforma está en equilibrio estático. La plataforma y el cilindro vertical están en el que se ejerce una fuerza de entrada F_{ADM} por medio del cilindro y una fuerza de salida igual y opuesta a $\frac{1}{2}W$. El elemento AD está en equilibrio. La fuerza F_{ADM} actúa en el punto A y la fuerza F_{CD} actúa en el punto C . La fuerza W actúa en el punto D . La longitud L de la barra AD es constante. Se tiene:

$$\delta U = 0 \quad -F_{ADM} \delta y + F_{CD} \delta a = 0 \quad (1)$$

El desplazamiento vertical δy de la plataforma se puede expresar en términos de $\delta \theta$. El desplazamiento horizontal δa de la barra AD de la siguiente forma,

$$y = (L^2 - a^2)^{1/2} \quad \delta y = -\frac{a}{y} \delta a$$

Para expresar δa de una forma más útil en términos de $\delta \theta$ se aplica primero la ley de los cosenos,

$$L^2 = a^2 + L^2 - 2aL \cos \theta$$

Diferenciando

$$2a \delta a = -2aL \sin \theta \delta \theta$$

Substituyendo los valores de δy y δa en (1) se escribe

$$W(2a \cos \theta \delta \theta) + F_{ADM} \frac{aL \sin \theta}{y} \delta \theta = 0$$

Con los datos numéricos dados se tiene

$$W = mg = (1000 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 9.81 \times 10^3 \text{ N} = 9.81 \text{ kN}$$

$$= a^2 + L^2 - 2aL \cos \theta$$

$$= (0.70)^2 + (3.20)^2 - 2(0.70)(3.20) \cos 60^\circ = 8.49$$

$$F_{ADM} = W \frac{a}{L} \cos \theta = (9.81 \text{ kN}) \frac{0.70 \text{ m}}{3.20 \text{ m}} \cos 60^\circ$$

$$F_{ADM} = 1.07 \text{ kN}$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

El trabajo realizado por una fuerza \vec{F} al mover un objeto de \vec{r}_1 a \vec{r}_2 se define como el producto escalar entre la fuerza y el desplazamiento:

El trabajo realizado por una fuerza \vec{F} al mover un objeto de \vec{r}_1 a \vec{r}_2 se define como el producto escalar entre la fuerza y el desplazamiento:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (10.2)$$

El trabajo realizado por una fuerza \vec{F} al mover un objeto de \vec{r}_1 a \vec{r}_2 se define como el producto escalar entre la fuerza y el desplazamiento:

El trabajo realizado por una fuerza \vec{F} al mover un objeto de \vec{r}_1 a \vec{r}_2 se define como el producto escalar entre la fuerza y el desplazamiento:

El trabajo realizado por una fuerza \vec{F} al mover un objeto de \vec{r}_1 a \vec{r}_2 se define como el producto escalar entre la fuerza y el desplazamiento:

El trabajo realizado por una fuerza \vec{F} al mover un objeto de \vec{r}_1 a \vec{r}_2 se define como el producto escalar entre la fuerza y el desplazamiento:

El trabajo realizado por una fuerza \vec{F} al mover un objeto de \vec{r}_1 a \vec{r}_2 se define como el producto escalar entre la fuerza y el desplazamiento:

El trabajo realizado por una fuerza \vec{F} al mover un objeto de \vec{r}_1 a \vec{r}_2 se define como el producto escalar entre la fuerza y el desplazamiento:

- Las reacciones en los apoyos
- Las fuerzas internas en las uniones
- Las fuerzas ejercidas por cables y cuerdas inextensibles

Ninguna de estas fuerzas debe aparecer en el momento de calcular el trabajo virtual.

Se debe recordar que el método del trabajo virtual solo es efectivo en sistemas que están en equilibrio. Si el sistema no está en equilibrio, el método no puede aplicarse.

Se debe recordar que el método del trabajo virtual solo es efectivo en sistemas que están en equilibrio. Si el sistema no está en equilibrio, el método no puede aplicarse.

Problemas

10.1 Determine la fuerza vertical P que debe aplicarse en C para mantener el equilibrio del mecanismo mostrado en la figura.

10.2 Determine la fuerza horizontal P que debe aplicarse en A para mantener el equilibrio del mecanismo mostrado en la figura.

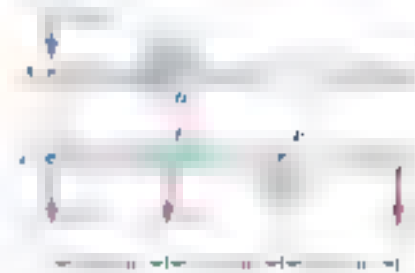


Figura P10.1 y P10.3

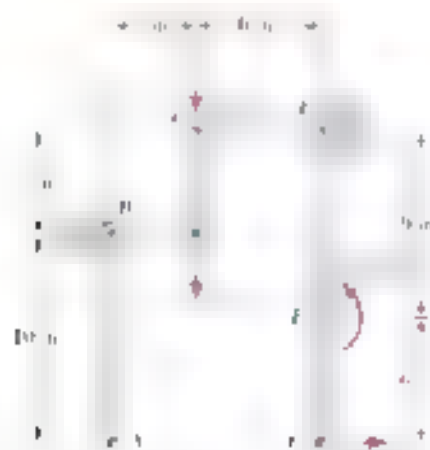


Figura P10.2 y P10.4

10.3 y 10.4 Determine el par M que debe aplicarse en el elemento ABC para mantener el equilibrio del mecanismo mostrado en las figuras.

10.5 Si se sabe que la fuerza de fricción máxima ejercida por la botella mostrada en la figura sobre el concho es de 60 lb, determine a) la fuerza P que se debe aplicar al concho para mantener la botella en la posición mostrada, b) la fuerza mínima que se debe aplicar al concho para mantener la botella en la posición mostrada.

10.6 El mecanismo de las figuras mostradas en la figura se sostiene mediante un soporte de perno en H y por medio de un collarín en B el cual ejerce libremente sobre el collarín la fuerza mínima necesaria P para mantener el equilibrio del mecanismo.



Figura P10.6



Figura P10.5



Figura P10.7 y P10.8

10.7 Un resorte de constante igual a 15 kN/m se conecta a los puntos C y F del mecanismo mostrado en la figura. Si se desprecia el peso del resorte y del mecanismo, determine la fuerza en el resorte y el desplazamiento vertical del punto E cuando una fuerza vertical de 20 N se aplica en el punto B y H en los puntos C y F .

10.8 Un resorte de constante igual a 15 kN/m se conecta a los puntos C y F del mecanismo mostrado en la figura. Si se desprecia el peso del resorte y del mecanismo, determine la fuerza en el resorte y el desplazamiento vertical del punto E cuando una fuerza vertical de 20 N se aplica en el punto B y H en los puntos C y F .

10.9 Si se sabe que la línea de acción de la fuerza Q pasa por el punto C del mecanismo mostrado en la figura, determine una expresión para la magnitud de la fuerza Q necesaria para mantener el equilibrio.

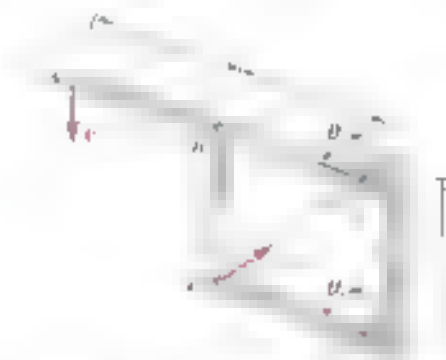


Figura P10.9

10.10 Repetir el problema 10.9, y ahora suponga que la fuerza P aplicada en el punto A es horizontal y perpendicular a la línea de acción de Q .

10.11 El mecanismo mostrado en la figura está sujetado a la acción de la fuerza P . La fuerza Q es vertical y la fuerza R es horizontal. Determine la magnitud de la fuerza Q requerida para mantener el equilibrio.



Figura P10.11

10.12 y 10.13 La barra delgada AB está unida a un collarín A y descansa sobre un resorte en la posición mostrada. Si se desprecia el peso de la barra y el efecto de la fricción, deduzca una expresión para determinar la magnitud de la fuerza Q requerida para mantener el equilibrio de la barra.



Figura P10.12



Figura P10.13

10.14 Obtenga una expresión para determinar la magnitud de la fuerza Q en el cable para mantener el mecanismo en equilibrio en la figura.

10.15 Una barra uniforme AB de longitud L y peso W está suspendida de los puntos A y B con igual longitud. Determine una expresión para determinar la magnitud de la fuerza M respectivo para mantener el equilibrio en la posición mostrada.

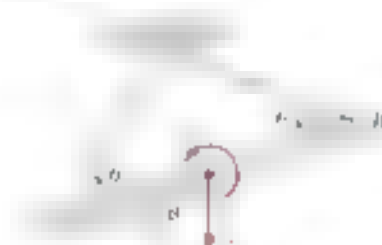


Figura P10.15



Figura P10.14

10.16 y 10.17 Obtenga una expresión para determinar la magnitud del par M respectivo para mantener el equilibrio del mecanismo mostrado en las figuras.

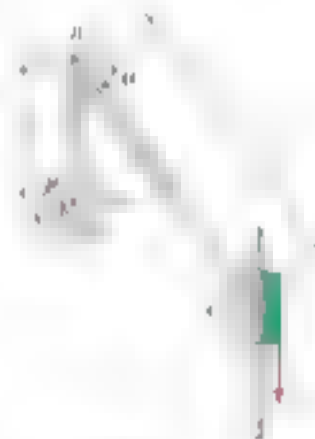


Figura P10.16

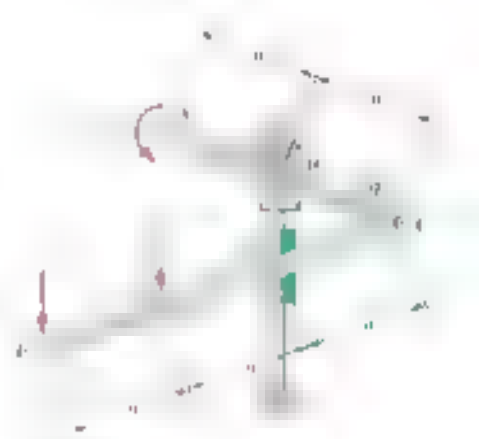


Figura P10.17

10.18 El perno en C está unido al elemento BCD y puede deslizarse a lo largo de la ranura de la placa fija mostrada en la figura. Sin tomar en cuenta el efecto de la fricción, obtenga una expresión para determinar la magnitud del par M respectivo para mantener el equilibrio en la posición P en la que se muestra la configuración. La barra AB es uniforme de longitud L y peso W . La distancia BC es igual a $L/2$. La distancia CD es igual a $L/2$. La distancia AD es igual a L . La distancia AC es igual a L .



Figura P10.18

10.19 Una fuerza P de 4 kN se aplica sobre el pestillo del sistema mecánico mostrado en la figura. Si se sabe que $AB = 50$ mm y que $BC = 200$ mm, determine el valor de M necesario para mantener el sistema en equilibrio cuando $\theta = 40^\circ$ y $\phi = 10^\circ$.



Figura P10.19 y P10.20



Figura P10.21 y P10.22

10.20 Un par M de 100 N \cdot m de magnitud se aplica sobre la manivela del sistema mecánico mostrado en la figura. Si se sabe que $AB = 50$ mm y que $BC = 200$ mm, determine la fuerza P requerida para mantener el sistema en equilibrio cuando $\theta = 40^\circ$ y $\phi = 10^\circ$.

10.21 Para el mecanismo mostrado en la figura, determine el par M requerido para mantener el equilibrio cuando $l = 1.5$ ft, $Q = 40$ lb, y $\theta = 65^\circ$.

10.22 Para el mecanismo mostrado en la figura, determine la fuerza Q requerida para mantener el equilibrio cuando $l = 1.5$ m, $W = 600$ lb \cdot s, y $\theta = 70^\circ$.

10.23 Determine el valor de θ que corresponde a la posición de equilibrio del mecanismo del problema 10.2 cuando $P = 5$ lb y $Q = 1$ lb.

10.24 Determine el valor de θ que corresponde a la posición de equilibrio del mecanismo del problema 10.2 cuando $P = 80$ N y $Q = 600$ N.

10.25 La barra AB está unida en A a un bloque que puede deslizarse libremente sobre una superficie que se muestra en la figura. Se desprecia el efecto de la fricción y los pesos de las barras. Determine el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio.

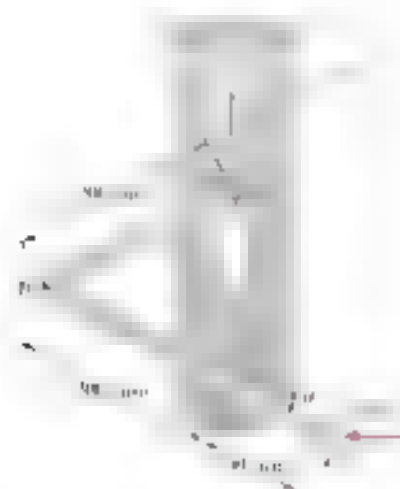


Figura P10.25

10.26 Retorne el problema 10.25, y ahora suponga que la fuerza de peso N se encuentra en un ángulo de 21° con la horizontal de las agujas del reloj aplicada en D .

10.27 Determine el valor de θ que corresponde a la posición de equilibrio de la barra del problema 10.12 cuando $l = 30$ in., $a = 5$ in., $P = 25$ lb y $Q = 40$ lb.

10.28 Determine los valores de θ que corresponden a la posición de equilibrio de la barra del problema 10.13 cuando $l = 600$ mm, $a = 100$ mm, $P = 40$ N y $Q = 80$ N.

10.29 En la figura se muestran dos barras AC y CE que se conectan entre sí mediante un perno en C y por medio del resorte AE . La constante del resorte es k y éste se encuentra sin estirar cuando $\theta = 30^\circ$. Para la carga mostrada, deduzca una ecuación en función de P , θ , l y k que se cumple cuando el sistema esté en equilibrio.

10.30 En la figura se muestran dos barras AC y CE que se conectan entre sí mediante un perno en C y por medio del resorte AE . La constante del resorte es de 5 lb/in. y se encuentra sin estirar cuando $\theta = 40^\circ$. Se sabe que $l = 10$ in., y sin tomar en cuenta el peso de las barras, determine el valor de θ que corresponde a la posición de equilibrio cuando $P = 10$ lb.

10.31 Retorne el problema 10.30 y ahora suponga que la fuerza P se encuentra en C y apunta a lo largo de la barra AC .

10.32 La barra ABC está unida a los bloques A y B que pueden moverse libremente por las guías mostradas en la figura. La constante del resorte unido en A es $k = 3 \text{ kN/m}$ y el resorte está sin estirar cuando la barra se encuentra en la posición vertical. Para la carga mostrada deduzca una ecuación en función de θ que corresponde a la posición de equilibrio.



Figura P10.29 y P10.30

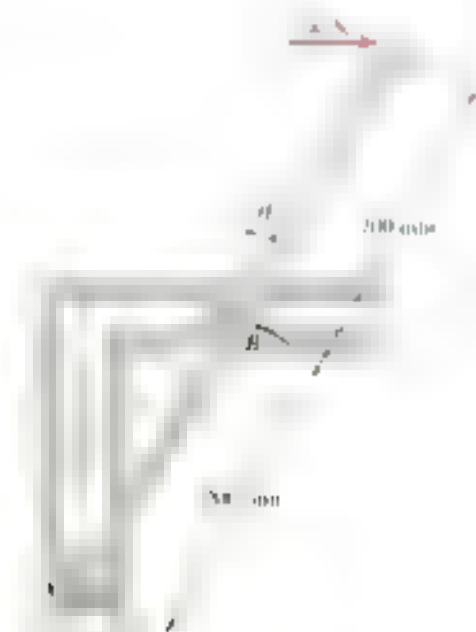


Figura P10.32

10.33 Una carga vertical W con 600 N de magnitud se aplica en el punto B del mecanismo mostrado en la figura. El resorte en CD es constante de $k = 2.5 \text{ kN/m}$, se encuentra sin estirar cuando AB y BC están en posición horizontal. Sin tomar en cuenta el peso del mecanismo, obtenga una expresión en función de θ , W y k que se cumpla cuando el mecanismo está en equilibrio.

10.34 Una carga vertical W se aplica en el punto B del mecanismo mostrado en la figura. Cuando AB y BC están en posición horizontal el resorte en CD es constante de k y se encuentra sin estirar. Sin tomar en cuenta el peso del mecanismo, obtenga una expresión en función de θ , W y k que se cumpla cuando el mecanismo está en equilibrio.



Figura P10.33 y P10.34

10.35 y 10.36 Si la constante del resorte CD mostrado en la figura es k y éste se encuentra sin estirar cuando la fuerza ABC está en posición horizontal, determine el valor de θ que corresponde a la posición de equilibrio para los datos indicados.

10.35 $P = 300 \text{ N}$, $l = 400 \text{ mm}$, $k = 5 \text{ kN/m}$

10.36 $P = 75 \text{ lb}$, $l = 15 \text{ in}$, $k = 20 \text{ lb/in}$

10.37 Una carga W con magnitud de 72 lb se aplica en el punto C del mecanismo mostrado en la figura. Sin tomar en cuenta el peso del mecanismo, obtenga el valor de θ que corresponde a la posición de equilibrio del resorte es $k = 20 \text{ lb/in}$, y éste se encuentra sin estirar cuando $\theta = 0$.

10.38 Una fuerza P con magnitud de 240 N se aplica al extremo E del cable CDE , el cual pasa bajo la polea D y se encuentra anclado al mecanismo en A . Sin tomar en cuenta el peso del mecanismo, obtenga el valor de θ que corresponde a la posición de equilibrio. La constante del resorte es $k = 4 \text{ kN/m}$ y el resorte es sin estirar cuando $\theta = 0$.



Figura P10.38

Figura P10.37

10.39 La palanca AB mostrada en la figura se une al eje horizontal BC por una articulación en B y se sujeta sobre A por un eje C . La constante de torsión del resorte del eje BC es K ; esto es, se requiere de un par de magnitud K para rotar 1 radian al extremo B del eje. Si se sabe que 400 N se sujeta sobre la palanca en el punto A en la posición mostrada, determine el ángulo θ cuando la palanca se equilibra. Si $K = 200 \text{ N} \cdot \text{m/rad}$, $a = 300 \text{ mm}$ y $b = 200 \text{ mm}$.



Figura P10.39

10.40 Retorne el problema 10.39, y ahora suponga que $P = 300 \text{ N}$, $a = 250 \text{ mm}$ y $K = 125 \text{ N} \cdot \text{m/rad}$. Obtenga respuestas en cada uno de los intervalos siguientes: $0^\circ < \theta < 30^\circ$, $27^\circ < \theta < 39^\circ$ y $36^\circ < \theta < 45^\circ$.

10.41 La posición del pesante AB se controla en la figura mediante los cables BD y CE . Para la carga mostrada, determine el ángulo θ para el cual el cable sobre el pasador B cuando $\theta = 65^\circ$.



Figura P10.41 y P10.42

10.42 La posición del pesante AB se controla mediante un cilindro hidráulico BD . Para la carga mostrada, π exprese la fuerza ejercida por el cilindro hidráulico sobre el pasador B en función de la longitud BD . Determine la fuerza máxima sobre el cilindro BD a fuerza máxima que el cilindro puede ejercer sobre el pasador B es de 2.5 kips .

10.43 La posición del elemento ABC se controla por medio del cilindro hidráulico CD , como se muestra en la figura. Para la carga mostrada, determine la fuerza ejercida por el cilindro hidráulico sobre el pasador C cuando $\theta = 45^\circ$.



Figura P10.43 y P10.44

10.44 La posición del elemento ABC se controla por medio del cilindro hidráulico CD , como se muestra en la figura. Si se sabe que el cilindro hidráulico ejerce una fuerza de 100 N sobre el pasador C , determine el valor del ángulo θ .

10.50 Si se representa con μ el coeficiente de fricción estática entre el collarín C y la barra vertical, y con θ el ángulo que representa la inclinación de la barra, determine la magnitud del par M para que el sistema se encuentre en equilibrio en la posición mostrada en la figura cuando $\theta = 45^\circ$, $\mu = 0.28$ y $P = 100$ N.

10.51 Si se sabe que el coeficiente de fricción estática entre el collarín C y la barra vertical es de 0.40, determine las magnitudes máxima y mínima del par M para que el sistema se encuentre en equilibrio en la posición mostrada en la figura cuando $\theta = 45^\circ$, $\mu = 0.28$ y $P = 100$ N.

10.52 Obtenga una expresión para determinar la eficiencia mecánica del gato meridiano ilustrado en la sección 4.6. Demuestre que si el gato quiere ser antihispéante, la eficiencia mecánica no puede ser mayor de 50%.

10.53 Con el método de los trabajos virtuales, determine la reacción en el punto B de la viga mostrada en la figura.

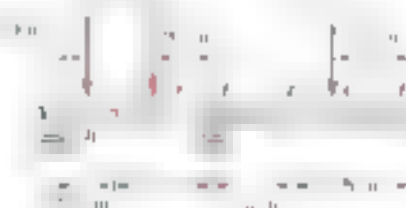


Figura P10.53 y P10.54

10.54 Con el método del trabajo virtual, determine por separado la fuerza y el par que representan la reacción en el punto B de la viga mostrada en la figura.

10.55 Con referencia al problema 10.43, utilice el valor encontrado para θ en el problema 10.43 para determinar el ángulo θ en la longitud de CD requerido para elevar 15 mm la carga de 10 kN.

10.56 Con referencia al problema 10.45, utilice el valor encontrado para θ en el problema 10.45 para determinar el ángulo θ en la longitud de BD requerido para elevar 25 mm la carga de 10 kN.

10.57 Para la armadura mostrada en la figura, determine el movimiento horizontal del nodo D si la longitud de cada elemento BC o CD es de 4.5 m. (Sugerencia: Aplique una carga vertical en el nodo D y utilice los métodos del trabajo virtual para determinar la fuerza ejercida por el elemento BD sobre los nodos B y D . Después utilice el método del trabajo virtual para determinar el desplazamiento horizontal del nodo D en la longitud de los elementos BD . Este método debe usarse solo cuando sea posible aplicar la longitud de los elementos.)

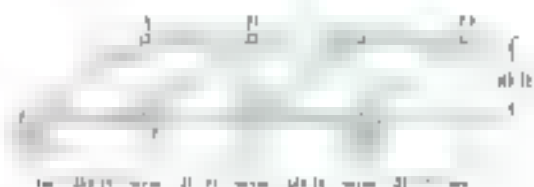


Figura P10.57 y P10.58

10.58 Para la armadura mostrada en la figura, determine el movimiento horizontal del nodo D si la longitud del elemento BD es de 4.5 m. (Vea la sugerencia para el problema 10.57.)



Figura P10.50 y P10.51

10.6. TRABAJO DE UNA FUERZA DURANTE UN DESPLAZAMIENTO FINITO

Consideremos una fuerza \mathbf{F} que actúa sobre una partícula A (Fig. 10.10). \mathbf{F} corre a lo largo de una trayectoria s que coincide con el elemento $d\mathbf{r}$ de la partícula A de la Fig. 10.2 como

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (10.1)$$

El trabajo de \mathbf{F} correspondiente a un desplazamiento finito de la partícula de \mathbf{r}_1 a \mathbf{r}_2 (o sea, θ_1 a θ_2) se le denota en U y se obtiene integrando la ecuación (10.1) a lo largo de la trayectoria que sigue la partícula A :

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (10.2)$$

Con la expresión alternativa

$$dU = F ds \cos \alpha \quad (10.1')$$

dada en la sección 10.2 para el trabajo elemental dU también es posible expresar el trabajo $U_{1 \rightarrow 2}$ como

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{s_1}^{s_2} (F \cos \alpha) ds \quad (10.1'')$$



Figura 10.10

donde la variable de integración es s , la distancia recorrida por la partícula A a lo largo de su trayectoria. En otro trabajo $U_{1 \rightarrow 2}$ se puede expresar en términos de la energía que se obtiene al girar U sobre un eje O (Fig. 10.11). En el caso de una magnitud de la fuerza F que actúa en dirección del movimiento es constante, entonces de la ecuación (10.1) se deduce que $U_{1 \rightarrow 2} = F(s_2 - s_1)$.

Si se recuerda la sección 10.2, el trabajo de un par de momento M que se genera durante una rotación infinitesimal $d\theta$ de un cuerpo rígido es

$$dU = M d\theta \quad (10.2')$$

entonces el trabajo de un par durante una rotación finita de un cuerpo puede expresarse como

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta \quad (10.2'')$$

En el caso de un M que actúa constante en la ecuación (10.2) se obtiene

$$U_{1 \rightarrow 2} = M(\theta_2 - \theta_1)$$

Trabajo de un peso En la sección 10.2 se estableció que el trabajo de un peso W de un cuerpo durante un desplazamiento infinitesimal dy es igual al producto de W y el desplazamiento vertical del centro de gravedad del cuerpo. Si el cuerpo se desplace una altura entonces el trabajo de W realizado durante el desplazamiento dy (figura 10.11) se obtiene escribiendo

$$dU = -W dy$$

Integrando desde A_1 hasta A_2 , se tiene

$$U = \int_{y_1}^{y_2} -W dy = -Wy_2 - (-Wy_1) \quad (10.13)$$

$$U = -W(y_2 - y_1) = -W \Delta y \quad (10.13')$$

donde Δy representa el desplazamiento vertical de A_1 hasta A_2 . Por tanto el trabajo de peso W es siempre el producto de W y el desplazamiento vertical del centro de gravedad del cuerpo. Note que el trabajo es positivo cuando $\Delta y < 0$, es decir, cuando el cuerpo se mueve hacia abajo.

Trabajo de la fuerza ejercida por un resorte Considere un cuerpo A conectado al punto fijo B por medio de un resorte, se sabe que el resorte ejerce sobre el cuerpo una fuerza F en la dirección AB (figura 10.12). Las unidades apropiadas para la constante elástica de la fuerza F por el resorte sobre el cuerpo A es la constante proporcional a la deflexión x del resorte medida a partir de su posición A_0 (veremos

$$F = kx \quad (10.14)$$

donde k es la *constante del resorte* expresada en lb/in. o en N/m. Las unidades del SI y cgs son el lb/in. y el N/m, las unidades de masa son el lb y el kg. En ambos casos F (trabajo de la fuerza F por el resorte durante un desplazamiento finito del cuerpo desde A ($x = x_1$) hasta B ($x = x_2$)) se obtiene escribiendo

$$dU = F dx = kx dx$$

$$U = \int_{x_1}^{x_2} kx dx = \frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2} \quad (10.15)$$

Se debe tener cuidado de expresar a k y x en unidades consistentes. Por ejemplo, si se expresan las unidades lb y pulgadas, entonces k debe expresarse en lb/in. y x en pulgadas. En el primer caso, el trabajo se obtiene en ft-lb y en el segundo caso en in-lb. A menos que se especifique la fuerza F ejercida por el resorte sobre el cuerpo es positivo cuando $x_2 < x_1$, esto es, cuando el resorte está regresando a su posición sin tensionar.

Como la ecuación (10.14) representa la ecuación de una línea recta que pasa por el origen con una pendiente k , el trabajo U_{AB} de F durante el desplazamiento de A hasta B se obtiene obteniendo el área debajo de la curva de F que se muestra en la figura 10.12. Esto puede hacerse obteniendo los valores de $F_1 = F_1(x_1)$ y $F_2 = F_2(x_2)$ en la base Δx del triángulo, con x_1 y x_2 en pulgadas. $F_1 > F_2$. Como el trabajo de la fuerza F ejercida por el resorte es positivo para un valor negativo de Δx entonces se puede escribir

$$U_{AB} = F_1 \Delta x \quad (10.16)$$

La fórmula (10.16) es usualmente más útil que la fórmula (10.15), debido a que esta se reduce a las ecuaciones de similitud de los triángulos involucrados.

Fig. 10.11 Trabajo de una fuerza durante un desplazamiento.



Figura 10.11

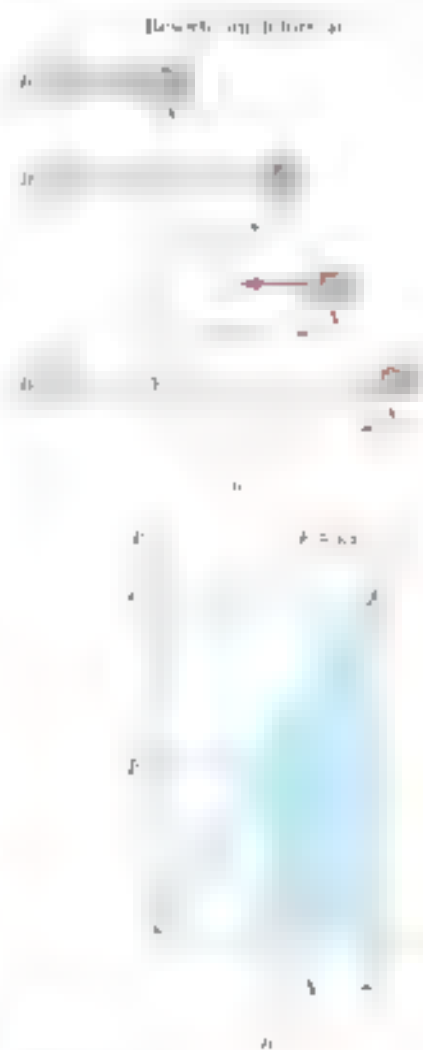


Figura 10.12

10.8. ENERGÍA POTENCIAL Y EQUILIBRIO

La posición de equilibrio del sistema se alcanza cuando la forma que adquiere cuando se conoce la energía potencial del sistema. En el caso de un desplazamiento virtual δU se transforma en $\delta V = -\delta U$. Además si la posición del sistema se describe por una sola variable q en la que θ es una variable escalar por $\delta V = -\delta U$ $dU = -\delta U$ como δU debe ser diferente a cero la condición es $\frac{dV}{dq} = 0$ para que el sistema se conserve en equilibrio ahora se transforma en

$$\frac{dV}{d\theta} = 0$$

Por otro lado podemos decir la energía potencial puede ser la energía cinética estable o inestable o en esta no equilibrio en la medida de su energía potencial total $\delta U = 0$. Si la posición del sistema q es una sola variable q en la que θ es una variable escalar por $\delta V = -\delta U$ $dU = -\delta U$ como δU debe ser diferente a cero la condición es $\frac{dV}{dq} = 0$ para que el sistema se conserve en equilibrio ahora se transforma en

Por otro lado podemos decir la energía potencial puede ser la energía cinética estable o inestable o en esta no equilibrio en la medida de su energía potencial total $\delta U = 0$. Si la posición del sistema q es una sola variable q en la que θ es una variable escalar por $\delta V = -\delta U$ $dU = -\delta U$ como δU debe ser diferente a cero la condición es $\frac{dV}{dq} = 0$ para que el sistema se conserve en equilibrio ahora se transforma en

Por otro lado podemos decir la energía potencial puede ser la energía cinética estable o inestable o en esta no equilibrio en la medida de su energía potencial total $\delta U = 0$. Si la posición del sistema q es una sola variable q en la que θ es una variable escalar por $\delta V = -\delta U$ $dU = -\delta U$ como δU debe ser diferente a cero la condición es $\frac{dV}{dq} = 0$ para que el sistema se conserve en equilibrio ahora se transforma en

$$V_e = \frac{1}{2}kx_0^2 \quad V_g = W y_0$$

Expresando las coordenadas x_0 y y_0 en función de θ tenemos

$$\begin{aligned} x_0 &= 2l \sin \theta & y_0 &= l \cos \theta \\ V_e &= \frac{1}{2}k(2l \sin \theta)^2 & V_g &= W(l \cos \theta) \\ V &= V_e + V_g = 2kl^2 \sin^2 \theta + Wl \cos \theta \end{aligned} \quad (10.22)$$

La posición de equilibrio de sistema se obtiene igualando a cero la derivada de la energía potencial V . Por tanto, se escribe

$$\frac{dV}{d\theta} = 4kl^2 \sin \theta \cos \theta - Wl \sin \theta = 0$$

o bien, factorizando $l \sin \theta$

$$\frac{dV}{d\theta} = l \sin \theta (4kl \cos \theta - W) = 0$$

Así hay dos posiciones de equilibrio que corresponden respectivamente a los valores de $\theta = 0$ y $\theta = \cos^{-1} \frac{W}{4kl}$

La segunda posición no existe si $W > 4kl$

www.geocienciasvirtuales.blogspot.com.co



Figura 10.13

10.9 ESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO

Consideremos las tres barras homogéneas de longitud l y peso W mostradas en la figura 10.14. Asumiremos que las tres barras están en equilibrio. Existe una diferencia importante entre estos tres casos. Suponga que se perturba ligeramente la posición de cada una de estas barras y después se les deja libres: la barra *a* regresará a su posición original, la barra *b* se moverá lejos de su posición original y la barra *c* permanecerá en su nueva posición. En el caso *a* se dice que el equilibrio de la barra es *estable*, en el caso *b* que es *inestable*, mientras que en el caso *c* es *neutra*.



a. Equilibrio estable



b. Equilibrio inestable



c. Equilibrio neutro

Figura 10.14

Recordando de la sección 10.7 que la energía potencial V_2 con respecto a la gravedad es Wg es función de la altura del punto de aplicación de W medido a partir de una nivel arbitrario de referencia, se puede observar que la energía potencial de la barra en el estado 10.14a es máxima en la posición de equilibrio, es mínima en el estado 10.14b y es constante en la posición de equilibrio en el estado 10.14c. Por tanto, la barra de la figura 10.14a regresa a su posición original si se perturba, la barra de la figura 10.14b se moverá lejos de su posición original si se perturba y la barra de la figura 10.14c permanecerá en su nueva posición si se perturba. Por tanto, el equilibrio es *estable* en el caso 10.14a, es *inestable* en el caso 10.14b y es *neutro* en el caso 10.14c.

Como el resultado anterior es más general, se le puede ver de la siguiente manera: primero, se puede observar que una fuerza siempre tiende a realizar trabajo positivo y por tanto, reduce la energía potencial del sistema al cual se aplica. Entonces, cuando un sistema es perturbado, se le desvía de su posición de equilibrio. Si la fuerza tiende a restaurarlo a su posición original si V es mínima (figura 10.15a) o tiende a moverlo lejos de dicha posición si V es máxima (figura 10.15b). Pero si V es constante (figura 10.15c), entonces las fuerzas involucradas no hacen ni hacen ni deshacen una forma posible.

Por tanto, es válido decir que una fuerza es mínima si la máxima descendencia que se puede seguir, es hacia abajo, es positiva y negativa en su suma, se puede decir que las condiciones de equilibrio

en un sistema con un grado de libertad, es decir la posición del sistema

te, la potencia de un elemento dW por una sola variable independiente θ son las siguientes:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d\theta} &= 0 & \frac{d^2V}{d\theta^2} &> 0 & \text{Equilibrio estable} \\ \frac{dV}{d\theta} &= 0 & \frac{d^2V}{d\theta^2} &< 0 & \text{Equilibrio inestable} \end{aligned} \quad (10.23)$$

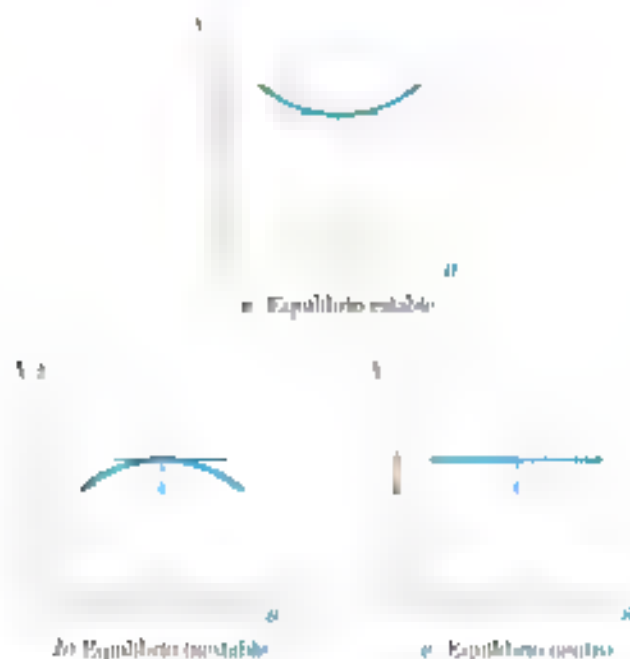


Figura 10.15

Si la primera derivada de V con respecto a θ es cero, V tiene un extremo local. Si se avanza las derivadas de orden superior para determinar si es un equilibrio estable, inestable o neutro. Por ejemplo, es necesario que todas las derivadas sean cero para que exista un equilibrio neutro. V es un **Equilibrio estable** si la primera derivada que se toma en un punto donde el primer es de orden par y positiva. En todos los demás casos, el equilibrio es inestable.

Si el sistema en estudio tiene *varios grados de libertad*, entonces la energía potencial V depende de diversas variables, por lo que es necesario encontrar la condición de equilibrio para este tipo de sistemas y determinar si V es mínimo. Se puede encontrar que, en un punto θ_1, θ_2 donde el sistema es estable y θ_1, θ_2 a un punto de equilibrio, entonces $V(\theta_1, \theta_2)$ es mínimo siempre y cuando se cumplan de manera simultánea las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \theta_1} &= 0 & \frac{\partial V}{\partial \theta_2} &= 0 \\ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_2^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \right)^2 &< 0 \end{aligned} \quad (10.24)$$



PROBLEMA RESUELTO 10.4

Un sistema de barras está sostenido de la siguiente manera. El extremo derecho de una barra horizontal de longitud l se sujeta a un desplazamiento horizontal $\theta = 1^\circ$. Determinar la posición y posiciónes de equilibrio del sistema en estado estable y la clasificación de cada uno de ellos.

SOLUCIÓN

Energía potencial. Representamos el potencial elástico de la barra y la energía potencial de la barra en función de la posición θ . La energía potencial V es la suma de la energía potencial elástica V_e y la energía potencial gravitacional V_g .

$$V = V_e + V_g = \frac{1}{2} kx^2 + mgy$$

Los puntos B y C radicales se tienen:

$$x = l\theta \quad y = l \cos \theta$$

La energía potencial V en las expresiones de x y y se convierte en:

$$V = \frac{1}{2} k(l\theta)^2 + mgl \cos \theta$$

Para encontrar los puntos de equilibrio estable $dV/d\theta = 0$ se usa que:

$$\frac{dV}{d\theta} = k l^2 \theta - mgl \sin \theta = 0$$

$$\sin \theta = \frac{k l^2 \theta}{mgl}$$

Sustituyendo $l = 0.08 \text{ m}$, $k = 4 \text{ kN/m}$ y $m = 10 \text{ kg}$, se obtiene:

$$\sin \theta = \frac{4 \text{ kN/m}(0.08 \text{ m})^2}{10 \text{ kg}(9.81 \text{ m/s}^2)} \theta$$

$$\sin \theta = 0.026 \theta$$

Como θ está expresado en radianes, si buscamos numéricamente θ donde $\sin \theta = 0.026 \theta$ se obtiene:

$$\theta = 0 \quad \theta = 1.91^\circ \quad \theta = 1.91^\circ \text{ rad}$$

Estabilidad del equilibrio. La segunda derivada de la energía potencial V con respecto a θ es:

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = k l^2 - mgl \cos \theta$$

$$= 4 \text{ kN/m}(0.08 \text{ m})^2 - 10 \text{ kg}(9.81 \text{ m/s}^2) \cos \theta$$

$$= 25.6 - 98.1 \cos \theta$$

$$\left(\frac{d^2V}{d\theta^2} \right)_{\theta=0} = 25.6 - 98.1 \cos(0) = -72.5 \text{ N/m}$$

El equilibrio es inestable para $\theta = 0$.

$$\left(\frac{d^2V}{d\theta^2} \right)_{\theta=1.91^\circ} = 25.6 - 98.1 \cos(1.91^\circ) = 2.1 \text{ N/m}$$

El equilibrio es estable para $\theta = 1.91^\circ$.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

El sistema de referencia que se elige para estudiar el movimiento puede ser cualquiera de los que se describen en el apartado anterior. En este caso, el sistema de referencia elegido es el sistema de referencia inercial, es decir, el sistema de referencia en el que se cumple la ley de Newton. En este caso, el sistema de referencia elegido es el sistema de referencia inercial, es decir, el sistema de referencia en el que se cumple la ley de Newton.

[illegible]

entidad constante y designada hacia abajo; por tanto, se escribe que $V_k = P_k$.

En definitiva, el presente artículo pretende ser una contribución a la

Las componentes de la energía potencial U_{pot} de un sistema de N partículas, $U_{\text{pot}} = U_{\text{pot}}^{\text{ext}} + U_{\text{pot}}^{\text{int}}$, dependen de la configuración de las partículas y de la energía potencial de las partículas con respecto al campo externo. La energía potencial de las partículas con respecto al campo externo $U_{\text{pot}}^{\text{ext}}$ depende de la configuración de las partículas y de la energía potencial de las partículas con respecto al campo externo $U_{\text{pot}}^{\text{ext}}$.

$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m \dot{z}^2 \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m \dot{z}^2 \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m \dot{z}^2 \right)$

truncat. ca. 200. Pour mille.

[illegible]

$\hat{p} = 0.14$ $1 - \hat{p} = 0.86$ $n = 100$ $z_{\alpha/2} = 1.96$ $p = 0.05$ $n = 100$ $\hat{p} = 0.14$
 1. $SE = \sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})} = \sqrt{0.14(1 - 0.14)} = 0.35$ $SE = \sqrt{0.14(1 - 0.14)} = 0.35$ $SE = \sqrt{0.14(1 - 0.14)} = 0.35$ $SE = \sqrt{0.14(1 - 0.14)} = 0.35$
 $z = \frac{\hat{p} - p}{SE} = \frac{0.14 - 0.14}{0.35} = 0$ $z = \frac{0.14 - 0.14}{0.35} = 0$ $z = \frac{0.14 - 0.14}{0.35} = 0$ $z = \frac{0.14 - 0.14}{0.35} = 0$
 100% to 100%

$\{ \begin{matrix} f_1, \dots, f_n \\ f_1, \dots, f_n \end{matrix} \}$ is a set of n elements, and f_1, \dots, f_n are the elements of the set.

então $\frac{d}{dt} \langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle = 0$ e $\frac{d^2}{dt^2} \langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle < 0$, logo as (14) e (15).

Figure 10. The effect of the initial concentration of the monomer on the polymerization of α -methylstyrene initiated by SnCl_4 in CH_2Cl_2 at -78°C . The concentration of the initiator was $1.0 \times 10^{-2} \text{ mol/L}$. The polymerization was carried out for 10 min.

En todos los demarcados sucesivos de V son iguales a cero

Problemas



Figura P10.69

10.59 Use el método de la sección 10.8 para resolver el problema 10.29.

10.60 Use el método de la sección 10.8 para resolver el problema 10.30.

10.61 Use el método de la sección 10.8 para resolver el problema 10.31.

10.62 Use el método de la sección 10.8 para resolver el problema 10.32.

10.63 Use el método de la sección 10.8 para resolver el problema 10.33.

10.64 Use el método de la sección 10.8 para resolver el problema 10.34.

10.65 Use el método de la sección 10.8 para resolver el problema 10.35.

10.66 Use el método de la sección 10.8 para resolver el problema 10.36.

10.67 Demuestre que en el problema 10.1 el equilibrio es neutro.

10.68 Demuestre que en el problema 10.6 el equilibrio es neutro.

10.69 Dos barras uniformes idénticas, cada una con masa m y longitud l , están unidas a las poleas que se conectan por medio de una banda como se muestra en la figura. Si se supone que no existe deslizamiento entre la banda y las poleas, determine la posición en la que el sistema es estable y establezca en cada caso si el equilibrio es estable, inestable o neutro.

10.70 Dos barras uniformes AB y CD , con la misma longitud l , están unidas a los anillos idénticos que se muestran en la figura. Suponga que la barra AB pesa $4l$ y que la barra CD pesa $2l$. Determine la posición en la que el sistema es estable y establezca en cada caso si el equilibrio es estable, inestable o neutro.



Figura P10.70

10.7 En la figura se muestra una barra homogénea conectada a los engranes A y B como se ilustra en la figura. Determine las posiciones de equilibrio del sistema y establezca en cada caso si el equilibrio es estable, inestable o neutro.



Figura P10.71 y P10.72

10.72 Dos barras uniformes, AB y CD , están unidas a los engranes de radio idéntico que se muestran en la figura. Si se sabe que $W_{AB} = 8 \text{ lb}$ y que $W_{CD} = 4 \text{ lb}$, determine las posiciones de equilibrio. Establezca en cada caso si el equilibrio es estable, inestable o neutro.

10.73 Con el método de la sección 10.8 resolver el problema 10.30 y determinar si el equilibrio es estable, inestable o neutro. *Nota:* La energía potencial correspondiente al par ejercido por un resorte de torsión es $\frac{1}{2}k\theta^2$, donde k es la constante torsional del resorte, θ es el ángulo de torsión.

10.74 En el problema 10.40 determine si cada una de las posiciones de equilibrio es estable, inestable o neutra. (Vea la sugerencia del problema 10.)

10.75 Una carga W con 100 lb de magnitud se aplica en C al mecanismo mostrado en la figura. Si el resorte está sin estirar cuando $\theta = 15^\circ$, determine el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio y verifique si el equilibrio es estable.

10.76 Una carga W con 100 lb de magnitud se aplica en C al mecanismo mostrado en la figura. Si el resorte está sin estirar cuando $\theta = 30^\circ$, determine el valor de θ correspondiente a la posición de equilibrio y verifique si el equilibrio es estable.



Figura P10.75 y P10.76

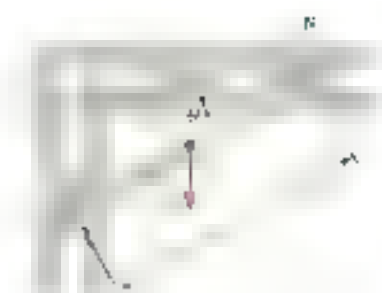


Figura P10.77 y P10.78

10.77 Una barra delgada AB de peso W está articulada a los bloques A y B, los cuales pueden moverse libremente sobre las guías mostradas en la figura. El resorte de constante k está sin estirar cuando AB está en posición horizontal. Sin tomar en cuenta el peso de los bloques, obtenga una ecuación en términos de θ , W , l y k que se cumpla cuando la barra esté en equilibrio.

10.78 Una barra delgada AB de peso W está articulada a los bloques A y B, los cuales pueden moverse libremente sobre las guías mostradas en la figura. Si se sabe que el resorte se encuentra sin estirar cuando AB está en posición horizontal, determine el ángulo θ que corresponde a la posición de equilibrio cuando $W = 300$ lb, $l = 18$ in. y $k = 75$ lb/in. Establezca en cada caso si el equilibrio es estable, inestable o neutro.

10.79 Una barra delgada AB de peso W está articulada a los bloques A y B, los cuales pueden moverse libremente sobre las guías mostradas en la figura. Se sabe que el resorte se encuentra sin estirar cuando $\theta = 0$. Determine el valor de g correspondiente a la posición de equilibrio cuando $W = 180$ N, $l = 500$ mm y $k = 600$ N/m.



Figura P10.79

10.80 Los resortes AB y BC se conectan a la barra como se muestra en la figura. Cuando $\theta = 0$, determine el valor de g correspondiente al equilibrio cuando $W = 60$ N, $l = 500$ mm y $k = 600$ N/m.



Figura P10.80

10.81 Un resorte AB de constante k está unido a dos engranes idénticos como se muestra en la figura. Si se sabe que el resorte está sin estirar cuando $\theta = 0$, determine los valores de θ que corresponden a posiciones de equilibrio cuando $P = 40$ lb, $a = 6$ in., $b = 3$ in., $r = 1$ in. y $k = 5$ lb/in. Establezca en cada caso si el equilibrio es estable, inestable o neutro.

10.82 Un resorte AB de constante k está unido a dos engranes idénticos como se muestra en la figura. Si se sabe que el resorte está sin estirar cuando $\theta = 0$, y dado que $a = 60$ mm, $b = 45$ mm, $r = 10$ mm y $k = 6$ N/mm, determine a) el intervalo de valores de P para los cuales existe una posición de equilibrio, b) los valores de θ que corresponden a posiciones de equilibrio si el valor de P es igual a la mitad del límite superior del intervalo que se encontró en el inciso a).

Figura P10.81 y P10.82

10.83 Una barra delgada AB está unida a dos collarines A y B , los cuales se pueden mover libremente a lo largo de las barras guía mostradas en la figura. Si se sabe que $\beta = 30^\circ$ y que $P = Q = 400$ N, determine el valor del ángulo θ correspondiente a la posición de equilibrio.

10.84 Una barra delgada AB está unida a dos collarines A y B , los cuales se pueden mover libremente a lo largo de las barras guía mostradas en la figura. Si se sabe que $\beta = 30^\circ$, $P = 300$ N y $Q = 25$ N, determine el valor del ángulo θ correspondiente a la posición de equilibrio.

10.85 y 10.86 En las figuras se muestra un collarín A que puede deslizarse libremente sobre una barra horizontal. Si se sabe que la constante del resorte es k y que la longitud sin estirar del resorte es igual al radio r del semicírculo, determine el ángulo θ correspondiente a la posición de equilibrio cuando $W = 50$ lb, $r = 9$ in, y $k = 15$ lb/in.



Figura P10.83 y P10.84



Figura P10.85



Figura P10.86

10.87 y 10.88 El carrico B que pesa 75 lb, resaca a lo largo de una pista horizontal que forma un ángulo β con la horizontal. La constante del resorte es 10 lb/in. Si se sabe que el carrico está en la posición de equilibrio cuando la longitud sin estirar del resorte es igual a la distancia β que mide

10.87 β cuando $\beta = 40^\circ$

10.88 β cuando $\beta = 60^\circ$



Figura P10.87 y P10.88



Figura P10.89

10.89 Una barra vertical AB está unida a dos resortes de constante k y se le aplica una carga puntual P como se muestra. Determine el intervalo de valores de la magnitud P de dos fuerzas verticales iguales y opuestas P para las cuales el sistema se le ve en equilibrio estable. $AB = 6\text{ ft}$, $k = 4\text{ kN/m}$.

10.90 En la figura se muestra una barra AB unida a una articulación en A y a dos resortes, cada uno con constante k . Se $h = 25\text{ in.}$, $d = 12\text{ in.}$, $W = 50\text{ lb}$, determine el intervalo de valores de k para los cuales la barra está en equilibrio estable en la posición que se muestra en la figura. Cada resorte puede actuar, tanto en tensión, como en compresión.

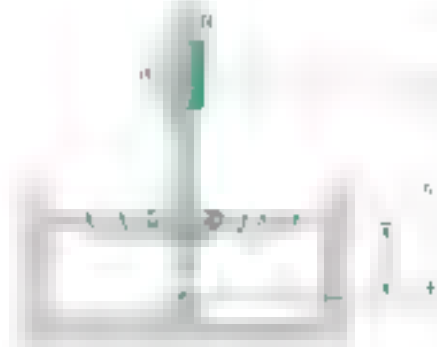


Figura P10.90 y P10.91

10.91 En la figura se muestra una barra AB unida a una articulación en A y a dos resortes, cada uno con constante k . Se $h = 45\text{ in.}$, $k = 8\text{ lb/in.}$, $W = 60\text{ lb}$, determine la distancia mínima d para que la barra esté en equilibrio estable en la posición que se muestra en la figura. La distancia d puede ser, tanto en tensión, como en compresión.

10.92 y 10.93 En la figura se muestran dos barras unidas a un resorte de constante k y a dos resortes de constante k . Las barras están en posición vertical. Determine el intervalo de valores de P para los cuales el sistema está en equilibrio estable en la posición que se muestra en la figura.

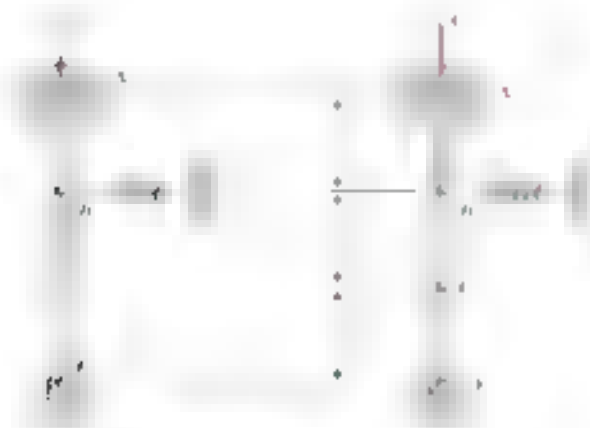


Figura P10.92 y P10.93

10.94 En la figura se muestran dos barras AB y BC unidas a un resorte de constante k , el cual se encuentra sin estirar cuando las barras están en posición vertical. Determine el intervalo de valores de P para los cuales la posición mostrada puede ser mantenida en la figura.

10.95 En la figura se muestra una barra horizontal BEH conectada a tres barras verticales. El collarín en E se puede deslizar libremente sobre la barra DE . Determine el intervalo de valores de Q para los cuales el sistema está en equilibrio estable en la posición mostrada, cuando $a = 400$ mm, $b = 200$ mm y $P = 150$ lb.



Figura P10.95 y P10.96

10.96 En la figura se muestra una barra horizontal BEH conectada a tres barras verticales. El collarín en E se puede deslizar libremente sobre la barra DE . Determine el intervalo de valores de P para los cuales el sistema está en equilibrio estable en la posición mostrada, cuando $a = 150$ mm, $b = 200$ mm y $Q = 45$ N.

10.97 Las barras AB y BC que se muestran en la figura, cada una de longitud l , pueden moverse libremente sobre los resortes de constante k . Cada $l = 1$ m y $k = 100$ N/m. Las barras AB y BC están en equilibrio cuando $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Determine el intervalo de valores de P para los cuales la posición de equilibrio del sistema es estable.

10.98 Retorne el problema 10.97 y ahora suponga que $l = 800$ mm y que $k = 2.5$ kN/m.

10.99 Dos barras de peso despreciable están unidas a tambores de radio r que a su vez se conectan mediante una banda y un resorte de constante k . Si se sabe que el resorte se encuentra sin deformar cuando las barras están en posición vertical, determine el intervalo de valores de P para los cuales la posición de equilibrio en $\theta_1 = \theta_2 = 0$ es estable.

10.100 Retorne el problema 10.99 y ahora suponga que $k = 30$ lb/in., $r = 3$ in., $l = 6$ in. y a) $W = 15$ lb, b) $W = 60$ lb.



Figura P10.94



Figura P10.97



Figura P10.99

REPASO Y RESUMEN DEL CAPITULO 10

Trabajo de una fuerza

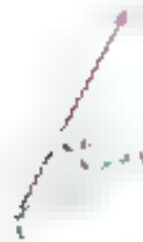


Figura 10.16

La primera parte de este capítulo se dedicó al estudio del principio de trabajo virtual, así que vamos a resolver algunos problemas de equilibrio. Empezaremos definiendo el trabajo de una fuerza F en correspondencia a un desplazamiento pequeño dr (sección 10.2) como la cantidad

$$dU = F \cdot dr \quad (10.1)$$

donde se obtiene al realizar el producto escalar de la fuerza F y el desplazamiento dr (ver 10.16). Si se requiere encontrar F a partir de dU por lo común las longitudes de la fuerza y el desplazamiento, y con α el ángulo que forman F y dr , se puede escribir

$$dU = F dr \cos \alpha \quad (10.1')$$

El trabajo dU es positivo si $\alpha < 90^\circ$, cero si $\alpha = 90^\circ$ y negativo si $\alpha > 90^\circ$. También vamos a ver que el trabajo de un par de momento M que actúa sobre un cuerpo rígido es

$$dU = M d\theta \quad (10.2)$$

donde $d\theta$ es el ángulo (por rad) expresado en radianes, sobre el que rota el cuerpo.

Desplazamiento virtual

Consideremos como ejemplo a una partícula deslizándose por A y sobre la que actúan varias fuerzas F_1, F_2, \dots, F_n (ver 10.1). Se supone que la partícula se mueva hacia una posición A' (figura 10.17). Como el trabajo del desplazamiento no se conoce, este se le llama *desplazamiento virtual* y se le representa con δr , tras que al trabajo correspondiente de las fuerzas se le llama *trabajo virtual* y se le denota con δU . Así se obtiene

$$\delta U = F_1 \cdot \delta r + F_2 \cdot \delta r + \dots + F_n \cdot \delta r$$

Principio del trabajo virtual



Figura 10.17

El principio del trabajo virtual establece que *una partícula está en equilibrio si el trabajo virtual δU de las fuerzas que actúan sobre las partículas es igual a cero para cualquier desplazamiento virtual de la partícula*.

El principio del trabajo virtual puede aplicarse a uno de los campos más interesantes de la mecánica, los cuerpos rígidos. Como se vio en esta relación sobre las fuerzas que realizan trabajo, la aplicación de este concepto es una alternativa útil al método clásico de los diagramas de equilibrio para la solución de algunos problemas de ingeniería. Dicho método es muy útil en el caso de máquinas y mecanismos que consisten de varios cuerpos rígidos conectados entre sí, debido a que el trabajo de las fuerzas internas se aproxima al de las fuerzas externas y las deformaciones son muy pequeñas que influyen en sus efectos. Véase el capítulo 10 y problemas resueltos 10.1, 10.2 y 10.3.

Sin embargo, en el caso de máquinas reales [sección 10.5], el trabajo realizado por las fuerzas de fricción debe ser tomado en cuenta. La pérdida que se experimenta sobre el sistema que se trabaja es el trabajo no útil. Se define la eficiencia mecánica de una máquina como la relación

$$\eta = \frac{\text{trabajo de salida}}{\text{trabajo de entrada}} \quad (10.9)$$

en donde se ve que el trabajo útil para una máquina ideal es la función $\eta = 1$, mientras que para una máquina real $\eta < 1$.

En la segunda parte de esta aplicación se considerará el trabajo realizado por las fuerzas cuando el momento de torsión varía con el desplazamiento. El trabajo U realizado por la fuerza \mathbf{F} cuando se mueve a lo largo de la trayectoria A desde A_1 hasta A_2 (figura 10.8) se define al integrar el producto escalar de dicho \mathbf{F} con el elemento $d\mathbf{r}$ de la ecuación (10.1) a lo largo de la trayectoria desde A_1 por la parte de la sección 10.6

$$U = \int_{A_1}^{A_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (10.11)$$

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{A_1}^{A_2} F \cos \alpha \, ds \quad (10.12)$$

De manera similar, el trabajo de un par de momento \mathbf{M} correspondiente a una rotación finita de θ_1 a θ_2 es un escalar que puede expresarse como

$$U = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M \, d\theta \quad (10.13)$$

El trabajo realizado por el peso \mathbf{W} de un cuerpo en el que su centro de gravedad se mueve de la altura y_1 hasta y_2 (figura 10.9) se puede obtener al hacer que $F = W$ y $\alpha = 180^\circ$ en la ecuación (10.11)

$$U_{1 \rightarrow 2} = - \int_{y_1}^{y_2} W \, dy = Wy_1 - Wy_2 \quad (10.13)$$

Por tanto, el trabajo de \mathbf{W} es positivo cuando la altura y crece, aunque

Trabajo de una fuerza sobre un desplazamiento finito



Figura 10.10

Trabajo de un peso

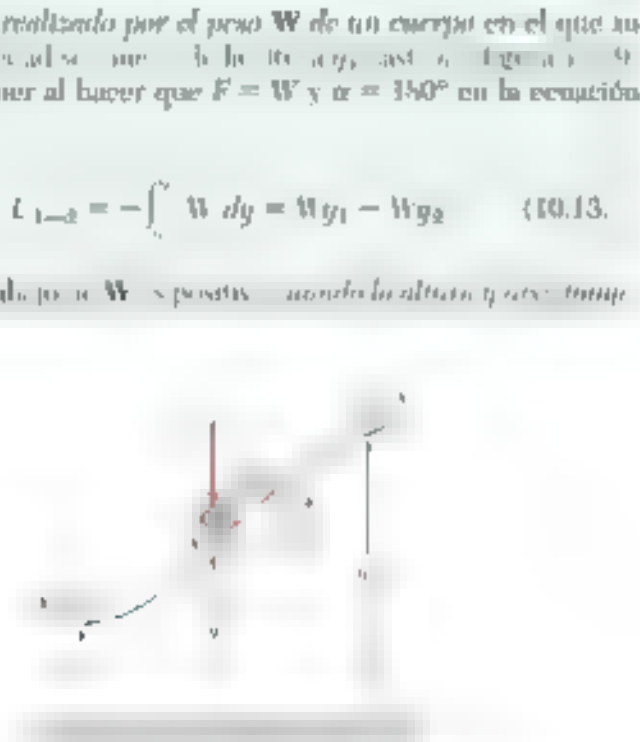


Figura 10.13

Trabajo de la fuerza ejercida por un resorte



Figure 10.20

Expresión alternativa para el principio del trabajo virtual



Figure 10.21

El trabajo de la fuerza F ejercida por un resorte sobre un cuerpo A conforme el resorte se estira desde x_1 hasta x_2 (fig. 10.20) se obtiene al hacer $F = kx$ donde k es la constante del resorte y $\alpha = 180^\circ$ en la ecuación (10.11):

$$U_{1 \rightarrow 2} = \int_{x_1}^{x_2} kx \, dx = \frac{kx^2}{2} \bigg|_{x_1}^{x_2} = \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 \quad (10.16)$$

Así, el trabajo F es positivo cuando el resorte regresa a su posición no deformada.

Cuando el trabajo de la fuerza F es independiente de la trayectoria, como sucede en particular con $F = V_1 - V_2$, entonces se dice que la fuerza es conservativa y, por tanto, su trabajo realizado se expresa de la siguiente forma:

$$U_{1 \rightarrow 2} = V_1 - V_2 \quad (10.20)$$

donde V es la energía potencial asociada con F . V_1 y V_2 representan, respectivamente, los valores de V en A_1 y A_2 (sección 10.7). Las energías potenciales asociadas con la fuerza de gravedad son W y con la fuerza elástica F son V_e como se muestra en las ecuaciones (10.17) y (10.18).

$$V_g = Wg \quad \text{y} \quad V_e = \frac{1}{2}kx^2 \quad (10.17 \text{ } 10.18)$$

Cuando la posición de un sistema mecánico depende sólo de una variable independiente θ , la energía potencial $V = V(\theta)$ es una función de θ en que θ está variando. Por lo tanto, se puede escribir $dV/d\theta = dV/d\theta$ en base en la ecuación (10.20). La condición $\delta U = 0$ requerida por el principio del trabajo virtual para que el sistema se conserve en equilibrio se puede sustituir por la condición:

$$\frac{dV}{d\theta} = 0 \quad (10.21)$$

Cuando todas las fuerzas involucradas son conservativas, es más conveniente utilizar la ecuación (10.21) en lugar de aplicar directamente el principio de trabajo virtual (sección 10.4) al problema (10.4).

Este método proporciona una manera más simple y posible de determinar si el equilibrio del sistema es estable o inestable, con base en el signo de la segunda derivada de V [sección 10.9]. Por otra parte, si $d^2V/d\theta^2 > 0$, entonces V es mínima y el equilibrio es estable; pero si $d^2V/d\theta^2 < 0$, entonces V es máxima y el equilibrio es inestable. Pero si $d^2V/d\theta^2 = 0$, entonces es necesario analizar las derivadas de orden superior.

Problemas de repaso

10.101 Determine la fuerza vertical P que debe aplicarse en G para mantener en equilibrio el mecanismo mostrado en la figura.

10.102 Determine el par M que debe aplicarse al elemento $DEFL$ para mantener en equilibrio el mecanismo mostrado en la figura.

10.103 Obtenga una expresión para determinar la magnitud del par M que se requiere para mantener en equilibrio el mecanismo mostrado en la figura.



Figura P10.101 y P10.102



Figura P10.103

10.104 Los collarines A y B se conectan mediante el alambre AB y pueden deslizarse libremente por la varilla que se muestra en la figura. Si la longitud del alambre AB es de 400 mm y el peso del collarín A es de 90 N, determine la magnitud de la fuerza P que se requiere para mantener en equilibrio el sistema cuando $a) c = 80 \text{ mm}$ $b) c = 250 \text{ mm}$.

10.105 El collarín B puede deslizarse libremente a lo largo AC y está impulsado al pasar por un bloque que se puede deslizar por la varilla. Determine la magnitud del par M que se requiere para mantener el equilibrio.



Figura P10.104



Figura P10.105

10.106 En la figura se muestra una barra delgada de longitud l unida a una pared en A por un resorte que posee una constante de resorte k . Sin tomar en cuenta el efecto de la fricción, determine el valor de θ que corresponde al estado de equilibrio cuando $l = 200$ mm, $k = 40$ N/m, $P = 40$ N y $Q = 50$ N.



Figura P10.106

10.107 Una fuerza horizontal P con 40 lb de magnitud se aplica en el punto C del mecanismo mostrado en la figura. El resorte de constante $k = 5$ lb/in. se encuentra sin estirar cuando $\theta = 0$. Sin tomar en cuenta el peso de los miembros, determine el valor de θ en equilibrio a la posición mostrada.



Figura P10.107

10.108 Dos barras rígidas ABC y DEF están conectadas por medio de un pasador en B y mediante un resorte CE . Si el resorte tiene 4 in. de longitud cuando está sin estirar y la constante del resorte es de 8 lb/in., determine el estado de equilibrio de la estructura cuando se aplica una carga de 24 lb en E .



Figura P10.108

10.109 Retorne el problema 10.108, y ahora suponga que la carga de 24 lb se aplica a C en vez de en B .

10.110 Dos barras uniformes, cada una de masa m y longitud l , están unidas a los extremos de un eje horizontal fijo en el punto O tal que $\theta = 0$ cuando las barras están en equilibrio. ¿El sistema es estable o inestable en cada caso si es estable o inestable?



Figura P10.110

10.111 Una semiesfera homogénea de radio r se coloca sobre un plano horizontal como se muestra en la figura. Se supone que la fricción basta para evitar el deslizamiento entre la semiesfera y el plano horizontal. Determine el ángulo θ a partir del cual la semiesfera comienza a volcar cuando $\beta = 0$.

10.112 Una semiesfera homogénea de radio r se coloca sobre un plano inclinado como se muestra en la figura. Si se supone que la fricción basta para evitar el deslizamiento entre la semiesfera y el plano inclinado, determine el ángulo β que resulta a partir de una posición de equilibrio. ¿El ángulo θ correspondiente a la posición de equilibrio cuando el ángulo β aumenta o disminuye? ¿El punto de equilibrio es estable o inestable?



Figura P10.111 y P10.112



10.C1 Para mantener el equilibrio del sistema mecánico mostrado en la figura, cuando se aplica una fuerza P sobre el pistón, es necesario aplicar una fuerza M sobre el pistón A . Se sabe que $L = 2\text{ m}$ y que θ varía entre 0° y 180° con incrementos de 10° . Determinar el valor de θ para el cual la relación M/P es máxima y el valor correspondiente de dicha relación.



Figura P10.C1

10.C2 Si se sabe que para el mecanismo mostrado en la figura $a = 500\text{ mm}$, $b = 150\text{ mm}$, $L = 500\text{ mm}$ y $P = 100\text{ N}$, utilizar software para calcular la fuerza en el resorte BD para valores de θ entre 30° y 30° con incrementos de 10° . Se incrementan incrementos menores y determinar el incremento de la fuerza en el resorte BD es mayor que 100% .



Figura P10.C2

10.C3 Retorne el problema 10.C2, y ahora suponga que la fuerza P aplicada en A se dirige horizontalmente hacia la derecha.

10.C4 En la figura se muestra un resorte AB de constante k que se encuentra sin estirarse cuando $\theta = 0^\circ$. Se desea determinar el punto de equilibrio BCD , utilice software para calcular la energía potencial del sistema y su derivada $dV/d\theta$ en $\theta = 0^\circ$ y $\theta = 45^\circ$ y $\theta = 75^\circ$, con el fin de que usted pueda determinar si el punto de equilibrio θ es un punto de equilibrio estable, inestable o neutro. Si no puede determinar si el punto de equilibrio es estable o inestable, use los valores de $dV/d\theta$ para ello. Para $k = 100 \text{ N/m}$, $W = 20 \text{ N}$ y $L = 300 \text{ mm}$, calcule V y $dV/d\theta$ para valores de θ de 0° hasta 90° con incrementos de 5° . Utilice incrementos menores adecuados y determine los valores de θ para los cuales el sistema está en equilibrio, y establezca en cada caso si el equilibrio es estable, inestable o neutro.



Figura P10.C4

10.C6 Una barra delgada ABC está sujeta a los bloques A y B , que pueden moverse libremente por las guías mostradas en la figura. La constante del resorte es k y éste se encuentra sin estirarse cuando la barra está en posición vertical. Sin tomar en cuenta los pesos de la barra y de los bloques, use software para calcular la energía potencial V del sistema y su derivada $dV/d\theta$ en $\theta = 0^\circ$, $\theta = 45^\circ$ y $\theta = 75^\circ$, con el fin de que usted pueda determinar si el punto de equilibrio θ es un punto de equilibrio estable, inestable o neutro. Si no puede determinar si el punto de equilibrio es estable o inestable, use los valores de $dV/d\theta$ para ello. Para $k = 100 \text{ N/m}$, $W = 20 \text{ N}$ y $L = 300 \text{ mm}$, calcule V y $dV/d\theta$ para valores de θ de 0° hasta 90° con incrementos de 5° . e) Use incrementos menores adecuados para determinar cualesquiera posiciones de equilibrio en el intervalo $0^\circ \leq \theta \leq 75^\circ$ y establezca en cada caso si el equilibrio es estable, inestable o neutro.



Figura P10.C6



Figura P10.C6

10.C7 Retorne el problema 10.C6, y ahora suponga que la fuerza P aplicada en C se dirige horizontalmente hacia la derecha.

El primer examen *Intermediate Algebra I* ("generating *I*-association") se puede presentar justo antes o después de la graduación de un programa de estudios de cuatro años. El examen analiza los contenidos de un programa normal de licenciatura en matemática (que incluye la *statística*). Las temas que a menudo se ven en el examen se cubren en este libro. La siguiente es una lista de las principales áreas cubiertas en referencia a las secciones de este libro donde aparecen. También se incluyen problemas que pueden resolverse para repasar el material.

Problems 2, 33, 2, 35, 2, 36, 7, 3, 2, 1, 28, 3, 92, 2, 93, 2, 31.

Problemas, 3.16, 3.18, 3.25, 3.31, 3.38, 3.40

Problems 4.5, 4.13, 4.14, 4.17, 4.29, 4.38, 4.66, 4.75

Problemas. 4 100 4 104 4 103 4 106 4 115 4 117 4 127
4 132 4 133

Problemas: 3.8, 3.18, 3.20, 3.25, 3.26, 3.36, 3.38, 3.99, 3.103,
3.104, 3.125

Análisis de armaduras (6.2-6.7)

Problemas: 6.3, 6.4, 6.33, 6.43, 6.44, 6.56

Equilibrio de armazones bidimensionales (6.8-6.11)

Problemas: 6.76, 6.50, 6.57, 6.91, 6.92

Fuerza cortante y momento flector (7.3-7.6)

Problemas: 7.22, 7.25, 7.31, 7.36, 7.45, 7.49, 7.70, 7.83

Fricción (8.2-8.5, 8.10)Problemas: 8.11, 8.15, 8.21, 8.30, 8.50, 8.53, 8.101,
8.104, 8.105**Momentos de inercia (9.2-9.10)**Problemas: 9.5, 9.31, 9.32, 9.33, 9.77, 9.78, 9.84, 9.86,
9.101, 9.103

CRÉDITOS DE LAS FOTOGRAFÍAS

CAPÍTULO 1

Portada: © Isaac Newton, fotografía cortesía de Jeremy Winkler; **Fotografía 1.1:** © FotografíaLink/Getty Images RF

CAPÍTULO 2

Portada: © Tom Pava/Getty Images; **Fotografía 2.1:** © David Seawright/CORBIS; **Fotografía 2.2:** © W. N. Eversett/Getty Images

CAPÍTULO 3

Portada: © David S. Jech; **Fotografía 3.1:** © McGraw-Hill/Fotografía de Lucinda Dowell; **Fotografía 3.2:** © Steve Hix/Getty Images; **Fotografía 3.3:** © Jose Luis Pelaez/Getty Images; **Fotografía 3.4:** © Images USA/Alamy; **Fotografía 3.5:** © J. J. Deppa/White/Photo Edit

CAPÍTULO 4

Portada: © Alfredo Marquez/Getty Images; **Fotografía 4.1, Fotografía 4.2, Fotografía 4.3:** © McGraw-Hill/Fotografía de Lucinda Dowell; **Fotografía 4.4, Fotografía 4.5:** Cortesía de National Information Service for Earthquake Engineering, University of California, Berkeley; **Fotografía 4.6:** © McGraw-Hill/Fotografía de Lucinda Dowell; **Fotografía 4.7:** Cortesía de SKF Lubriol

CAPÍTULO 5

Portada: © Christopher Morris/CORBIS; **Fotografía 5.1:** © Alexey Kolesnikov/SuperStock; **Fotografía 5.2:** Audio-Link/Alamy; **Fotografía 5.3:** © E. J. Sloan & Marie Devantier/Lahey/Getty Images; **Fotografía 5.4:** NASA

CAPÍTULO 6

Portada: © Van Schuren Photography/CORBIS; **Fotografía 6.1:** Cortesía de National Information Service for Earthquake Engineering, University of California, Berkeley; **Fotografía 6.2:** © J. J. Deppa/White/Photo Edit; **Fotografía 6.3:** © McGraw-Hill; **Fotografía 6.4:** © Eversett/Getty Images RF; **Fotografía 6.5:** Cortesía de Luma Lamp Corporation

CAPÍTULO 7

Portada • Getty Images Ltd. **Fotografía 7.1** • McGraw-Hill **Fotografía 7.2** • Salomon Dawes **Fotografía 7.2a** • Apple Computer **Fotografía 7.3** • Michael S. Yeaman/Corbis **Fotografía 7.4a** • Steve Kahn/Getty Images

CAPÍTULO 8

Portada • Brent May/Cora **Fotografía 8.1** • Chuck Savage/Corbis **Fotografía 8.2** • Ken Spivey/Corbis **Fotografía 8.3** • Adam Wozniak/Corbis

CAPÍTULO 9

Portada • Taylor LaRocca/Corbis Images **Fotografía 9.1** • Ed F. Astor/Corbis **Fotografía 9.2** Cortesía de Caterpillar Engine Division

CAPÍTULO 10

Portada • Tom Brachfield/Supersock **Fotografía 10.1** Cortesía de Altec Industries **Fotografía 10.2** Cortesía de De-Sta-Cat

Índice analítico

- A**
- Acción, líneas de 10, 21, 73, 92, 300
- Adición asociativa, 20
- Adición de:
- paños, 111
 - vectores, 18-20
- Adición de fuerzas:
- en el espacio concurrente, 49-57, 60
 - ley del paralelogramo para la, 3
 - mediante la suma de las componentes X y Y, 81-85
- Alas:**
- compuestas, 226-236
 - homogéneas, 214
 - múltiples, 226
- Análisis de armaduras, 287-315, 345-346
- por el método de las secciones, 304-305, 346
 - por el método de los nodos, 288-292, 345-346
- Análisis de estructuras, 284-351
- introducción, 286-287
 - marcos y máquinas, 316-344, 347
 - problemas de computadora, 350-351
 - problemas de repaso, 348-349
 - resumen, 345-347
- Anillos de un marco, 316-317, 347
- Ángulo principal, 431, 434, 460
- Ángulos:
- de fricción, 415-416, 459
 - de reposo, 415
 - principales, 431, 460
- Aplicaciones del principio del trabajo virtual, 362-364
- Área, unidades de, 501, 5-6
- Áreas simétricas y asimétricas, 224
- Áreas y líneas, 220-257. *Vea también* Momentos de inercia de áreas
- cargas distribuidas sobre vigas, 246, 276
 - centro de gravedad de un cuerpo bidimensional, 220-221, 274
 - centros de, 222-223, 274
 - determinación de centros de por integración, 236-239, 275
 - fuerzas sobre superficies sumergidas, 249-257
 - placas compuestas y alambres, 226-236
 - primeros momentos de, 223-226, 274
 - teoremas de Pappus-Guldinus, 234-247, 276
- Aristóteles, 2
- Armaduras:** 287-315, 345-346
- análisis de, 287-315, 345-346
 - compuestas, 305-306
 - definición de una, 287-288
 - especiales, 294-304, 346
 - Fink, 305
 - hechas con varias armaduras simples, 305-315, 346
 - nodos bajo condiciones especiales de carga, 292-293
 - tipos—289—306
 - simples—289—305
- Armaduras de armadas. *Vea* Armaduras
- estática indeterminadas
- Armaduras especiales—294—304, 346
- Armaduras estáticamente indeterminadas—305—315
- 305—315
- Armaduras estáticamente indeterminadas—305—315
- Armaduras indeterminadas. *Vea* Armaduras
- estática indeterminadas
- Armaduras simples—289—305
- Armaduras hechas con varias—305—315, 346
- Apéndice 2
- Aspectos de validez, 374
- B**
- Baren, 176-157
- Barto trasatlántico, 72-73
- C**
- Cables**
- catenaria, 385-402, 405
 - con cargas concentradas, 383-384
 - con cargas distribuidas, 384-385, 405
 - longitudinal de, 383, 401
 - suavidad en, 383-402
 - parabólicos, 385-388, 405
- Cálculo, anticipación de errores en los, 13
- Canalales escuaras, 578
- Canalales vectoriales, 64

- Cargas aplicadas.** 351
- Cargas concentradas.** 245, 362
- cables con. 353-354
 - equivalente. 350
- Cargas distribuidas.** 362
- antes con. 351-353, 365
 - antes con. 348-350, 350
 - antes con. 350-351
- Centros.** 189-192, 192
- Centros de.** 220
- de áreas y líneas. 220-223, 225-226, 274
 - de volúmenes. 254-259, 256, 275-276
 - determinación de. 225-231
 - por integración. 236-238, 262-273, 275-277
- Centros de gravedad.** 220-254
- áreas y líneas. 220-254
 - introducción. 220
 - problemas de computadora. 251-253
 - problemas de repaso. 275-290
 - resumen. 274-277
 - volúmenes. 259-273
- Centros de gravedad.** 231-236
- de un cuerpo bidimensional. 220-221, 274
 - de un cuerpo tridimensional. 25-359-261, 275-276
- Ciencia.** 2
- Ciencia abstracta.** 2
- Ciencia aplicada.** 2
- Ciencia para.** 2
- Circulo de fricción.** 444
- Círculo de Mohr para momentos y productos de inercia.** 505-511, 517-545
- Claro.** 362-397
- Coefficientes de fricción.** 412-414
- objetos
 - de fricción. 414
 - de fricción. 414
 - de fricción. 414-415
 - de fricción. 414-415
- Componentes.** Véase Componentes oblicuos
- Componentes rectangulares. Componentes escalares. Componentes vectoriales
- Componentes escalares.** 25, 30, 45, 64
- Componentes oblicuos.** 17
- componentes rectangulares. 27-32, 53, 146-147
 - de una fuerza en el espacio. 45-48
 - de una fuerza. vectores unitarios. 27-29, 64
 - del momento de una fuerza. 83-93, 147
- Componentes vectoriales.** 25
- Compresión.** 345-346, 354-355
- Conceptos y principios fundamentales.** 3-5, 13
- ley de la gravitación de Newton. 4
 - ley del paralelogramo para la adición de fuerzas. 3
 - principio de transmisibilidad. 3
 - tres leyes fundamentales de Newton. 3-4
- Condiciones de carga.** 108, 362-363. Véase también Cargas aplicadas; Cargas concentradas; Cargas distribuidas
- equivalentes. 350-351, 350
- Condiciones de equilibrio.** 349
- Condiciones necesarias y suficientes.** 310
- Condiciones suficientes.** 314
- Constante de resorte.** 379
- Constante gravitacional.** 4
- Contraintuitiva.** 314
- Conversión de un sistema de unidades a otro.** 10-11
- unidades de fuerza. 14-15
 - unidades de longitud. 11
 - unidades de masa. 11
- Convoluciones.** 2
- Corrosión.** Véase Corrosión oxidativa
- Corrosión oxidativa.** 65-66
- Cuerpo de revolución.** 235-239
- Cuerpos bidimensionales.** 156, 170
- centros de gravedad de. 220-221, 274
- Cuerpos compuestos.** 362, 375
- momentos de inercia de. 516-532
- Cuerpos de dos fuerzas.** 155, 345
- Cuerpos de tres fuerzas.** 154-155
- Cuerpos deformables.** mecánica de. 2
- Cuerpos rígidos en sistemas equivalentes de fuerzas.** 2-3, 3
- adición de pares. 111
 - componentes rectangulares del momento de una fuerza. 83-93, 147
 - descomposición de un sistema de fuerzas en una fuerza y un par. 122-123, 140-150
 - descomposición de una fuerza dada en una fuerza y un par. 111-112
 - fuerzas externas e internas. 74-75
 - introducción. 74
 - mecánica de. 2-3
 - momento de un par. 105, 140
 - momento de una fuerza alrededor de un eje dado. 105-106, 145
 - momento de una fuerza alrededor de un punto. 83-93, 147
 - pares equivalentes. 105-110, 149
 - principio de transmisibilidad, fuerzas equivalentes. 75-77, 140
 - problemas de computadora. 154-155
 - problemas de repaso. 151-153
 - producto escalar de dos vectores. 93-95, 147-149

Español 2**Fuerza (Fuerza o fuerza)**

fuerzas en el, 65

partículas en el, 59

Estabilidad del equilibrio, 582-591 594**Estática de partículas**, 14-70

fuerzas en el espacio, 45-63 65-66

fuerzas en el plano, 16-43 64-65

introducción, 14

problemas de computadora, 60-70

problemas de repaso, 67-68

resumen, 64-66

Fuerzas

múltiples de, 281-351

que contienen elementos de varias fuerzas, 316, 321-323

Flecha, 307 308**Flexibilidad de cables**, 353 404**Flexión (flexión)**

para, 155

Fuerzas

compatibilidad de, 2

mecánica de, 2

Forma arbitraria, determinación de los ejes

principales y momentos de inercia principales de un cuerpo de, 534-544

Fricción, 410-469

ángulos de, 415-416 461

coeficiente de, 446

coeficientes de, 412-414 422 453-455

en cables, 450-460

en choanoveros, 440-442

en cojinetes de empuje, 442-443

en cuñas, 430-431

en cueros, 442-443 446

en ejes, 440-442 446

fricción, 412

en ruedas, resistencia al rollover, 443-450

en superficies de fricción cuadrada, 431-440

estática y cinética, 461

Fuerza de fricción

límites de la, 412-414 421

problemas relacionados con, 416-430 461-462

introducción, 412

problemas de computadora, 467-469

problemas de repaso, 464-466

resumen, 461 46

valores máximos y mínimos de, 414

Fricción de Coulomb y/o Fricción seca**Fricción de ejes**, 440-442 446**Fuerza cortante**, 351-355

diagramas de, 365-373, 379-380

en una viga, 363-365 403-404

Fuerza de fricción estática, 412 446 461

ángulo de, 415 461

coeficiente de, 413 421 453 461

Fuerza de fricción estática, 412 446 461

ángulo de, 415 461

coeficiente de, 413 421 453 461

Fuerza 2-1, 5

de gravedad, 6, 580 594

definida por su magnitud y dos puntos sobre la línea de acción, 48-49

elástica, 50

sobre una partícula, resultante de dos fuerzas, 16-17 64

múltiples de, 10-11

Fuerzas

axiales, 354-355 357 403

concurrentes, 20-21 65 183 217

coplanarias, 65

cortantes, 354-355 363-373 404

en un resorte, 579-580 594

externas e internas, 74-75

hormonales, 45

paradas, 55-57

restreñidas, 159

sobre superficies sumergidas, 249-255

Fuerzas concurrentes, 125

en el espacio, adición de, 40-57 66

resultante de varias, 91-21 65

Fuerzas coplanarias, 125-126

resultante de varias, 65

Fuerzas de empuje, 371 417 501**Fuerzas de gravitación**, 580**Fuerzas de solda**, 331 347 564**Fuerzas distribuidas**

centradas y centros de gravedad, 220-243

áreas y líneas, 220-255

introducción, 220

problemas de computadora, 241-243

problemas de repaso, 236-240

resumen, 236

volúmenes, 236-271

momentos de inercia, 470-555

introducción, 470

momentos de inercia de áreas, 471-511

momentos de inercia de masas, 512-544 545 550

problemas de computadora, 535

problemas de repaso, 531-535

resumen, 531-535

Fuerzas elásticas, 504

Fuerzas en el espacio, 45-67, 65-66

adición de fuerzas concurrentes en el espacio, 49-57, 66

componentes rectangulares de una fuerza en el espacio, 49-58

momentos, 59-67, 65-66

diagramas de cuerpo libre, 66

equilibrio de una partícula en el espacio, 57-63, 66

fuerza definida por su magnitud y dos puntos sobre su línea de acción, 49-50

Fuerzas en un plano, 16-45, 64-65

adición de fuerzas mediante la suma de componentes X y Y , 30-35

adición de vectores, 16-20

componentes rectangulares de una fuerza, vectores unitarios, 27-29, 64

descomposición de una fuerza en sus componentes, 21-27, 64

equilibrio de una partícula, 35-36

Fuerza sobre una partícula, equilibrio de dos fuerzas, 61-64

primera ley del movimiento de Newton, 36

problemas relacionados con el equilibrio de una partícula, diagramas de cuerpo libre, 36-45

resultante de varias fuerzas concurrentes, 30-35, 65

resultante de varias fuerzas coplanares, 65

vectores, 16-18

Fuerzas en vigas y cables, 383-409

cables, 383-402

Fuerzas internas en elementos, 354-361

introducción, 354

momentos de flexión, 361-369

momentos de torsión, 369-373

resistencia, 361-369

vigas, 362-382

Fuerzas equivalentes, principios de transmutabilidad, 75-77, 146

Fuerzas externas, 1-5, 7, 40, 361

Fuerzas hidrostáticas, 491

Fuerzas internas, 74-75, 77-78, 248, 343, 356-357

en elementos, 354-361

en elementos de varias fuerzas, 323-324, 347-351, 361

en elementos rectos de dos fuerzas, 403

Fuerzas paralelas, 127-128, 132

G

Grav, radio de, 458-462, 513, 545

Grados de libertad, 585

Grand Viaduc de Millau, 352-353

Gravedad, fuerza de, 6

Gravitación

constante de, 1

fuerza de, 6, 540-541

ley de la, 4

I

Impulso, 2

Inertial, 2

I

Inercia. *Véase también* Momentos de inercia; Producto de inercia

capacidad de, 532-533, 552

productos masa de, 534-539

Integración

simple, 236, 262

triple, 262

I

Lagrange, 2

Ley del paralelogramo para la adición de fuerzas, 3, 17-24-27, 64

Libertad, grados de, 381-383

Líneas. *Véase* Áreas y líneas

Llave de torsión, 150

paso de una, 133

Locomotora, 410-411

Locomotor de tren, 410-411

Longitud, 5

unidades de, 10

M

Máquinas, 311-344, 347

reales, eficiencia mecánica de, 364-377, 547

Mareas y máquinas, 247, 316-344, 347

análisis de un marino, 316-317, 347

estructuras que contienen elementos de varias fuerzas, 316

máquinas, 311-344, 347

marina que dejan de ser rígidas cuando se separan de sus apoyos, 317-334

masa, 2-3, 5

unidades de, 11

Masa

momentos de inercia de, 472, 542-546, 548-550

productos de inercia de, 534-539

Mecánica

elementos y principios fundamentales, 10

conversión de un sistema de unidades a otro, 10-11

de cuerpos deformables, 2

de cuerpos rígidos, 2

de fluidos, 2

- deflexión, 3
 - exactitud numérica, 13
 - método para la resolución de problemas, 11-13
 - quebrantamiento, 2
 - relativista,
 - secciónes de unidades, 3-13
 - Moments-resistances, 1-2
 - Método de las secciones, análisis de armaduras
 - constante ϕ , 384-385, 386
 - Método de los nodos, análisis de armaduras mediante
 - ϕ , 390-392, 395-396
 - Método del trabajo virtual, 356-365
 - aplicaciones del principio del trabajo virtual,
 - 362-364
 - desplazamiento virtual, 361
 - durante un desplazamiento finito, 374-376, 383
 - energía potencial, 362-363, 394
 - equilibrio y energía potencial, 361
 - estabilidad del equilibrio, 392-393, 394
 - introducción, 357
 - máquinas reales, eficiencia mecánica, 364-377
 - 365
 - principio del trabajo virtual, 361-362, 392
 - problemas de computadora, 397-398
 - problemas de repaso, 395-397
 - resumen, 392-394
 - trabajo de un peso, 383
 - trabajo de una fuerza, 357-361, 374-379, 383
 - Mohr, Otto, 306
 - Momento de un par, 107-149
 - Momento de una fuerza
 - respecto de un eje dado, 96-106, 145
 - respecto de un punto, 83-92, 147
 - Momento flexor, 365-373
 - diagramas de, 365-371, 379
 - en una viga, 363-365, 383-384
 - Momento polar de inercia, 472-475-477-479, 491
 - Momento resultante, 123
 - Momentos de inercia, 470-555
 - círculo de Mohr para, 506-511, 547-548
 - de áreas compuestas, 494-497, 546
 - de un cuerpo con respecto a un eje arbitrario
 - producto de inercia de masa, 531-532,
 - 549-550
 - de un cuerpo tridimensional, determinación por
 - integración, 516
 - teorema, 493-494, 546
 - polar, 472-475-477, 479, 491
 - principales, 498-506, 541
 - problemas de computadora, 554-555
 - problemas de repaso, 551-552
 - resumen, 545-554
 - Momentos de inercia de áreas, 473-511
 - determinación del momento de inercia de un área
 - por integración, 474-475
 - círculo de Mohr para momentos y productos de
 - inercia, 506-511, 547-548
 - ejes principales y momentos principales de inercia,
 - 498-506, 541
 - momento polar de inercia, 473-475
 - teoremas de inercia de áreas compuestas,
 - 494-497, 546
 - productos de inercia, 497-498, 546-547
 - radio de giro de un área, 476-482
 - segundo momento o momento de inercia de un
 - área, $A^2 + I^2$
 - teorema de los ejes paralelos, 493-494, 546
 - Momentos de inercia de masa, 512-544, 549-550
 - de áreas compuestas, 494-497
 - de placas delgadas, 515-516, 549
 - de un cuerpo con forma arbitraria, 534-544
 - de un cuerpo con respecto a un eje arbitrario,
 - productos de inercia de masa, 531-532,
 - 549-550
 - de un cuerpo tridimensional por integración, 516
 - ejes principales de inercia, 532-533, 550
 - elipsoide de inercia, 532-533, 550
 - teorema de los ejes paralelos, 514, 549
 - Momentos principales de inercia, 498-506, 547
 - Movimiento
 - momento, 414-417, 422-462
 - primera ley del, 36
 - Movimiento relativo, 417
- N**
- National Institute of Standards and Technology, 1
 - Newton, Sir Isaac, 2
 - Núcleos Atómicos en Método de los nodos
 - en secciones de unidades de carga, 362-364
- O**
- Órigen, 2
- P**
- Párrafo, 238
 - Paras
 - relación de, 11
 - aplicaciones, 108
 - elementos, 108-110, 113-146
 - momento de, 107-149
 - representados mediante vectores, 110-114
 - Paras resultantes, 125
 - Partículas, 3
 - en el espacio tridimensional, 39

- fricción, 461-463
- fuerzas distribuidas
 - centroides y centros de gravedad, 274-277
 - momentos de inercia, 545-550
- fuerzas en vigas y cables, 403-405
- método del trabajo virtual, 502-504
- Revolución
 - de un cuerpo, 538-540
 - superficie de, 538-540
- Unidad
 - de longitud, 5-8, 10, 51, 55
 - de Torricelli, 52-53
 - de Torricelli (carga), 352-353
- Rotación, 7-9
- S
 - Segundo momento de inercia de un área, 472-474, 476
 - Simetría, 539
 - de la elipse, 481
 - planos de, 258, 262, 276-277
 - Sistema Internacional de Unidades (unidades SI), 5-8
 - unidades de área y volumen, 5-8
 - utilización en la mecánica, 8
 - Sistemas de fuerzas equivalentes, 124-146, 150
 - Sistemas de unidades, 5-10
 - Sistema Internacional de Unidades (unidades SI), 5-8
 - de uso común en Estados Unidos, 9-10, 12
 - Sistemas equipolentes de vectores, 124
 - Sistemas fuerza-par, 74, 112, 129-130, 357
 - Soluciones analíticas, 30-40
 - Soluciones gráficas, 23, 30-36
 - Soluciones trigonométricas, 22-23, 30
 - Soluciones, homopejo anticipada, 297
 - Suavidad
 - de un cuerpo, 538-540
 - de revolución, 238-240
 - de rotación, 412-414
 - de rotación: fuerzas sobre, 248-258, 276
 - Supuesto, 362-363
 - T
 - Tensión, 340, 354-355, 383-385, 390
 - valores máximos y mínimos de, 384
 - Teorema de los ejes paralelos, 453-454, 490, 514, 522, 540, 549
 - Teorema de Varignon, 53, 109-110
 - Teoremas de
 - los ejes paralelos, 483-484, 546
 - Pappus-Guldinus, 220, 238-247, 276
 - Varignon, 83
 - Tiempo, 2-3, 5
 - Tornillos
 - autoajustables, 432
 - de roscas cuadradas, 440-449, 462
 - Trabajo, 555-559. *Véase también* Método del trabajo virtual
 - de un peso, 561
 - de una fuerza, 557-561
 - de un sistema de coordenadas, 561-563
 - Trabajo: *Véase* Método del trabajo virtual
 - Traslación, 45
 - Transmisibilidad, principio de, 3, 74-77, 146
 - Tres leyes fundamentales de Newton, 3-4, 12, 146
 - ley de la gravitación, 4
 - primera ley del movimiento, 36
 - tercera ley, 200, 316
 - Tres vectores, producto triple mixto de, 96-97, 149
 - Triángulo de fuerzas, 7
 - Triángulo de fuerza, 37-154
 - U
 - Unidades
 - de área y volumen (unidades SI), 5-8
 - de fuerza, 10-11
 - de longitud, 10
 - de masa, 11
 - de uso común en Estados Unidos, 9-10, 12
 - gravitacionales, 9
 - sistema consistente de, 5
 - Unidades cinéticas, 5
 - Unidades derivadas, 5
 - Unidades SI. *Véase* Sistema Internacional de Unidades
 - V
 - Vectores, 3, 17-18, 52
 - adición de, 18-20
 - coplanares, 20
 - de posición, 81-84, 147
 - desplazamientos, 15, 76
 - graves y libres, 17-18, 107-113
 - par, 146
 - producto triple mixto de tres, 96-97, 145
 - representación de pares mediante, 110-111
 - sistema equipolente de, 124
 - sustracción de, 19
 - unitarios, 28
 - Vectores fijos, 17
 - Vectores libres, 16, 109, 113
 - Vectores iguales, 17
 - Vectores negativos, 16
 - Vigas
 - cortante y momento flector en, 363-365, 404

diagramas de cortante y momento flector en.
965-973
diferentes tipos de cargas y apoyos, 362-363
en voladizo, 404
fuerza en, 362-363
momento cortante y flector en una viga, 363-365,
404
relaciones entre carga, momento cortante y flector
173-183, 404
simplemente apoyada, 404

Vigas salientes, 404
Volumen, unidades de SI, 3-8
Volúmenes, 259-273
centro de gravedad de un cuerpo tridimensional,
270-281, 277-278
áreas de la z (Q_x , Q_y), 273, 276
en xy y yz planos, Q_x , Q_y
en yz plano de centros de Q_x por integración,
262-273, 277

Respostas a problemas

There is a significant 4 hour difference in the average number of hours spent in the gymnasium between the two groups. The difference is statistically significant at the 0.05 level.

CAPITULO 2

- 2.1 1.5 N \approx 2
 2.2 77.1 lb \approx 35.4°
 2.3 139 lb \approx 8° 40'
 2.4 $\alpha \approx 76.1^\circ$ $\beta \approx 33.6$ lb
 2.5 $\alpha \approx 32.4^\circ$ $\beta \approx 57.2$ N
 2.6 $\alpha = 3^\circ$ $\beta = 4^\circ$ $\gamma = 1^\circ$
 2.7 $\alpha = 40.6$ N $\beta = 10$ N
 2.8 $\alpha \approx 30.7$ lb $\beta \approx 34.6$ lb
 2.9 $\alpha \approx 71$ N $\beta \approx 45.7$ N
 2.10 $\alpha \approx 30.6$ lb $\beta \approx 27.3$ lb
 2.11 77.1 lb \approx 8° 40'
 2.12 139 lb \approx 8° 40'
 2.13 $\alpha = 0$ N $\beta = 75$ lb
 2.14 $\alpha = 7$ N $\beta = 3$ lb
 2.15 500 N $\beta = 10$ N $\gamma = 400$ N $\alpha = 42.4$ N $\beta = 22.4$ N
 2.16 $\alpha = 30$ N $\beta = 50$ N $\gamma = 100$ N
 2.17 20 lb $\beta = 21.0$ lb $\gamma = 50$ lb $\alpha = 54.00$ lb
 2.18 50 lb $\beta = 51$ lb $\gamma = 40$ lb $\alpha = 45^\circ$
 2.19 40 lb $\beta = 20.0$ lb $\gamma = 31.6$ lb $\alpha = 56.3$ lb
 2.20 100 lb $\beta = 34.4$ lb $\gamma = 25.4$ lb
 2.21 $\alpha = 5^\circ$ $\beta = 4^\circ$ $\gamma = 1^\circ$
 2.22 $\alpha = 2$ lb $\beta = 3$ lb $\gamma = 4$ lb
 2.23 $\alpha = 40$ lb $\beta = 30$ lb $\gamma = 50$ lb
 2.24 $\alpha \approx 40.0$ lb $\beta \approx 30.0$ lb
 2.25 $\alpha \approx 51$ N $\beta \approx 45.7$ N
 2.26 554 N $\beta = 71.5^\circ$
 2.27 3000 lb \approx 56.6°
 2.28 220 lb \approx 68.3°
 2.29 203 lb \approx 74.6°
 2.30 $\alpha \approx 21.7^\circ$ $\beta \approx 22.9$ N
 2.31 $\alpha \approx 54.0$ N $\beta \approx 30.0$ N
 2.32 $\alpha \approx 50.3^\circ$ $\beta \approx 20.4$ lb
 2.33 $\alpha \approx 2.4$ kN $\beta \approx 75.3$ N
 2.34 $\alpha \approx 40.5$ N $\beta = 10$ N
 2.35 $\alpha = 0$ lb $\beta = 0$ lb
 2.36 $\alpha = 0$ lb $\beta = 0$ lb
 2.37 $\alpha = 1$ lb $\beta = 1$ lb
 2.38 $\alpha = 1$ lb $\beta = 1$ lb
 2.39 $\alpha = 1$ lb $\beta = 1$ lb
 2.40 $\alpha = 1$ lb $\beta = 1$ lb
 2.41 $\alpha = 1$ lb $\beta = 1$ lb
 2.42 $\alpha = 1$ lb $\beta = 1$ lb
 2.43 $\alpha = 1$ lb $\beta = 1$ lb
 2.44 $\alpha = 1$ lb $\beta = 1$ lb
 2.45 $\alpha = 1$ lb $\beta = 1$ lb
 2.46 $\alpha = 1$ lb $\beta = 1$ lb
 2.47 $\alpha = 1$ lb $\beta = 1$ lb
 2.48 $\alpha = 1$ lb $\beta = 1$ lb
 2.49 $\alpha = 1$ lb $\beta = 1$ lb
 2.50 $\alpha = 1$ lb $\beta = 1$ lb
 2.51 $\alpha = 1$ lb $\beta = 1$ lb
 2.52 $\alpha = 1$ lb $\beta = 1$ lb
 2.53 $\alpha = 1$ lb $\beta = 1$ lb
 2.54 $\alpha = 1$ lb $\beta = 1$ lb
 2.55 $\alpha = 1$ lb $\beta = 1$ lb
 2.56 $\alpha = 1$ lb $\beta = 1$ lb
 2.57 $\alpha = 1$ lb $\beta = 1$ lb
 2.58 $\alpha = 1$ lb $\beta = 1$ lb
 2.59 $\alpha = 1$ lb $\beta = 1$ lb
 2.60 $\alpha = 1$ lb $\beta = 1$ lb
 2.61 $\alpha = 1$ lb $\beta = 1$ lb
 2.62 $\alpha = 1$ lb $\beta = 1$ lb
 2.63 $\alpha = 1$ lb $\beta = 1$ lb
 2.64 $\alpha = 1$ lb $\beta = 1$ lb
 2.65 $\alpha = 1$ lb $\beta = 1$ lb
 2.66 $\alpha = 1$ lb $\beta = 1$ lb
 2.67 $\alpha = 1$ lb $\beta = 1$ lb
 2.68 $\alpha = 1$ lb $\beta = 1$ lb
 2.69 $\alpha = 1$ lb $\beta = 1$ lb
 2.70 $\alpha = 1$ lb $\beta = 1$ lb
 2.71 $\alpha = 1$ lb $\beta = 1$ lb
 2.72 $\alpha = 1$ lb $\beta = 1$ lb
 2.73 $\alpha = 1$ lb $\beta = 1$ lb
 2.74 $\alpha = 1$ lb $\beta = 1$ lb
 2.75 $\alpha = 1$ lb $\beta = 1$ lb
 2.76 $\alpha = 1$ lb $\beta = 1$ lb
 2.77 $\alpha = 1$ lb $\beta = 1$ lb
 2.78 $\alpha = 1$ lb $\beta = 1$ lb
 2.79 $\alpha = 1$ lb $\beta = 1$ lb
 2.80 $\alpha = 1$ lb $\beta = 1$ lb
 2.81 $\alpha = 1$ lb $\beta = 1$ lb
 2.82 $\alpha = 1$ lb $\beta = 1$ lb
 2.83 $\alpha = 1$ lb $\beta = 1$ lb
 2.84 $\alpha = 1$ lb $\beta = 1$ lb
 2.85 $\alpha = 1$ lb $\beta = 1$ lb
 2.86 $\alpha = 1$ lb $\beta = 1$ lb
 2.87 $\alpha = 1$ lb $\beta = 1$ lb
 2.88 $\alpha = 1$ lb $\beta = 1$ lb
 2.89 $\alpha = 1$ lb $\beta = 1$ lb
 2.90 $\alpha = 1$ lb $\beta = 1$ lb
 2.91 $\alpha = 1$ lb $\beta = 1$ lb
 2.92 $\alpha = 1$ lb $\beta = 1$ lb
 2.93 $\alpha = 1$ lb $\beta = 1$ lb
 2.94 $\alpha = 1$ lb $\beta = 1$ lb
 2.95 $\alpha = 1$ lb $\beta = 1$ lb
 2.96 $\alpha = 1$ lb $\beta = 1$ lb
 2.97 $\alpha = 1$ lb $\beta = 1$ lb
 2.98 $\alpha = 1$ lb $\beta = 1$ lb
 2.99 $\alpha = 1$ lb $\beta = 1$ lb
 3.00 $\alpha = 1$ lb $\beta = 1$ lb

- [illegible]

- 3.125 a) $\vec{B} = -125.3 \text{ N/j} + 150.0 \text{ N/k}$
 $M = 142.4 \text{ N} \cdot \text{m}$ b) $\vec{B} = 34.0 \text{ N} \cdot \text{m/j} + 12.3 \text{ N} \cdot \text{m/k}$
 En sentido de las manecillas del reloj
- 3.127 1. 43% 2. 1.57 m de CQ y 3.05 m de QP
- 3.128 1. 32 m de HQ y 10.5 m de QP
- 3.129 a) 20 lb b) 12.00 lb a la derecha de A y 7.04 lb debajo de B
- 3.130 a) 0.722 lb b) 70.6 lb
- 3.131 a) 2000 N b) 1.77 lb c) El eje de la llave es paralelo al eje $x = 0, y = -0.5$
- 3.132 a) $\vec{F}_1 = 121.0 \text{ N/j}$ b) 0.57 m c) El eje de la llave es paralelo al eje $x = 0, y = 0.10$
- 3.133 a) $\vec{F}_1 = 164.0 \text{ N/j}$ b) 0.077 m
- 3.134 a) 24 lb b) 1958 N
- 3.135 $\vec{B} = 124.0 \text{ N/i} + 136.1 \text{ N/j} - 49.0 \text{ N/k}$
 $\vec{r} = 0.10 \text{ m} \cdot \vec{i} + 0.30 \text{ m} \cdot \vec{j}$
- 3.137 $\vec{F}_1 = M_1/b\vec{i} + M_2\vec{j} + M_3/b\vec{k}$ $\vec{F}_2 = -M_1/b\vec{i} - M_2\vec{j} + M_3\vec{k}$
- 3.138 4' 46.2 N m f) 105.4 N \approx 23.5'
- 3.139 a) 1.5 N b) 1.4 lb c) 0.31 lb d) 0.07 lb
- 3.140 25 lb
- 3.141 a) 51.7 lb b) 10.3 lb c) 67.2 lb d) 3.1
- 3.142 $\vec{F} = 78.7 \text{ N}$ $\vec{r} = 0.1 \text{ m} \cdot \vec{k}$
- 3.143 $M = 12.95 \text{ N} \cdot \text{m}$ (19.16 N m) 13.13 N m
- 3.144 a) 445 lb \approx 70 lb b) 44.8 lb a la derecha de A. A. 22.0
- 3.145 a) $\vec{F}_1 = -140.0 \text{ N/k}$ $\vec{F}_2 = -140.0 \text{ N/i} + 140.0 \text{ N/k}$
 b) $\vec{r}_1 = 0, \vec{r}_2 = -40.0 \text{ N}$ c) Cuando la rampa está en posición vertical.
- 3.146 1) $\beta = 30^\circ$ $\alpha = 44.1^\circ$
 $\beta = 30^\circ$ $\alpha = 44.1^\circ$
 $\beta = 30^\circ$ $\alpha = 44.1^\circ$
- 3.147 a) 0 b) 4 c) 19.0 N
 d) 0 e) 4 f) 19.0 N
 g) 2 m d) $M = 9.5 \text{ N} \cdot \text{m}$
- 3.148 $\vec{r}_{AB} = 30.0 \text{ cm}$ $\vec{r}_{BP} = 8.00 \text{ m}$ $\vec{r} = 75 \text{ cm}$

CAPÍTULO 4

- 4.1 a) 125 lb f) 173 lb
- 4.2 20 N
- 4.3 20 m
- 4.4 a) 145 lb f) 1400 lb
 b) 4.47 kN c) 3.2 kN
- 4.5 a) 3.05 kN b) 6.52 kN
- 4.6 150 lb man $\leq \vec{F} \leq 400 \text{ lb}$
- 4.7 0.000 kg $\leq \vec{F} \leq 40.0 \text{ kg}$
- 4.8 a) 50 kN $\leq \vec{F} \leq 94.0 \text{ kN}$
 b) 7.0 m $\leq \vec{F} \leq 10.0 \text{ m}$
- 4.9 a) $\vec{F}_{AB} = 60.0 \text{ N}$ b) $\vec{C} = 12.53 \text{ N}$ \approx 60.8'
- 4.10 a) 30.0 lb b) 2.00 lb \approx 22.0'
- 4.11 25 lb
- 4.12 a) 140 kN b) 100 kN
- 4.13 a) $\vec{A} = 50.0 \text{ N}$ \approx 10.0' b) $\vec{B} = 70 \text{ N}$ \approx 10.0'
 c) $\vec{A} = 10 \text{ N}$ \approx 10.0' b) $\vec{B} = 85 \text{ N}$ \approx 10.0'
- 4.14 a) $\vec{A} = 4 \text{ lb}$ $\vec{r}_A = 0$ b) $\vec{B} = 30.0 \text{ lb}$
 c) $\vec{A} = 30.0 \text{ lb}$ \approx 4.4' b) $\vec{B} = 74.6 \text{ lb}$ \approx 50.0'
- 4.15 a) $\vec{A} = 0$ b) $\vec{r}_B = 0$ c) $\vec{A} = 0$
 d) $\vec{A} = 25 \text{ lb}$ \approx 64.0' b) $\vec{B} = 59.8 \text{ lb}$ \approx 30.2'
- 4.16 100 lb c) 2 kN d) 15'

- 4.17 a) 72.4 N b) 970 N c)
- 4.18 a) 400 N b) $\vec{C} = 455 \text{ N}$ \approx 40.1'
- 4.19 a) 573 lb b) 1.55 kN \approx 35.0
- 4.20 $\vec{F} = 540 \text{ N}$ c) $\vec{F} = 540 \text{ N}$ \approx 20.0
- 4.21 $\vec{F} = 0$ c) $\vec{F} = 0$ d) $\vec{F} = 0$
- 4.22 1000 N c) 1.0'
- 4.23 $\vec{A} = 40.0 \text{ lb}$ b) $\vec{B} = 16.0 \text{ lb}$ c) $\vec{C} = 173.2 \text{ lb}$ \approx 60.0'
- 4.24 $\vec{F}_{AB} = 90 \text{ lb}$ b) $\vec{A} = 18.75 \text{ lb}$ c) $\vec{D} = 18.75 \text{ lb}$
- 4.25 a) 1.45 N b) 1.00 N c) 1.00 N
- 4.26 $\vec{F}_{AB} = 3.50 \text{ N}$ $\vec{F}_{AC} = 10.0 \text{ N}$ $\vec{D} = 3.50 \text{ N}$ c)
- 4.27 $\vec{F} = 160.0 \text{ N}$ $\vec{A} = 160.0 \text{ N}$ $\vec{r}_A = 0$ $\vec{C} = 160.0 \text{ N}$ \approx 36.0'
- 4.28 $\vec{F} = 60.0 \text{ N}$ $\vec{A} = 40.0 \text{ N}$ $\vec{r}_A = 0$ $\vec{C} = 180.0 \text{ N}$ \approx 30.0'
- 4.29 a) $\vec{A} = 78.5 \text{ N}$ $M_A = 123.0 \text{ N} \cdot \text{m}$
 b) $\vec{A} = 11.0 \text{ N}$ \approx 45.0' $M_A = 123.6 \text{ N} \cdot \text{m}$
 c) $\vec{A} = 10 \text{ N}$ \approx 17.0 m
- 4.30 $\vec{C} = 2.0 \text{ lb}$ b) \approx 45.0' $M_C = 40.0 \text{ lb} \cdot \text{m}$
- 4.31 $\vec{A} = 45 \text{ N}$ \approx 52.0' $M_A = 4.0 \text{ N} \cdot \text{m}$
- 4.32 a) $\vec{D} = 20.0 \text{ lb}$ b) $M_D = 20.0 \text{ lb} \cdot \text{m}$
 c) $\vec{D} = 10.0 \text{ lb}$ $M_D = 30.0 \text{ lb} \cdot \text{m}$
- 4.33 $\vec{C} = 1.05 \text{ N}$ \approx 99.3' $M_C = 75.0 \text{ N} \cdot \text{m}$
- 4.34 332 kN $\leq \vec{F} \leq 1.77 \text{ kN}$
- 4.35 a) $\vec{B} = 2.00 \text{ W/20'}$ b) $\vec{B} = 0$
- 4.36 a) $\vec{F} = W/4$ b) $\vec{B} = 3/4 W$
- 4.37 a) $\vec{B} = W/2$ b) $\vec{B} = 3/4 W$ c) $\vec{B} = W/2$
- 4.38 a) $\vec{B} = W/2$ b) $\vec{B} = 3/4 W$ c) $\vec{B} = W/2$
- 4.39 a) $\vec{B} = W/2$ b) $\vec{B} = 3/4 W$ c) $\vec{B} = W/2$
- 4.40 a) $\vec{B} = W/2$ b) $\vec{B} = 3/4 W$ c) $\vec{B} = W/2$
- 4.41 a) $\vec{B} = W/2$ b) $\vec{B} = 3/4 W$ c) $\vec{B} = W/2$
- 4.42 a) $\vec{B} = W/2$ b) $\vec{B} = 3/4 W$ c) $\vec{B} = W/2$
- 4.43 a) $\vec{B} = W/2$ b) $\vec{B} = 3/4 W$ c) $\vec{B} = W/2$
- 4.44 a) $\vec{B} = W/2$ b) $\vec{B} = 3/4 W$ c) $\vec{B} = W/2$
- 4.45 a) $\vec{B} = W/2$ b) $\vec{B} = 3/4 W$ c) $\vec{B} = W/2$
- 4.46 a) $\vec{B} = W/2$ b) $\vec{B} = 3/4 W$ c) $\vec{B} = W/2$
- 4.47 a) $\vec{B} = W/2$ b) $\vec{B} = 3/4 W$ c) $\vec{B} = W/2$
- 4.48 a) $\vec{B} = W/2$ b) $\vec{B} = 3/4 W$ c) $\vec{B} = W/2$
- 4.49 a) $\vec{B} = W/2$ b) $\vec{B} = 3/4 W$ c) $\vec{B} = W/2$
- 4.50 a) $\vec{B} = W/2$ b) $\vec{B} = 3/4 W$ c) $\vec{B} = W/2$
- 4.51 a) $\vec{B} = W/2$ b) $\vec{B} = 3/4 W$ c) $\vec{B} = W/2$
- 4.52 a) $\vec{B} = W/2$ b) $\vec{B} = 3/4 W$ c) $\vec{B} = W/2$
- 4.53 a) $\vec{B} = W/2$ b) $\vec{B} = 3/4 W$ c) $\vec{B} = W/2$
- 4.54 a) $\vec{B} = W/2$ b) $\vec{B} = 3/4 W$ c) $\vec{B} = W/2$
- 4.55 a) $\vec{B} = W/2$ b) $\vec{B} = 3/4 W$ c) $\vec{B} = W/2$
- 4.56 a) $\vec{B} = W/2$ b) $\vec{B} = 3/4 W$ c) $\vec{B} = W/2$
- 4.57 a) $\vec{B} = W/2$ b) $\vec{B} = 3/4 W$ c) $\vec{B} = W/2$
- 4.58 a) $\vec{B} = W/2$ b) $\vec{B} = 3/4 W$ c) $\vec{B} = W/2$
- 4.59 a) $\vec{B} = W/2$ b) $\vec{B} = 3/4 W$ c) $\vec{B} = W/2$
- 4.60 a) $\vec{B} = W/2$ b) $\vec{B} = 3/4 W$ c) $\vec{B} = W/2$
- 4.61 a) $\vec{B} = W/2$ b) $\vec{B} = 3/4 W$ c) $\vec{B} = W/2$
- 4.62 a) $\vec{B} = W/2$ b) $\vec{B} = 3/4 W$ c) $\vec{B} = W/2$
- 4.63 a) $\vec{B} = W/2$ b) $\vec{B} = 3/4 W$ c) $\vec{B} = W/2$
- 4.64 a) $\vec{B} = W/2$ b) $\vec{B} = 3/4 W$ c) $\vec{B} = W/2$
- 4.65 a) $\vec{B} = W/2$ b) $\vec{B} = 3/4 W$ c) $\vec{B} = W/2$
- 4.66 a) $\vec{B} = W/2$ b) $\vec{B} = 3/4 W$ c) $\vec{B} = W/2$
- 4.67 a) $\vec{B} = W/2$ b) $\vec{B} = 3/4 W$ c) $\vec{B} = W/2$
- 4.68 a) $\vec{B} = W/2$ b) $\vec{B} = 3/4 W$ c) $\vec{B} = W/2$
- 4.69 a) $\vec{B} = W/2$ b) $\vec{B} = 3/4 W$ c) $\vec{B} = W/2$
- 4.70 a) $\vec{B} = W/2$ b) $\vec{B} = 3/4 W$ c) $\vec{B} = W/2$
- 4.71 a) $\vec{B} = W/2$ b) $\vec{B} = 3/4 W$ c) $\vec{B} = W/2$
- 4.72 a) $\vec{B} = W/2$ b) $\vec{B} = 3/4 W$ c) $\vec{B} = W/2$
- 4.73 a) $\vec{B} = W/2$ b) $\vec{B} = 3/4 W$ c) $\vec{B} = W/2$
- 4.74 a) $\vec{B} = W/2$ b) $\vec{B} = 3/4 W$ c) $\vec{B} = W/2$
- 4.75 a) $\vec{B} = W/2$ b) $\vec{B} = 3/4 W$ c) $\vec{B} = W/2$
- 4.76 a) $\vec{B} = W/2$ b) $\vec{B} = 3/4 W$ c) $\vec{B} = W/2$
- 4.77 a) $\vec{B} = W/2$ b) $\vec{B} = 3/4 W$ c) $\vec{B} = W/2$
- 4.78 a) $\vec{B} = W/2$ b) $\vec{B} = 3/4 W$ c) $\vec{B} = W/2$
- 4.79 a) $\vec{B} = W/2$ b) $\vec{B} = 3/4 W$ c) $\vec{B} = W/2$
- 4.80 a) $\vec{B} = W/2$ b) $\vec{B} = 3/4 W$ c) $\vec{B} = W/2$
- 4.81 a) $\vec{B} = W/2$ b) $\vec{B} = 3/4 W$ c) $\vec{B} = W/2$
- 4.82 a) $\vec{B} = W/2$ b) $\vec{B} = 3/4 W$ c) $\vec{B} = W/2$
- 4.83 a) $\vec{B} = W/2$ b) $\vec{B} = 3/4 W$ c) $\vec{B} = W/2$
- 4.84 a) $\vec{B} = W/2$ b) $\vec{B} = 3/4 W$ c) $\vec{B} = W/2$
- 4.85 a) $\vec{B} = W/2$ b) $\vec{B} = 3/4 W$ c) $\vec{B} = W/2$
- 4.86 a) $\vec{B} = W/2$ b) $\vec{B} = 3/4 W$ c) $\vec{B} = W/2$
- 4.87 a) $\vec{B} = W/2$ b) $\vec{B} = 3/4 W$ c) $\vec{B} = W/2$
- 4.88 a) $\vec{B} = W/2$ b) $\vec{B} = 3/4 W$ c) $\vec{B} = W/2$
- 4.89 a) $\vec{B} = W/2$ b) $\vec{B} = 3/4 W$ c) $\vec{B} = W/2$
- 4.90 a) $\vec{B} = W/2$ b) $\vec{B} = 3/4 W$ c) $\vec{B} = W/2$
- 4.91 a) $\vec{B} = W/2$ b) $\vec{B} = 3/4 W$ c) $\vec{B} = W/2$
- 4.92 a) $\vec{B} = W/2$ b) $\vec{B} = 3/4 W$ c) $\vec{B} = W/2$
- 4.93 a) $\vec{B} = W/2$ b) $\vec{B} = 3/4 W$ c) $\vec{B} = W/2$
- 4.94 a) $\vec{B} = W/2$ b) $\vec{B} = 3/4 W$ c) $\vec{B} = W/2$
- 4.95 a) $\vec{B} = W/2$ b) $\vec{B} = 3/4 W$ c) $\vec{B} = W/2$
- 4.96 a) $\vec{B} = W/2$ b) $\vec{B} = 3/4 W$ c) $\vec{B} = W/2$
- 4.97 a) $\vec{B} = W/2$ b) $\vec{B} = 3/4 W$ c) $\vec{B} = W/2$
- 4.98 a) $\vec{B} = W/2$ b) $\vec{B} = 3/4 W$ c) $\vec{B} = W/2$
- 4.99 a) $\vec{B} = W/2$ b) $\vec{B} = 3/4 W$ c) $\vec{B} = W/2$
- 4.100 a) $\vec{B} = W/2$ b) $\vec{B} = 3/4 W$ c) $\vec{B} = W/2$

- 6.10 $F_{AB} = 40 \text{ kN}$ C $F_{BC} = 5 \text{ kN}$ C $F_{CD} = 0$
 $F_{DE} = 7.07 \text{ kN}$ C $F_{EF} = 2.40 \text{ kN}$ C $F_{FG} = 7.83 \text{ kN}$ T
 $F_{GH} = 1.06 \text{ kN}$ T $F_{HI} = 5.03 \text{ kN}$ C $F_{IJ} = 0.599 \text{ kN}$ C
 $F_{JK} = 3.10 \text{ kN}$ T
- 6.20 $F_{AC} = 4.50 \text{ kN}$ T $F_{AD} = 5.33 \text{ kN}$ C $F_{AE} = 4.67 \text{ kN}$ T
 $F_{BC} = F_{BD} = F_{BE} = 3.25 \text{ kN}$ T $F_{CF} = F_{DF} = F_{EF} = 0$
 $F_{FG} = 4.75 \text{ kN}$ T
- 6.22 $F_{AB} = 2.24 \text{ kN}$ C $F_{AC} = F_{AD} = 2.40 \text{ kN}$ T $F_{AE} = F_{AF} = 0$
 $F_{BD} = 1.73 \text{ kN}$ C $F_{BE} = 4.47 \text{ kN}$ C $F_{BC} = 6.00 \text{ kN}$ C
 $F_{DE} = 2.40 \text{ kN}$ C $F_{DF} = 2.24 \text{ kN}$ T $F_{EF} = 1.73 \text{ kN}$ T
- 6.24 $F_{AC} = 3.40 \text{ kN}$ T $F_{AD} = 2.40 \text{ kN}$ C $F_{AE} = 6.75 \text{ kN}$ C
 $F_{BD} = 2.40 \text{ kN}$ T $F_{BE} = 3.60 \text{ kN}$ T $F_{BC} = 2.40 \text{ kN}$
 $F_{DE} = 4.47 \text{ kN}$ C $F_{DF} = 3.40 \text{ kN}$ C $F_{EF} = 3.30 \text{ kN}$ C
- 6.26 $F_{AB} = 9.30 \text{ kN}$ C $F_{AC} = 8.40 \text{ kN}$ T $F_{AD} = 3.26 \text{ kN}$ C
 $F_{AE} = 7.07 \text{ kN}$ C $F_{AF} = 3.46 \text{ kN}$ T $F_{BC} = 9.75 \text{ kN}$ T
 $F_{BD} = 2.14 \text{ kN}$ C $F_{BE} = 0.10 \text{ kN}$ C $F_{CD} = 2.23 \text{ kN}$ T
 $F_{CE} = F_{DE} = 0.20 \text{ kN}$ T $F_{EF} = F_{FG} = 0.20 \text{ kN}$ C
 $F_{FC} = F_{GE} = 0.60 \text{ kN}$ C $F_{AD} = 2.27 \text{ kN}$ T $F_{BE} = F_{CF} = 4$
 $F_{DE} = 3.33 \text{ kN}$ C $F_{EF} = 3.40 \text{ kN}$
- 6.27 $F_{AB} = 31.3 \text{ kips}$ C $F_{AC} = 26.3 \text{ kips}$ C $F_{AD} = 15.09 \text{ kips}$ T
 $F_{BC} = 4.50 \text{ kips}$ T $F_{BD} = 21.5 \text{ kips}$ T $F_{BE} = 23.0 \text{ kips}$ C
 $F_{CE} = 41.0 \text{ kips}$ T $F_{CF} = 48.0 \text{ kips}$ C $F_{DE} = 22.0 \text{ kips}$ T
 $F_{DF} = 33.3 \text{ kips}$ T $F_{EF} = 0$
- 6.30 $F_{AB} = 129.0 \text{ kN}$ T $F_{AC} = 36.4 \text{ kN}$ C $F_{AD} = F_{DE} = F_{EF} =$
 124 kN T $F_{BC} = F_{BE} = 138 \text{ kN}$ C $F_{CD} = 102 \text{ kN}$ C
- 6.29 Las armaduras del problema 6.32a en la carga armadura simple
- 6.30 Las armaduras del problema 6.32b en la carga armadura simple
- 6.31 a) BC CD DE EF FG b) AC BE DE EF FG
 c) AB FG
- 6.32 a) AB BF CK DJ EI FK GL b) FK GL
- 6.35 $F_{AB} = 500 \text{ lb}$ C $F_{BC} = 100 \text{ lb}$ T $F_{CD} = 100 \text{ lb}$ T $F_{DE} = 100 \text{ lb}$ T
- 6.36 $F_{AB} = F_{BC} = 461 \text{ N}$ C $F_{AC} = 076 \text{ N}$ C $F_{BC} = F_{CD} =$
 162.5 N T $F_{AD} = 241 \text{ N}$ T
- 6.37 $F_{AB} = F_{BC} = 2.50 \text{ kN}$ T $F_{AC} = 5.50 \text{ kN}$ C $F_{DE} = F_{EF} =$
 1.5 kN T $F_{AD} = 1.67 \text{ kN}$
- 6.38 $F_{AB} = F_{BC} = 1.05 \text{ kN}$ C $F_{AD} = 3.50 \text{ kN}$ T $F_{DE} = 2.00 \text{ kN}$ T
 $F_{BE} = F_{CE} = 3.50 \text{ kN}$ C $F_{BD} = F_{CD} = 0.50 \text{ kN}$ C
 $F_{DE} = 1.00 \text{ kN}$ T
- 6.39 $F_{AB} = 8.0 \text{ kN}$ C $F_{AC} = 10.6 \text{ kN}$ C $F_{AD} = 30.4 \text{ kN}$ C
 $F_{BC} = 0$ $F_{BE} = 160.0 \text{ kN}$ T $F_{BD} = 200 \text{ kN}$ T $F_{DE} = 72.5 \text{ kN}$ T
 $F_{CE} = 23.3 \text{ kN}$ C $F_{DE} = 120.0 \text{ kN}$ T
- 6.40 $F_{AB} = 0$ $F_{AC} = 103.5 \text{ N}$ T $F_{AD} = 1.18 \text{ N}$ C $F_{DE} = F_{EF} = 0$
 $F_{BD} = 600 \text{ N}$ T $F_{BE} = 32.5 \text{ N}$ T $F_{CE} = 700 \text{ N}$ C
 $F_{DE} = 24 \text{ N}$ T
- 6.41 $F_{AC} = 4.00 \text{ kN}$ T $F_{AD} = 2.60 \text{ kN}$ T $F_{DE} = 4.00 \text{ kN}$ T
 $F_{BC} = 7.50 \text{ kN}$ T $F_{BD} = 3.00 \text{ kN}$ C $F_{CD} = 0.00 \text{ kN}$ C
- 6.42 $F_{AB} = 2.0 \text{ kN}$ T $F_{AC} = 2.0 \text{ kN}$ T
- 6.43 $F_{AB} = 4.50 \text{ kN}$ C $F_{AC} = 2.0 \text{ kN}$ C
- 6.44 $F_{BC} = 3.0 \text{ kN}$ T $F_{CD} = 1.047 \text{ kN}$ C $F_{DE} = 1.79 \text{ kN}$ C
- 6.45 $F_{AB} = 3.44 \text{ kN}$ T $F_{BC} = 3.79 \text{ kN}$ C $F_{DE} = 3.35 \text{ kN}$ C
- 6.46 $F_{AB} = 10.95 \text{ kips}$ C $F_{AC} = 3.33 \text{ kips}$ C $F_{CD} = 10.02 \text{ kips}$ T
- 6.47 $F_{AB} = 13.02 \text{ kips}$ T $F_{AC} = 0.80 \text{ kips}$ T $F_{DE} = 13.07 \text{ kips}$ C
- 6.48 $F_{AB} = 5.00 \text{ kN}$ C $F_{AC} = 2.0 \text{ kN}$ T $F_{DE} = 0.00 \text{ kN}$ C
- 6.49 $F_{AB} = 10.00 \text{ kN}$ C $F_{AC} = 4.92 \text{ kN}$ T $F_{DE} = 6.10 \text{ kN}$ T
- 6.50 $F_{AB} = 3.6 \text{ kN}$ C $F_{BC} = 0$ $F_{DE} = 50.1 \text{ kN}$ T
- 6.51 $F_{AC} = 75.0 \text{ kN}$ C $F_{CD} = 50.1 \text{ kN}$ T $F_{DE} = 69.7 \text{ kN}$ T
- 6.52 $F_{AB} = 5.20 \text{ kips}$ T $F_{AC} = 4.50 \text{ kips}$ T $F_{DE} = 11.60 \text{ kips}$ C
- 6.53 $F_{AB} = 17.45 \text{ kips}$ T $F_{DE} = 11.60 \text{ kips}$ C $F_{EF} = 16.45 \text{ kips}$ C
- 6.54 $F_{AB} = 1.74 \text{ kN}$ T $F_{AC} = 1.00 \text{ kN}$ T
- 6.55 $F_{AB} = 12.00 \text{ kN}$ T $F_{DE} = 0.00 \text{ kN}$ T

- 6.55 a) CF b) 0.95 kN T
- 6.56 a) 10 b) 0.5 kN T
- 6.57 $F_{AC} = 5.48 \text{ kips}$ T $F_{AD} = 4.25 \text{ kips}$ T
- 6.58 $F_{CE} = 3.43 \text{ kips}$ T $F_{DE} = 7.00 \text{ kips}$ T
- 6.59 a) completamente restringida b) completamente restringida, indeterminada c) completamente restringida, indeterminada
- 6.60 a) completamente restringida, determinada b) parcialmente restringida c) completamente restringida
- 6.61 a) completamente restringida, indeterminada b) completamente restringida, indeterminada c) completamente restringida
- 6.62 a) 2.50 b) 1.00 c) 0.50 d) 0.50 e) 0.50 f) 0.50 g) 0.50 h) 0.50 i) 0.50 j) 0.50 k) 0.50 l) 0.50 m) 0.50 n) 0.50 o) 0.50 p) 0.50 q) 0.50 r) 0.50 s) 0.50 t) 0.50 u) 0.50 v) 0.50 w) 0.50 x) 0.50 y) 0.50 z) 0.50
- 6.63 a) 12.5 N b) 34.0 N c) 12.5 N d) 34.0 N
- 6.64 $F_{AB} = 3.0 \text{ kN}$ C $F_{BC} = 7.0 \text{ kN}$ C $F_{CD} = 4.75 \text{ kN}$
- 6.65 a) 5.0 b) 1.0 c) 0.5 d) 0.5 e) 0.5 f) 0.5 g) 0.5 h) 0.5 i) 0.5 j) 0.5 k) 0.5 l) 0.5 m) 0.5 n) 0.5 o) 0.5 p) 0.5 q) 0.5 r) 0.5 s) 0.5 t) 0.5 u) 0.5 v) 0.5 w) 0.5 x) 0.5 y) 0.5 z) 0.5
- 6.66 $F_{AB} = 3.0 \text{ kN}$ C $F_{BC} = 7.0 \text{ kN}$ C $F_{CD} = 4.75 \text{ kN}$
- 6.67 a) 5.0 b) 1.0 c) 0.5 d) 0.5 e) 0.5 f) 0.5 g) 0.5 h) 0.5 i) 0.5 j) 0.5 k) 0.5 l) 0.5 m) 0.5 n) 0.5 o) 0.5 p) 0.5 q) 0.5 r) 0.5 s) 0.5 t) 0.5 u) 0.5 v) 0.5 w) 0.5 x) 0.5 y) 0.5 z) 0.5
- 6.68 $F_{AB} = 3.0 \text{ kN}$ C $F_{BC} = 7.0 \text{ kN}$ C $F_{CD} = 4.75 \text{ kN}$
- 6.69 $F_{AB} = 3.0 \text{ kN}$ C $F_{BC} = 7.0 \text{ kN}$ C $F_{CD} = 4.75 \text{ kN}$
- 6.70 a) $F_{AB} = 100.0 \text{ lb}$ C $F_{AC} = 40.0 \text{ lb}$ T $F_{AD} = 50.0 \text{ lb}$ C
 $F_{BC} = 50.0 \text{ lb}$ T b) $F_{AB} = 0$ $F_{AC} = 40.0 \text{ lb}$ T $F_{AD} = 0$
 $F_{BC} = 0.0 \text{ lb}$
- 6.71 a) $F_{AB} = 0$ $F_{AC} = 0$ $F_{AD} = 0$ $F_{BC} = 0$ $F_{CD} = 0$
 $F_{DE} = 0.0 \text{ lb}$ b) $F_{AB} = 0$ $F_{AC} = 0$ $F_{AD} = 0$ $F_{BC} = 0$ $F_{CD} = 0$
 $F_{DE} = 0.0 \text{ lb}$
- 6.72 a) $F_{AB} = 24.0 \text{ lb}$ C $F_{BC} = 0$ $F_{CD} = 0$ $F_{DE} = 0$
 $F_{EF} = 7.50 \text{ lb}$ T b) $F_{AB} = 24.0 \text{ lb}$ C $F_{BC} = 0$ $F_{CD} = 0$
 $F_{DE} = 7.50 \text{ lb}$ T c) $F_{AB} = 0$ $F_{BC} = 0$ $F_{CD} = 0$ $F_{DE} = 0$
 $F_{EF} = 7.50 \text{ lb}$ T
- 6.73 a) $F_{AB} = 7.00 \text{ kN}$ C $F_{BC} = 2.00 \text{ kN}$ C $F_{CD} = 7.00 \text{ kN}$ C
 $F_{DE} = 0.00 \text{ kN}$
- 6.74 $F_{AB} = 13.65 \text{ kN}$ C $F_{BC} = 2.50 \text{ kN}$ T $F_{CD} = 13.65 \text{ kN}$ C
 $F_{DE} = 0.00 \text{ kN}$
- 6.75 a) $F_{AB} = 13.65 \text{ kN}$ C $F_{BC} = 2.50 \text{ kN}$ T $F_{CD} = 13.65 \text{ kN}$ C
 $F_{DE} = 0.00 \text{ kN}$
- 6.76 a) $F_{AB} = 13.65 \text{ kN}$ C $F_{BC} = 2.50 \text{ kN}$ T $F_{CD} = 13.65 \text{ kN}$ C
 $F_{DE} = 0.00 \text{ kN}$
- 6.77 a) $F_{AB} = 13.65 \text{ kN}$ C $F_{BC} = 2.50 \text{ kN}$ T $F_{CD} = 13.65 \text{ kN}$ C
 $F_{DE} = 0.00 \text{ kN}$
- 6.78 a) $F_{AB} = 13.65 \text{ kN}$ C $F_{BC} = 2.50 \text{ kN}$ T $F_{CD} = 13.65 \text{ kN}$ C
 $F_{DE} = 0.00 \text{ kN}$
- 6.79 a) $F_{AB} = 13.65 \text{ kN}$ C $F_{BC} = 2.50 \text{ kN}$ T $F_{CD} = 13.65 \text{ kN}$ C
 $F_{DE} = 0.00 \text{ kN}$
- 6.80 a) $F_{AB} = 13.65 \text{ kN}$ C $F_{BC} = 2.50 \text{ kN}$ T $F_{CD} = 13.65 \text{ kN}$ C
 $F_{DE} = 0.00 \text{ kN}$
- 6.81 a) $F_{AB} = 13.65 \text{ kN}$ C $F_{BC} = 2.50 \text{ kN}$ T $F_{CD} = 13.65 \text{ kN}$ C
 $F_{DE} = 0.00 \text{ kN}$
- 6.82 a) $F_{AB} = 13.65 \text{ kN}$ C $F_{BC} = 2.50 \text{ kN}$ T $F_{CD} = 13.65 \text{ kN}$ C
 $F_{DE} = 0.00 \text{ kN}$
- 6.83 a) $F_{AB} = 13.65 \text{ kN}$ C $F_{BC} = 2.50 \text{ kN}$ T $F_{CD} = 13.65 \text{ kN}$ C
 $F_{DE} = 0.00 \text{ kN}$
- 6.84 a) $F_{AB} = 13.65 \text{ kN}$ C $F_{BC} = 2.50 \text{ kN}$ T $F_{CD} = 13.65 \text{ kN}$ C
 $F_{DE} = 0.00 \text{ kN}$
- 6.85 a) $F_{AB} = 13.65 \text{ kN}$ C $F_{BC} = 2.50 \text{ kN}$ T $F_{CD} = 13.65 \text{ kN}$ C
 $F_{DE} = 0.00 \text{ kN}$
- 6.86 a) $F_{AB} = 13.65 \text{ kN}$ C $F_{BC} = 2.50 \text{ kN}$ T $F_{CD} = 13.65 \text{ kN}$ C
 $F_{DE} = 0.00 \text{ kN}$
- 6.87 a) $F_{AB} = 13.65 \text{ kN}$ C $F_{BC} = 2.50 \text{ kN}$ T $F_{CD} = 13.65 \text{ kN}$ C
 $F_{DE} = 0.00 \text{ kN}$
- 6.88 a) $F_{AB} = 13.65 \text{ kN}$ C $F_{BC} = 2.50 \text{ kN}$ T $F_{CD} = 13.65 \text{ kN}$ C
 $F_{DE} = 0.00 \text{ kN}$
- 6.89 a) $F_{AB} = 13.65 \text{ kN}$ C $F_{BC} = 2.50 \text{ kN}$ T $F_{CD} = 13.65 \text{ kN}$ C
 $F_{DE} = 0.00 \text{ kN}$
- 6.90 a) $F_{AB} = 13.65 \text{ kN}$ C $F_{BC} = 2.50 \text{ kN}$ T $F_{CD} = 13.65 \text{ kN}$ C
 $F_{DE} = 0.00 \text{ kN}$
- 6.91 a) $F_{AB} = 13.65 \text{ kN}$ C $F_{BC} = 2.50 \text{ kN}$ T $F_{CD} = 13.65 \text{ kN}$ C
 $F_{DE} = 0.00 \text{ kN}$
- 6.92 a) $F_{AB} = 13.65 \text{ kN}$ C $F_{BC} = 2.50 \text{ kN}$ T $F_{CD} = 13.65 \text{ kN}$ C
 $F_{DE} = 0.00 \text{ kN}$
- 6.93 a) $F_{AB} = 13.65 \text{ kN}$ C $F_{BC} = 2.50 \text{ kN}$ T $F_{CD} = 13.65 \text{ kN}$ C
 $F_{DE} = 0.00 \text{ kN}$
- 6.94 a) $F_{AB} = 13.65 \text{ kN}$ C $F_{BC} = 2.50 \text{ kN}$ T $F_{CD} = 13.65 \text{ kN}$ C
 $F_{DE} = 0.00 \text{ kN}$
- 6.95 a) $F_{AB} = 13.65 \text{ kN}$ C $F_{BC} = 2.50 \text{ kN}$ T $F_{CD} = 13.65 \text{ kN}$ C
 $F_{DE} = 0.00 \text{ kN}$
- 6.96 a) $F_{AB} = 13.65 \text{ kN}$ C $F_{BC} = 2.50 \text{ kN}$ T $F_{CD} = 13.65 \text{ kN}$ C
 $F_{DE} = 0.00 \text{ kN}$
- 6.97 a) $F_{AB} = 13.65 \text{ kN}$ C $F_{BC} = 2.50 \text{ kN}$ T $F_{CD} = 13.65 \text{ kN}$ C
 $F_{DE} = 0.00 \text{ kN}$
- 6.98 a) $F_{AB} = 13.65 \text{ kN}$ C $F_{BC} = 2.50 \text{ kN}$ T $F_{CD} = 13.65 \text{ kN}$ C
 $F_{DE} = 0.00 \text{ kN}$
- 6.99 a) $F_{AB} = 13.65 \text{ kN}$ C $F_{BC} = 2.50 \text{ kN}$ T $F_{CD} = 13.65 \text{ kN}$ C
 $F_{DE} = 0.00 \text{ kN}$
- 6.100 a) $F_{AB} = 13.65 \text{ kN}$ C $F_{BC} = 2.50 \text{ kN}$ T $F_{CD} = 13.65 \text{ kN}$ C
 $F_{DE} = 0.00 \text{ kN}$
- 6.101 a) $F_{AB} = 13.65 \text{ kN}$ C $F_{BC} = 2.50 \text{ kN}$ T $F_{CD} = 13.65 \text{ kN}$ C
 $F_{DE} = 0.00 \text{ kN}$
- 6.102 a) $F_{AB} = 13.65 \text{ kN}$ C $F_{BC} = 2.50 \text{ kN}$ T $F_{CD} = 13.65 \text{ kN}$ C
 $F_{DE} = 0.00 \text{ kN}$
- 6.103 a) $F_{AB} = 13.65 \text{ kN}$ C $F_{BC} = 2.50 \text{ kN}$ T $F_{CD} = 13.65 \text{ kN}$ C
 $F_{DE} = 0.00 \text{ kN}$
- 6.104 a) $F_{AB} = 13.65 \text{ kN}$ C $F_{BC} = 2.50 \text{ kN}$ T $F_{CD} = 13.65 \text{ kN}$ C
 $F_{DE} = 0.00 \text{ kN}$
- 6.105 a) $F_{AB} = 13.65 \text{ kN}$ C $F_{BC} = 2.50 \text{ kN}$ T $F_{CD} = 13.65 \text{ kN}$ C
 $F_{DE} = 0.00 \text{ kN}$
- 6.106 a) $F_{AB} = 13.65 \text{ kN}$ C $F_{BC} = 2.50 \text{ kN}$ T $F_{CD} = 13.65 \text{ kN}$ C
 $F_{DE} = 0.00 \text{ kN}$
- 6.107 a) $F_{AB} = 13.65 \text{ kN}$ C $F_{BC} = 2.50 \text{ kN}$ T $F_{CD} = 13.65 \text{ kN}$ C
 $F_{DE} = 0.00 \text{ kN}$
- 6.108 a) $F_{AB} = 13.65 \text{ kN}$ C $F_{BC} = 2.50 \text{ kN}$ T $F_{CD} = 13.65 \text{ kN}$ C
 $F_{DE} = 0.00 \text{ kN}$

- 7.147** 1.90 ft
7.148 5.2 ft
7.151 (a) 19.4 in (b) 97 in
7.152 0.10 ft
7.153 (a) 0.33 ft (b) 55° (c) 755 in.
7.154 (a) 1500 ft (b) (Slope AB) $\theta = 1.324$ rad
 $V = 705$ lb $\rightarrow M = 0.29$ in.
7.155 (Slope AB) $\theta = 25.6^\circ$ $V = 21.4$ lb $M = 21.0$ in.
7.156 (a) (Slope AB) $\theta = 4^\circ$ $V = 0.38$ lb (b) 450 ft (c) 0.3
 (d) Slope C $\theta = 1^\circ$ (e) 1.3 lb (f) 0.3 lb (g) 0.3 lb
7.157 (a) 18.0 ft (b) 0.04 ft (c) 0.1
7.159 (a) 41.4 kN (b) 38.3 kN (c) 0
7.160 (a) 12.00 kip (b) 0.60 C (c) 6.25 kip (d) 0.850 ft (e) 0.4
 (f) 0.3 ft (g) 0.1 ft
7.164 (a) 2.70 kN (b) 75.14 in
7.C1 (a) $M_A = +0.64$ kN (b) $M_C = +1.00$ kip (c)
 $M_B = +1.80$ ft (d) 0
7.C3 $d = 1.023$ m; $M_{\max} = 37.0$ kN (e) 1.5 m (d) A
7.C4 (a) $M_{\max} = 5.42$ kip (b) supports $x = 8.5$ ft $y = 1.5$ ft
7.C6 $c/h = 0.100$ $b/h = 0.522$; $v_{\max}/c = 1.332$
 $f_{\max}/c = 0.700$; $f_{\min}/h = 0.423$

- 01 Equilíbrio: $F = 31,8 \text{ N}$
- 02 El bloque se mueve: $F = 35,7 \text{ N}$
- 03 Equilíbrio: $F = 48,4 \text{ N}$
- 04 El bloque se mueve: $F = 103,5 \text{ N}$
- 05 $\mu = 0,4$
- 06 $\mu = 0,4$
- 07 $\mu = 0,4$
- 08 $\mu = 0,4$
- 09 $\mu = 0,4$
- 10 $\mu = 0,4$
- 11 $\mu = 0,4$
- 12 $\mu = 0,4$
- 13 $\mu = 0,4$
- 14 $\mu = 0,4$
- 15 $\mu = 0,4$
- 16 $\mu = 0,4$
- 17 $\mu = 0,4$
- 18 $\mu = 0,4$
- 19 $\mu = 0,4$
- 20 $\mu = 0,4$
- 21 $\mu = 0,4$
- 22 $\mu = 0,4$
- 23 $\mu = 0,4$
- 24 $\mu = 0,4$
- 25 $\mu = 0,4$
- 26 $\mu = 0,4$
- 27 $\mu = 0,4$
- 28 $\mu = 0,4$
- 29 $\mu = 0,4$
- 30 $\mu = 0,4$
- 31 $\mu = 0,4$
- 32 $\mu = 0,4$
- 33 $\mu = 0,4$
- 34 $\mu = 0,4$
- 35 $\mu = 0,4$
- 36 $\mu = 0,4$
- 37 $\mu = 0,4$
- 38 $\mu = 0,4$
- 39 $\mu = 0,4$
- 40 $\mu = 0,4$
- 41 $\mu = 0,4$
- 42 $\mu = 0,4$
- 43 $\mu = 0,4$
- 44 $\mu = 0,4$
- 45 $\mu = 0,4$
- 46 $\mu = 0,4$
- 47 $\mu = 0,4$
- 48 $\mu = 0,4$
- 49 $\mu = 0,4$
- 50 $\mu = 0,4$
- 51 $\mu = 0,4$
- 52 $\mu = 0,4$
- 53 $\mu = 0,4$
- 54 $\mu = 0,4$
- 55 $\mu = 0,4$
- 56 $\mu = 0,4$
- 57 $\mu = 0,4$
- 58 $\mu = 0,4$
- 59 $\mu = 0,4$
- 60 $\mu = 0,4$
- 61 $\mu = 0,4$
- 62 $\mu = 0,4$
- 63 $\mu = 0,4$
- 64 $\mu = 0,4$
- 65 $\mu = 0,4$
- 66 $\mu = 0,4$
- 67 $\mu = 0,4$
- 68 $\mu = 0,4$
- 69 $\mu = 0,4$
- 70 $\mu = 0,4$
- 71 $\mu = 0,4$
- 72 $\mu = 0,4$
- 73 $\mu = 0,4$
- 74 $\mu = 0,4$
- 75 $\mu = 0,4$
- 76 $\mu = 0,4$
- 77 $\mu = 0,4$
- 78 $\mu = 0,4$
- 79 $\mu = 0,4$
- 80 $\mu = 0,4$
- 81 $\mu = 0,4$
- 82 $\mu = 0,4$
- 83 $\mu = 0,4$
- 84 $\mu = 0,4$
- 85 $\mu = 0,4$
- 86 $\mu = 0,4$
- 87 $\mu = 0,4$
- 88 $\mu = 0,4$
- 89 $\mu = 0,4$
- 90 $\mu = 0,4$
- 91 $\mu = 0,4$
- 92 $\mu = 0,4$
- 93 $\mu = 0,4$
- 94 $\mu = 0,4$
- 95 $\mu = 0,4$
- 96 $\mu = 0,4$
- 97 $\mu = 0,4$
- 98 $\mu = 0,4$
- 99 $\mu = 0,4$

[illegible]

- 9.85 a) $7 \text{ mol}^2/\text{kg}$, b) $0,859 \text{ mol}^2$
 9.86 $I_x = 0,877 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $I_y = 1,085 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $I_z = 1,052 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
 9.87 $\theta = 20^\circ$, $I_x = 14,20 \text{ in}^4$, $I_y = 3,15 \text{ in}^4$, $I_{x-y} = -0,03 \text{ in}^4$
 9.88 a) $\bar{I}_x = 0,71 \times 10^6 \text{ mm}^4$, $I_x = 0,43 \times 10^6 \text{ mm}^4$,
 $\bar{I}_y = 21,3 \text{ mm}^4$, $\bar{I}_y = 8,87 \text{ mm}^4$, b) $I_x = 40,4 \text{ in}^4$,
 $I_y = 46,5 \text{ in}^4$, $I_{x-y} = 1,499 \text{ in}^4$, $I_{x-y} = 1,697 \text{ in}^4$,
 c) $\bar{I}_x = 2,531 \text{ in}^4$, $\bar{I}_y = 1,583 \text{ in}^4$, d) $I_x = 1,804 \text{ in}^4$,
 $I_y = 0,690 \text{ in}^4$
 9.89 a) $5,50 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, b) $77,4 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
 9.88 a) $740 \times 10^{-6} \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$, b) $6,65 \times 10^{-6} \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$,
 c) $208 \times 10^{-6} \text{ lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$

CAPÍTULO 10

- 10.1 $82,5 \text{ N}$ ↓
 10.2 120 lb →
 10.3 $0,5 \text{ N} \cdot \text{m}$ ↓
 10.4 $1.000 \text{ lb} \cdot \text{in}$, 7.
 10.5 a) $0,00 \text{ N} \cdot \text{C}$, $8,00 \text{ mm}$ ↓, b) $300 \text{ N} \cdot \text{C}$, $40,0 \text{ mm}$ ↓
 10.6 a) $120,0 \text{ N} \cdot \text{C}$, $16,00 \text{ mm}$ ↓, b) $300 \text{ N} \cdot \text{C}$, $40,0 \text{ mm}$ ↓
 10.9 $Q = 2P \sin \theta / \cos \theta / 2$
 10.10 $Q = 2P \cos \theta / \cos \theta / 2$
 10.11 $Q = (MP/2) \tan \theta$
 10.12 $Q = P[(1/\cos^2 \theta) - 1]$
 10.13 $M = \frac{1}{2} Wl \tan \theta \sec \theta$
 10.14 $M = Pl/2 \tan \theta$
 10.15 $M = 7Pl \cos \theta$
 10.16 a) $M = Pl \sin 2\theta$, b) $M = (Pl/2) \cos \theta$, c) $M = Pl \sin \theta$
 10.21 $65,2 \text{ lb} \cdot \text{ft}$ ↓
 10.22 $22,8 \text{ lb} \cdot \text{ft}$ 70,0°
 10.23 $36,4^\circ$
 10.24 $39,7^\circ$
 10.25 $65,0^\circ$
 10.26 $10,61^\circ$ y $51,3^\circ$
 10.27 $25,0^\circ$
 10.28 $39,7^\circ$ y $60,0^\circ$
 10.29 $32,2^\circ$
 10.30 $40,2^\circ$
 10.31 $22,4^\circ$
 10.32 $51,3^\circ$
 10.33 $53,4^\circ$
 10.34 $19,40^\circ$
 10.35 $50,0^\circ$
 10.36 $78,7^\circ$, $32,4^\circ$, $37,0^\circ$
 10.37 $12,00 \text{ kN} \cdot \text{m}$
 10.38 $20,4^\circ$
 10.39 $2.370 \text{ lb} \cdot \text{ft}$
 10.40 $2.530 \text{ lb} \cdot \text{ft}$
 10.41 $\eta = 1/3 = \mu \cot \alpha$
 10.42 $32,6 \text{ N}$, $31,6 \text{ N}$
 10.43 $300 \text{ N} \cdot \text{m}$, $51,5 \text{ N} \cdot \text{m}$

- 10.44 $\eta = \tan \theta / \tan \theta + \phi$
 10.45 $7,75 \text{ kN}$ ↓
 10.46 $\theta = 1.363 \text{ kN}$, $M_{21} = 550 \text{ N} \cdot \text{m}$
 10.47 $0,533 \text{ m}$ ↓
 10.48 $0,625 \text{ m}$ →
 10.49 $10,40^\circ$
 10.50 El equilibrio es posible
 10.51 $\alpha = 0$ y $\beta = 100,0^\circ$, inestable;
 $\alpha = 75,5^\circ$ y $\beta = 24,4^\circ$, estable.
 10.52 $\alpha = 0,01^\circ$ y $\beta = 250^\circ$, inestable;
 $\alpha = 22,4^\circ$ y $\beta = 158,0^\circ$, estable.
 10.53 $\alpha = -45,0^\circ$, inestable; $\beta = 135,0^\circ$, estable.
 10.54 $\alpha = -83,4^\circ$, inestable; $\beta = 118,6^\circ$, estable.
 10.55 $59,0^\circ$ estable.
 10.56 $78,7^\circ$, estable; $32,4^\circ$, inestable; $37,0^\circ$ estable.
 10.57 $0,39^\circ$ y $0,00^\circ$, estable; $34,2^\circ$, inestable.
 10.58 357 mm
 10.59 352 mm
 10.60 $17,11^\circ$, estable; $72,9^\circ$, inestable.
 10.61 $40,1^\circ$
 10.62 $54,8^\circ$
 10.63 $37,4^\circ$
 10.64 $16,88 \text{ m}$
 10.65 $x > 6,94 \text{ lb/in}$
 10.66 $15,00 \text{ in}$
 10.67 $P < 24,70$
 10.68 $P < 41,18$
 10.69 $P < 60 - a \sqrt{2}$
 10.70 $P < 100,0 \text{ N}$
 10.71 $P < 764 \text{ N}$
 10.72 a) $P < 10,00 \text{ lb}$, b) $P < 20,0 \text{ lb}$
 10.73 $60,0 \text{ lb}$ ↓
 10.74 $80,0 \text{ lb} \cdot \text{in}$ ↓
 10.75 a) $20,0 \text{ N}$, b) $105,0 \text{ N}$
 10.76 $30,2^\circ$
 10.77 $60,4^\circ$
 10.78 $7,13 \text{ m}$
 10.79 a) 0, inestable; b) $137,5^\circ$, estable.
 10.80 a) $22,4^\circ$, b) $30,6^\circ$
 10.81 $\theta = 60^\circ$; $2,42 \text{ m}$; $\theta = 120^\circ$, $1,732 \text{ m}$,
 $(M/P)_{\min} = 2,32 \text{ in}$, en $\theta = 73,7^\circ$
 10.82 $\theta = 60^\circ$; $171,1 \text{ N} \cdot \text{C}$, Para $32,5^\circ \leq \theta \leq 134,3^\circ$, $|F| \leq 400 \text{ N}$.
 10.83 $\theta = 60^\circ$; $0,16 \text{ N} \cdot \text{T}$, Para $\theta \leq 135,7^\circ$, $|F| \leq 400 \text{ N}$.
 10.84 b) $\theta = 60^\circ$, nivel de referencia en C, $V = -204 \text{ lb} \cdot \text{ft}$,
 c) $34,2^\circ$, estable; 90° , inestable; $145,8^\circ$, estable.
 10.85 b) $\theta = 50^\circ$, nivel de referencia en E, $V = 100,5 \text{ J}$,
 $dV/d\theta = 22,9 \text{ J}$,
 c) $\theta = 0$, inestable; $30,4^\circ$
 10.86 b) $\theta = 60^\circ$, nivel de referencia en B, $34,0 \text{ J}$,
 c) $\theta = 0$, inestable; $41,4^\circ$, estable.
 10.87 b) $\theta = 60^\circ$, nivel de referencia en A = 0; $-37,0 \text{ J}$, c) $50,2^\circ$, estable.

Prefijos del SI

Factor multiplicativo	Prefijo	Símbolo
$1\ 000\ 000\ 000\ 000 = 10^{12}$	tera	T
$1\ 000\ 000\ 000 = 10^9$	giga	G
$1\ 000\ 000 = 10^6$	mega	M
$1\ 000 = 10^3$	kilo	k
$100 = 10^2$	hecto ¹	h
$10 = 10^1$	deca ¹	da
$0.1 = 10^{-1}$	deci ¹	d
$0.01 = 10^{-2}$	centi ¹	c
$0.001 = 10^{-3}$	milí	m
$0.000\ 001 = 10^{-6}$	micro	μ
$0.000\ 000\ 001 = 10^{-9}$	nano	n
$0.000\ 000\ 000\ 001 = 10^{-12}$	pico	p
$0.000\ 000\ 000\ 000\ 001 = 10^{-15}$	femto	f
$0.000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 001 = 10^{-18}$	abi	a

¹ Debe evitarse el uso de estos prefijos, excepto en las unidades de áreas y volúmenes y para el uso no técnico del centímetro, como en las medidas referentes a la ropa y al cuerpo.

Principales unidades del SI usados en mecánica

Cantidad	Unidad	Símbolo	Fórmula
Aceleración	Metro por segundo al cuadrado	m/s ²	m/s ²
Ángulo	Radián	rad	°
Aceleración angular	Radián por segundo al cuadrado	rad/s ²	rad/s ²
Velocidad angular	Radián por segundo	rad/s	rad/s
Área	Metro cuadrado	m ²	m ²
Densidad	Kilogramo por metro cúbico	kg/m ³	kg/m ³
Energía	Joule	J	N · m
Fuerza	Newton	N	kg · m/s ²
Frecuencia	Hertz	Hz	s ⁻¹
Impulso	Newton-segundo	kg · m/s	kg · m/s
Longitud	Metro	m	l
Masa	Kilogramo	kg	l
Momento de una fuerza	Newton-metro	N · m	N · m
Potencia	Watt	W	J/s
Presión	Pascal	Pa	N/m ²
Tiempo	Segundo	s	t
Velocidad	Metro por segundo	m/s	m/s
Volumen			
Sólidos	Metro cúbico	m ³	m ³
Líquidos	Litro	l	10 ⁻³ m ³
Trabajo	Joule	J	N · m

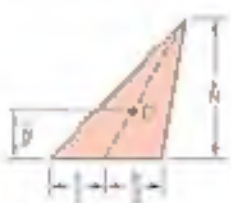
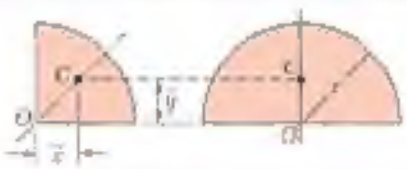
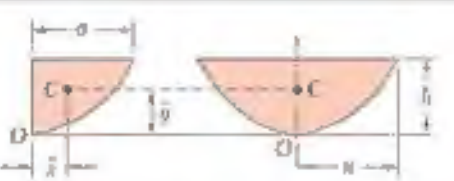
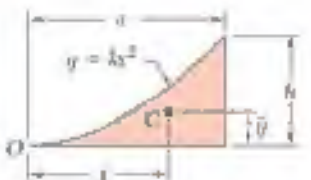
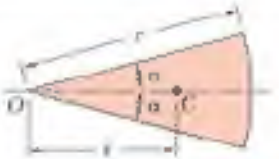
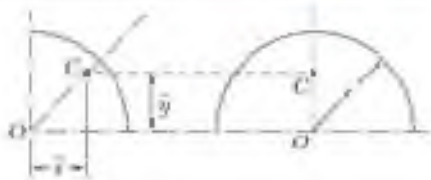

¹ Unidad suplementaria (1 revolución = 2 π rad = 360°).

² Unidad básica.

Unidades de uso común en Estados Unidos y sus equivalentes en unidades SI

Cantidad	Unidades de uso común en Estados Unidos	Equivalentes del SI
Aceleración	ft/s ²	0,3048 m/s ²
	in./s ²	0,0254 m/s ²
Área	ft ²	0,0929 m ²
	in ²	645,2 mm ²
Energía	ft · lb	1,356 J
Fuerza	kip	4,448 kN
	lb	4,448 N
	oz	0,2780 N
	lb · s	4,448 N · s
Impulso	ft	0,3048 m
	in.	25,40 mm
	mi	1,609 km
Masa	oz masa	28,35 g
	lb masa	0,4536 kg
	slug	14,59 kg
	ton	907,2 kg
Momento de una fuerza	lb · ft	1,356 N · m
	lb · in.	0,1130 N · m
Momento de inercia de un área	in. ⁴	0,4162 × 10 ⁶ mm ⁴
	lb · ft · s ²	1,356 kg · m ²
Cantidad de movimiento	lb · s	4,448 kg · m/s
Potencia	ft · lb/s	1,356 W
	hp	745,7 W
Presión o esfuerzo	lb/ft ²	47,88 Pa
	lb/in. ² (psi)	6,895 kPa
Velocidad	ft/s	0,3048 m/s
	in./s	0,0254 m/s
	mi/h (mph)	0,4470 m/s
	mi/h (mph)	1,609 km/h
Volumen	ft ³	0,02832 m ³
	in. ³	16,39 cm ³
	gal	3,785 L
Trabajo	qt	0,9464 L
	ft · lb	1,356 J

Centroides de áreas y líneas comunes

Forma		x	y	Área
Área triangular		$(1/3)(a + b)$	$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Un cuarto de área circular		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
Área semicircular		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
Área semiparabólica		$\frac{3a}{h}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
Área parabólica		0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$
Tínganu parabólica		$\frac{3a}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{bh}{3}$
Sector circular		$\frac{2r \sin \alpha}{3\alpha}$	0	αr^2
Un cuarto de arco circular		$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{\pi r}{2}$
Arco semicircular		0	$\frac{2r}{\pi}$	πr
Arco de un círculo		$\frac{r \sin \alpha}{\alpha}$	0	$2\alpha r$